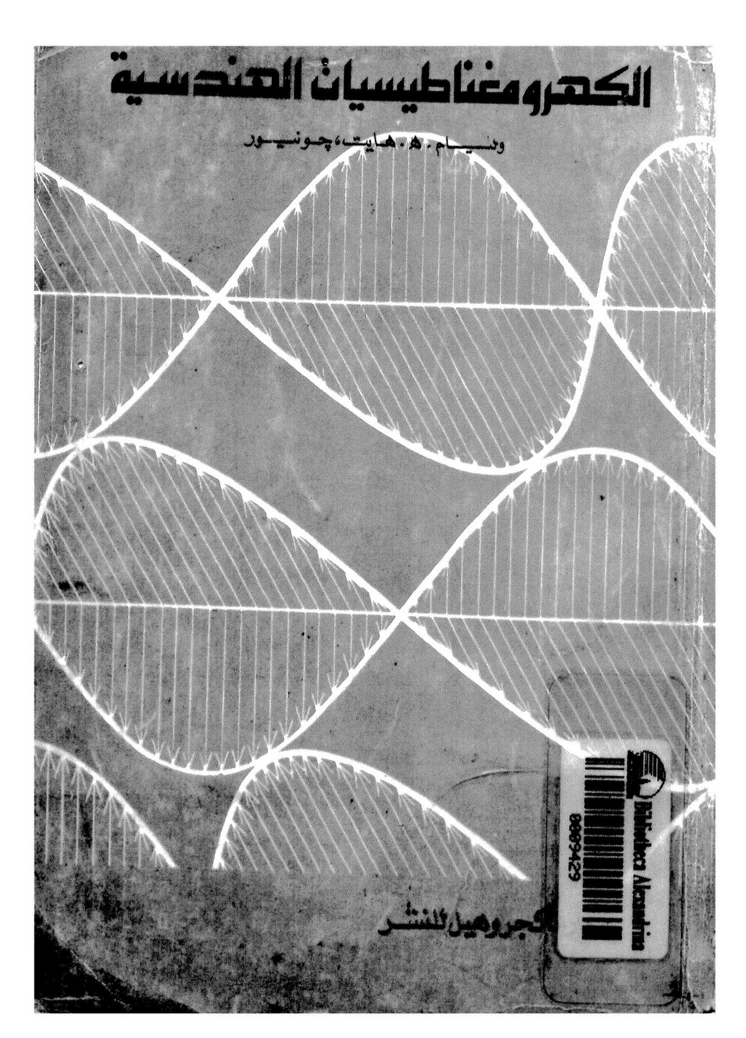
الكهرومغناطيسيات الهندسية

وليام . هـ . هايت ، جونيور



كجروهيل للنشر

الكهرومغناطيسيات الهندسية

تــأليف

وليام . هـ . هايت ، چونيور

أستاذ الهندســة الكهــربية

جامعة بيردو

ترجمـــــة

الدكتور عادل عبد القادر محسن

قسم الرياضيات والفيزياء الهندسية ـ كلية الهندسة

جامعة القاهرة

جمهورية مصر العربية

مـــراجعة

الأستاذ الدكتور مختار ناشد فهمى

رئيس قسم الرياضيات والفيزياء الهندسية ـ كلية الهندسة

جامعة القاهرة

جمهورية مصر العربية



دار ماكجروهيل للنشر جمهورية مصر العربية ـ القــاهرة

نيويورك . سانت لويس . سان فرنسيسكو . اوكلاند . بوجوتا . دوسلدورف . جوها نسبرج . لندن . مدريد . مكسيكو . مونتريال . نيودلهى . بناما . باريس . ساوباولو . سنغافورة . سيدنى . طوكيو . تورنتو .

Engineering Electromagnetics

William H. Hayt, Jr.

ISBN 084270 1

المحتـــويات

الموضـــوع	صفحة

مقدمة

رغم أن أغلب مناهج الهندسة الكهربية تبدأ بدراسة الدوائر الكهربية والمغناطيسية ، فإنه من المعترف به الآن أن النظرية الأساسية أكثر للمجالات الكهربية والمغناطيسية تستحق اهتماما لاحقا فى هذه المناهج . إن بعض الاعتياد على مفاهيم الدوائر بالاضافة الى معلومات لحساب التفاضل والتكامل تسمح بمعالجة نظرية المجال فى السنوات الجامعية الأولى التى تنبع من خلال معادلات ماكسويل وتبرر التقريبات المؤدية إلى نظرية الدوائر .

يستخدم هذا الكتاب معادلات ماكسويل كمركز الموضوع . وتظهر هذه المعادلات من طريق تاريخى ، وفيه تدخل القوانين التجريبية الهامة تدريجيا وتعالج باستخدام معلومات متزايدة باطراد عن حساب التفاضل والتكامل للمتجهات . وتُميز معادلات ماكسويل حيث تظهر ، حتى عندما تنطبق على المجالات الاستاتيكية ، ويجب الشعور باحساس خاص بالانجاز ، وربما حتى بالاعتياد عندما تكمل النظرية فى النهاية . وسنشرح تطبيقات عدة لهذه المعادلات فى الفصول النهائية متضمنة الحركة الموجية والظاهرة السطحية وظواهر خط النقل ونظرية الدوائر والفجوة الرنانة . وأيضا يشتمل الكتاب على نظرية أولية للاشعاع والهوائيات .

ومادة الكتاب أكثر من كافية لمقرر فى فصل دراسى واحد . وقد يكون من المرغوب فيه حذف أجزاء من الفصول فى طرق التخطيط التجريبية وحلول معادلات لابلاس وخطوط النقل أو تطبيق معادلات ماكسويل وذلك على حسب المستوى التعليمى .

وقد كتب الكتاب بهدف جعله سهلا بقدر الامكان ليتعلم الطالب بمفرده . ولقد تم ذلك باتباع تدرج مختار بعناية فى الصعوبة خلال كل فصل وفيما بين الفصول نفسها بإعطاء أمثلة عددية كلما أمكن ، وأمثلة عدة تشرح وتطبق كل نتيجة أساسية ، وأيضا بتضمين عدد كبير من المسائل التدريبية وأجوبتها . ولقد تجنب الاعتماد الزائد على التحليل وهندسة المتجهات واستخدامها فى تفسير المجالات .

ولقد وضعت المادة الأكثر صعوبة قرب نهايات الفصول أو عند نهاية دراسة مرحلة معينة من الموضوع . والطالب الأبطأ ، الذى لايستطيع أن يستوعب نفس كمية المعلومات كالطالب الأسرع ، سوف يُجذب للمادة الأكثر أساسية عند بداية كل فصل .

وحيث أن المحتوى الموضوعى للفصل التالى ليس مبنيا عادة على المادة الأكثر تقدما فى الفصل السابق ، فإنه يمكن للطالب التقدم بدون الاستيعاب الكامل لهذه المادة . وتقدم المادة الاكثر تقدما تحديا مطلوبا للطلبة الأحسن .

توجد مسائل تدريبية عند نهايات معظم الأقسام حيث تقدم صيغة أو قانون ممكن التعبير عنه فى هيئة مسألة . وتحتوى هذه المسائل عادة على أجزاء عدة ، وكمساعد للدراسة المستقلة فإن الاجابات تعطى فى الحال تحت المسألة بنفس ترتيب اجزاء المسألة . المسائل الموجودة عند نهايات الفصول أكثر صعوبة قليلا أو ربما أكثر أهمية قليلا . وتظهر إجابات المسائل الفردية فى الملحق د ، وحلول جميع المسائل معطاة فى كتيب يمكن للمدرس طلبه من الناشر . وترتيب المسائل يقابل تلك لمادة الكتاب .

وجميع المسائل فى هذه الطبعة جديدة ماعدا أربع أو خمس مسائل أُحسن استخدامها لتعطى بعض الخطوات المفقودة فى النظرية . وقد أُعيد استخدام بعض المسائل القليلة المفضلة للمؤلف بعد تحويرها . وهناك ايضا حوالى أربعين مسألة فى هذه الطبعة أكثر من أى طبعة سابقة . وكملاحظة ثانوية للمدرس : أن معظم المسائل فى الطبعات الأخرى مازالت مطبقة برغم الحاجة احيانا لتغيير رمز . ولقد يسرت وفرة آلات النسخ وطرق الطبع استخدام هذه المسائل القديمة والناشر يعطى بحرية تصريحه لاستهلاك الطبعات السابقة . وكملاحظة ثانوية للطالب ، أن أى شخص يحل كل المسائل فى جميع الطبعات يصعب مفاجأته فى الاختبار بعد ذلك .

ومازالت معظم أهداف الطبعات الثلاث الأول قائمة فى هذه الطبعة . على أن أكثر من عشرين عاما من الاستعمال قد حثت عديدا من الطلبة والزملاء والمراسلين أن يقترحوا تحسينات أصبحت الآن جزءا من الكتاب . حقا ، لم تعان هذه الطبعة أى حذف كبير فى المادة . ولقد إختفى القسم الخاص بالتحويل بين نظم الاحداثيات فى الفصل الأول ، ولكنها قد أُدمجت بطريقة أبسط فى أجزاء اخرى لذلك الفصل . ولقد تقلص القسم الخاص بتخطيط انسياب الموائع الى فقرة فى جزء مبكر من الفصل السادس وتغير ترتيب المحتوى فى ذلك الفصل .

وأضيف قسم عن الصور إلى الفصل الخامس ، وهناك مادة جديدة عن الهوائيات القصيرة ، ثنائى القطب نصف الموجى وأحادى القطب ربع الموجى . ويحتوى الملحق ج الآن على جدول قصير يُعطى قيما دقيقة للثوابت الفيزيائية المستخدمة فى الكتاب وتظهر أمثلة عددية جديدة أو محسنة فى مناقشات التحويل بين نظم الاحداثيات ، نظرية الانفراج ، اختزان الطاقة الكهروستاتيكية ، نظرية ستوكس ، القوة بين عناصر التيار ، ونسبة الموجة الواقفة للموجة المستوية المنتظمة .

تتضمن المناقشات التى خضعت لبعض المحاولة فى تحقيق معالجة محسنة كلا من المواد العازلة والمغناطيسية ، وعزم التدوير واستخدام الحاسب الآلى فى التكرار والمحاثة الداخلية للخط المحورى .

وتشمل التغييرات المنسقة الموجودة فى الطبعة الرابعة العد التتابعى للمعادلات خلال كل فصل ، واستبدال p ب r فى الاحداثيات الاسطوانية ، واستخدام v محل U للسرعة ، واستخدام أكثر توافقا لـr لتحديد موقع نقطة المجال و r' لنقطة المنبع .

وكجهد إضافى للتوضيح ، فقد زاد عدد التوضيحات المستخدمة فى هذه الطبعة بحوالى ثلاثين فى المائة ولو أن جزءا كبيرا منها يظهر فى المسائل .

ولقد روجعت جداول قيم ثوابت المواد الموجودة فى الملحق (جـ) وصُححت حيث لزم ذلك .

وتشمل بيانات المراجع التى تظهر فى نهايات كل الفصول كتبا حديثة عديدة والآن مذكورا آخر طبعة لكل عمل .

والمؤلف يعترف بامتنان بالقراءة الشاملة للمخطوطة التى قام بها الاستاذ و . ل . ويكز بجامعة بوردو ، فقد أعطى اقتراحات كثيرة مفيدة . وكثير من النقاد الذين لم تذكر أسماؤ هم قد اقترحوا أيضا عددا من التغييرات التى عُملت فى هذه الطبعة . وأيضا أشار طلبة إلى أخطاء وحددوا بعض الفقرات المربكة . وكل هذه المساعدة لها تقديرها العظيم ويأمل المؤلف باخلاص أن يستمر هذا المجهود الجماعى .

وليام هـ . هايت ،

الفصل الأول

تحليل المتجهات

إن تحليل المتجهات موضوع رياضى ، وهو يُدرس بواسطة الرياضيين أفضل من المهندسين . ولكن معظم طلبة الهندسة فى السنوات الأولى والأعلى لم يكن عندهم الوقت (أو ربما الميل) لأخذ مقرر فى تحليل المتجهات ، برغم احتمال أن تكون كثير من المفاهيم والعمليات الأولية للمتجهات قد أدخلت فى مقررات الرياضة المبكرة . وهذه المفاهيم الأساسية والعمليات قد تم تغطيتها فى هذا الفصل ويجب أن يعتمد الوقت المخصص لها على التعرض السابق .

إن وجهة النظر هنا هى للمهندس أو الفيزيائى وليست للرياضى حيث أن الاثباتات مبينة أكثر من شرحها بدقة بالغة مع تأكيد التفسير الفيزيائى . ومن السهل للمهندس أن يأخذ منهجا أكثر دقة واكتمالا فى قسم الرياضيات بعد اعطائه قليلا من الصور الفيزيائية والتطبيقات .

ومن الممكن دراسة الكهربية والمغناطيسية دون استخدام تحليل المتجهات ، وربما قد فعل بعض طلبة الهندسة ذلك فى مقرر سابق فى الهندسة الكهربية أو الفيزياء الأساسية . ولكن الاستمرار فى هذا العمل الأولى سيؤدى الى كتابة معادلات كثيرا ما تتكون من حدود تبدو متشابهة . وإن إلقاء نظرة سريعة على إحدى هذه المعادلات الطويلة يشف عن قليل من الطبيعة الفيزيائية للمعادلة وربما يؤدى الى الاستخفاف بالمألوف .

إن تحليل المتجهات هو طريقة اختزال رياضية ، لها بعض الرموز الجديدة وبعض القواعد الجديدة أيضا وشرك هنا وهناك كما فى معظم المجالات الجديدة ، ولذلك يتطلب التركيز والانتباه والممارسة . والمسائل التدريبية ، التى يبدأ ظهورها فى نهاية القسم ١ ـ ٤ يجب أن تعتبر جزءا متكاملا من مضمون الكتاب كما يجب أن تحل جميعا . وهذه المسائل لن تكون صعبة مادامت المادة فى الجزء الخاص بها قد فُهمت كاملا . وقد تستغرق قراءة الفصل بهذه الطريقة وقتا أطول قليلا ، ولكن استثمار هذا الوقت سوف يؤدى الى فوائد مدهشة .

١ - ١ المقياسات والمتجهات :

يعبر المقياسى عن كمية تحدد قيمتها بعدد حقيقى واحد . والكميات x , y و z التى نستخدمها فى أساسيات الجبر هى مقياسيات . والكميات التى تمثلها هى مقياسيات أيضا . وإذا تحدثنا عن جسم يسقط مسافة L فى زمن t أوعن درجة حرارة T عند أى نقطة فى قدر من الحساء لها الاحداثيات x , y و z فان L , t , T , x , y و z كلها مقياسيات . والكتلة والكثافة والضغط (وليست القوة) والحجم والمقاومة النوعية الحجمية هى كميات مقياسية أخرى . والجهد هو أيضا كمية مقياسية ، رغم أن التعبير المركب للجهد الجيبى ، وهو طريقة مصطنعة ، يُنتج مقياسيا مركبا أو مطاورا ويتطلب تمثيله وجود عددين حقيقيين مثل الاتساع ، وزاوية الطور ، أوجزء حقيقى وجزء تخيلى .

تتكون الكمية المتجهة من مقدار[1] ، واتجاه فى الفراغ . وسوف ينحصر اهتمامنا فى الفراغ الثنائى أو الثلاثى البعد فقط ، ولكن فى التطبيقات الأكثر تقدما قد تُعرف المتجهات فى فراغ له n من الأبعاد . القوة والسرعة والعجلة والخط المستقيم من الطرف الموجب الى السالب لبطارية شحن هى أمثلة للمتجهات . وكل كمية منها تعين بكل من المقدار والاتجاه .

وسوف نهتم أساسا بالمجالات المقياسية والمتجهة . ويُعرف المجال (المقياسى أو المتجه) رياضيا كدالة مالذلك المتجه الذى يصل نقطة اصل اختيارية الى نقطة عامة فى الفراغ . وعادة ما يمكننا ربط تأثير فيزيائى بالمجال مثل القوة على إبرة بوصلة فى مجال الأرض المغناطيسى أو حركة ذرات الدخان فى المجال المعرف بالسرعة الاتجاهية للهواء فى منطقة ما من الفراغ . ولاحظ أن مفهوم المجال دائما يرتبط بمنطقة . وتعرف كمية ماعند كل نقطة فى منطقة . وكل من المجالات المقياسية والمتجهة موجود . درجة الحرارة خلال قدر من الحساء ، أو الكثافة عند أى نقطة فى الأرض هى أمثلة للمجالات المقياسية . ومجال الجاذبية والمجال المغناطيسى للأرض وتدرج الجهد فى كابل وتدرُّج درجة الحرارة فى طرف كاوية لحام هى أمثلة للمجالات المتجهة . وتتغير قيمة المجال عامة مع الوضع والزمن .

وفى هذا الكتاب ، كما فى أغلب الكتب الأخرى التى تستخدم التدوين الاتجاهى ، سوف يميز المتجه بالخط الأسود مثل **A** . وتطبع المقياسيات بالخط المائل

(١) سوف نتبنى الاصطلاح القائل أن المقدار يدل على القيمة المطلقة ، وعليه فإن مقدار أى كمية تكون موجبة دائما .

مثل A . عند الكتابة بخط اليد العادى أو باستخدام آلة كاتبة ، فإنه من المعتاد أن يوضع خط أو سهم فوق الكمية المتجهة لنبين الخاصية الاتجاهية . (تحذير : هذا أول شرك . فإن الاهمال فى الرمز مثل حذف الخط أو السهم رمز المتجه هو السبب الرئيسى للأخطاء فى تحليل المتجهات) .

١ - ٢ جبر المتجهات :

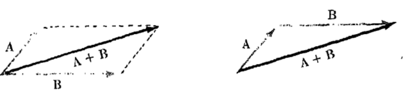
بعد الانتهاء من تعريف المتجهات والمجالات المتجهة ، يمكن أن نستمر لتعريف قواعد حساب المتجهات وجبر المتجهات ، وفيما بعد حساب التفاضل والتكامل للمتجهات . وسوف تكون بعض القواعد مشابهة لجبر المقياسيات وبعضها مختلف قليلا ، والبعض الآخر سيكون جديدا تماما وغير معتاد عليه . هذا من المتوقع ، حيث أن المتجه يمثل معلومات أكثر مما تمثله الكمية المقياسية ، وحاصل ضرب متجهين ، على سبيل المثال ، سيكون أكثر تعقيدا من ضرب مقياسيين .

والقواعد هى تلك الخاصة بفرع من الرياضيات راسخ القواعد والكل يلعب بنفس القواعد . ونحن طبعا سوف نقوم بمجرد النظر الى هذه القواعد ونفسرها . ولكن من المشجع أن نحسب أنفسنا روادا فى هذا المجال . فسنعمل قواعد خاصة بنا ، كما يمكننا أن نعمل قواعد نرغب فيها . المطلب الوحيد هو أن تكون القواعد غير متناقضة . وبالطبع فمن المستحسن أن تتفق القواعد مع جبر المقياسيات كلما أمكن ذلك ، والأحسن إذا مكنتنا هذه القواعد من حل قليل من المسائل العملية .

ولايجب أن يسقط الشخص فى مصيدة « عبادة الجبر » ويعتقد أن قواعد الجبر التى تُدرس بالكليات قد أنزلت على الانسان عند بدء الخليقة . إن هذه القواعد مجرد تتابع منطقى بالغ الفائدة . وهناك أنواع من الجبر أقل شيوعا ولكن بقواعد مختلفة كلية . ففى الجبر البولينى حاصل الضرب AB يمكن أن يكون فقط إما واحدا ، أو صفرا . ولجبر المتجهات قواعده الخاصة به ، ويجب أن نكون دائما على حذر من الدوافع الفكرية المسلطة علينا من قواعد جبر المقياسيات الأكثر شيوعا .

ويتبع جمع المتجهات قانون متوازى الأضلاع . وهذا يمكن أن يتم بيانيا ، إذا لم نتطلب الدقة . ويبين الشكل ١ - ١ جمع متجهين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$. ويُرى بسهولة أن : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ أى أن جمع المتجهات يتبع قانون التبادل . وأيضا يتبع جمع المتجهات قانون التجميع

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$



شكل ١ ـ ١ يمكن جمع متجهين بيانيا إما برسم كلا المتجهين من نقطة أصل مشتركة ، واستكمال متوازى الأضلاع ، أو ببدء المتجه الثانى من رأس الأول واستكمال المثلث ، وكلتا الطريقتين يمكن تعميمها بسهولة الى ثلاثة متجهات أو أكثر .

لاحظ أنه عندما يرسم المتجه كسهم ذى طول محدود ، فإن موضعه يعرف بأنه عند طرف ذيل السهم .

وبالنسبة للمتجهات المشتركة المستوى ، أى التى تقع فى مستوى واحد كالمبينة فى الشكل ١ ـ ١ ، والتى تقع كلها فى مستوى الورقة ، فيمكن جمعها بالتعبير عن كل متجه بدلالة مركبة أفقية ، ومركبة رأسية وجمع المركبات المتناظرة .

ويمكن بالمثل جمع المتجهات فى الأبعاد الثلاثة بالتعبير عنها بدلالة ثلاثة مركبات ، وجمع المركبات المتناظرة . وستعطى أمثلة لتلك الطريقة فى الجمع بعد مناقشة مركبات المتجه فى القسم ١ ـ ٤ .

وتنتج قاعدة طرح المتجهات بسهولة من قاعدة الجمع حيث أننا يمكننا أن نعبر دائما عن $\mathbf{A - B}$ فى الصورة $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ حيث انعكست اشارة واتجاه المتجه الثانى ، وبعد ذلك يضاف هذا المتجه الى الأول باستخدام قاعدة جمع المتجهات .

ويمكن ضرب المتجهات بالمقياسيات . وتتغير قيمة المتجهة ولايتغير اتجاهه عندما يكون المقياسى موجبا بينما ينعكس الاتجاه عندما تضرب بمقياسى سالب . ويتبع ضرب المتجه بمقياسى قانونى التجميع والتوزيع للجبر ، مما يؤدى الى

$$(r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B} + s\mathbf{A} + s\mathbf{B}$$

وقسمة متجه على مقياسى ليست الا ضربا بمقلوب ذلك المقياسى .

وسيناقش ضرب متجه بمتجه فى القسمين ١ ـ ٦ و ١ ـ ٧ .

ويقال إن المتجهين متساويين إذا كان الفرق بينهما صفرا ، أو $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ إذا كان $\mathbf{A} - \mathbf{B} = 0$.

وفى استخدامنا للمجالات المتجهة سنجمع دائما ونطرح المتجهات المُعرفة عند نفس النقطة . وعلى سبيل المثال سيتبين لنا أن المجال المغناطيسى الكلى حول حدوة مغناطيسية صغيرة هو مجموع المجالات الناتجة من الأرض والمغناطيس الدائم ، والمجال الكلى عند أى نقطة هو مجموع كلا المجالين المفردين عند تلك النقطة .

ولكن إذا لم نكن بصدد مجال متجه فيمكننا أن نجمع أو نطرح المتجهات غير المعرفة عند نفس النقطة . فمثلا مجموع قوة الجاذبية المؤثرة على رجل وزنه ١٥٠ ثقل باوند عند القطب الشمالى ، وعلى رجل وزنه ١٧٥ ثقل باوند عند القطب الجنوبى يمكن الحصول عليها بنقل كل من متجهى القوة الى القطب الجنوبى قبل الجمع . والمحصلة هى قوة ٢٥ ثقل باوند موجهه لمركز الأرض عند القطب الجنوبى . وإذا أردنا أن تكون صعبة ، فنستطيع أن نصف القوة كذلك أنها ٢٥ ثقل باوند موجهة خارجة من مركز الأرض (أو الى أعلى) عند القطب الشمالى[1] .

١ ـ ٣ نظام الاحداثيات الكرتيزية :

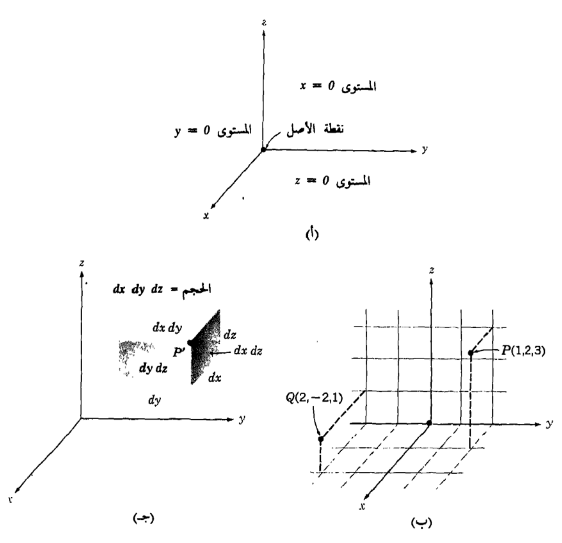
لكى نصف متجها بدقة ، فيجب إعطاء أطوال خاصة واتجاهات وزوايا ومساقط ، أو مركبات وهناك ثلاثة طرق بسيطة لعمل ذلك ، وحوالى ثمانية أو عشرة طرق أخرى مفيدة فى حالات خاصة جدا . وسنكتفى باستخدام الطرق الثلاثة البسيطة ، وأكثرها بساطة هو نظام الاحداثيات الكرتيزية ، **أو الاحداثيات المتعامدة** .

فى نظام الاحداثيات الكرتيزية نقيم ثلاثة محاور إحداثية متعامدة على بعضها البعض ونسميها المحاور x , y و z . ومن المعتاد اختيار نظام إحداثيات يمينى ، والذى فيه دوران (خلال الزاوية الأصغر) المحور x الى المحور y سيسبب تقدم بريمة يمينية فى اتجاه المحور z . وباستخدام اليد اليمنى فان الابهام والسبابة والأوسط يمكن أن تطابق المحاور x , y و z بالترتيب . ويوضح الشكل ١ ـ ٢ أ نظام إحداثيات كرتيزى يمينى .

وتوقع النقطة بإعطاء إحداثياتها x , y و z . وهذه هى الأبعاد من نقطة الأصل الى تقاطعات الأعمدة الساقطة من النقطة على المحاور x , y و z بالترتيب . وكطريقة أخرى لشرح قيم الاحداثيات ، وكطريقة تناظر تلك التى يجب أن تستخدم فى كل نظم الاحداثيات الأخرى ، هى أن نعتبر النقطة كنقطة تقاطع ثلاثة أسطح ، وهى المستويات $x =$ ثابت ، $y =$ ثابت و $z =$ ثابت والثوابت هى قيم إحداثيات النقطة .

ويوضح شكل ١ ـ ٢ ب النقطتين P و Q اللتين لهما الاحداثيات $(1 , 2 , 3)$ و $(2 , -2 , 1)$ بالترتيب . وعليه فان النقطة P تقع عند نقطة الالتقاء المشتركة بين المستويات $x = 1$, $y = 2$ و $z = 3$ بينما تقع النقطة Q عند ملتقى المستويات $x = 2$, $y = -2$ و $z = 1$.

(١) قد أشار بعضهم الى أن القوة يمكن أن توصف عند خط الاستواء بأنها موجهة شماليا وهو على حق (ولكن الكافى يكفى)



شكل ١ ـ ٢(أ) نظام احداثيات كرتيزى يمينى . اذا مثلت الأصابع المقوسة لليد اليمنى الاتجاه الذى يدور فيه المحور x لكى ينطبق على المحور y فان الابهام يبين اتجاه المحور z . (ب) موقعا النقطتين $P(1, 2, 3)$ و $Q(2, -2, 1)$. (جـ) عنصر الحجم التفاضلى فى الاحداثيات الكرتيزية حيث dy , dx و dz تفاضلات مستقلة .

وأثناء تعرضنا لنظم الاحداثيات الأخرى فى القسمين ١ ـ ٨ و ١ ـ ٩ يجب أن نتوقع نقطا يتحدد موقعها بالتقاطع المشترك لثلاثة أسطح ، ليست بالضرورة مستويات ، ولكنها مازالت متعامدة على بعضها البعض عند نقطة التقاطع .

إذا تخيلنا ثلاثة مستويات متقاطعة عند نقطة عامة P ، إحداثياتها x , y و z ، فيمكن أن نزيد قيمة كل إحداثى بمقدار تفاضلى لنحصل على ثلاثة مستويات مزاحة قليلا عند النقطة P' ، إحداثياتها $x + dx$, $y + dy$ و $z + dz$. وتحدد المستويات الستة متوازى سطوح قائم حجمه هو $dv = dx\ dy\ dz$ والأسطح لها المساحات التفاضلية

ds وقيمها $dx\ dy$, $dy\ dz$ و $dz\ dx$. وأخيرا فان المسافة dL من P الى P' هى قطر متوازى الأسطح وطولها $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$. والحجم التفاضلى موضح بشكل ١ ـ ٢ جـ ، وفيه نقطة P' مبينة ولكن نقطة P تقع عند الركن الوحيد غير المرئى .

كل ذلك معروف من حساب المثلثات أو الهندسة الفراغية ويشمل حتى الآن كميات مقياسية فقط . وسنبدأ بشرح المتجهات بدلالة نظام للإحداثيات فى القسم التالى .

١ ـ ٤ مركبات المتجه ووحدات المتجهات :

لكى نصف متجها فى الاحداثيات الكرتيزية ، دعنا نعتبر متجها $\mathbf{r}$ ممتدا للخارج من نقطة الأصل . وكطريقة منطقية لتحديد هذا المتجه هى إعطاء ثلاث مركبات متجهة تقع فى اتجاه المحاور الاحداثية ، والتى يكون مجموعها بالضرورة هو المتجه المعطى . فإذا كانت المركبات المتجهة للمتجه $\mathbf{r}$ هى $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ فان $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$. والمركبات المتجهة مبينة فى شكل ١ ـ ٣أ . وبدلا من متجه واحد ، فلدينا الآن ثلاثة ، ولكن ذلك خطوة الى الأمام ، لأن المتجهات الثلاثة ذات طبيعة بسيطة ، فكل منها موجه دائما فى اتجاه أحد المحاور الإحداثية .

وبتعبير آخر : فان المركبات المتجهة لها مقادير تعتمد على المتجه المعطى (مثل $\mathbf{r}$ آنفا) ، ولكن كل منها لها اتجاه معروف وثابت . ويوحى هذا باستخدام وحدات متجهات مقدارها الوحدة ، بالتعريف ، وموجهة فى موازاة المحاور الاحداثية فى اتجاه زيادة قيم الاحداثيات . وسنحتفظ بالرمز $\mathbf{a}$ لوحدة المتجه ونحدد اتجاه وحدة المتجه برمز سفلى مناسب . وعلى ذلك فان $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ و $\mathbf{a}_z$ هى وحدات المتجهات فى نظام الاحداثيات الكرتيزية [1] . وهى موجهة فى اتجاه المحاور x , y و z بالترتيب كما هو مبين فى شكل ١ ـ ٣ ب .

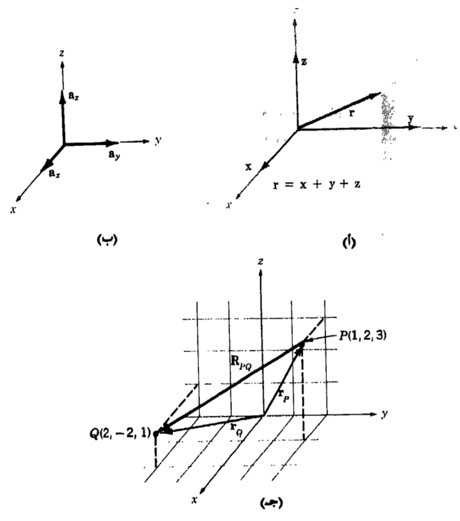
فإذا حدث أن كانت للمركبة المتجهة y وحدتين فى المقدار وموجهة فى إتجاه زيادة y ، فيجب حينئذ أن تكتب $y = 2\mathbf{a}_y$. وبالنسبة لمتجه $\mathbf{r}_P$ موجه من نقطة الأصل الى النقطة $P(1 , 2 , 3)$ فانه يكتب $\mathbf{r}_P = \mathbf{a}_x + 2\ \mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$. والمتجه من P الى Q يمكن الحصول عليه بتطبيق قاعدة جمع المتجهات . وهذه القاعدة تشير الى أن المتجه من نقطة الأصل الى P بالاضافة الى المتجه من P الى Q يساوى المتجه من نقطة الأصل الى Q . ولذا يكون المتجه المطلوب من $P(1 , 2 , 3)$ الى $Q\ (2 , -2 , 1)$ هو

(١) تستخدم الرموز $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ أيضا علامة لوحدات المتجهات فى الاحداثيات الكرتيزية .

$$\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (2-1)\mathbf{a}_x + (-2-2)\mathbf{a}_y + (1-3)\mathbf{a}_z$$
$$= \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$$

والمتجهات $\mathbf{r}_P$, $\mathbf{r}_Q$ و $\mathbf{R}_{PQ}$ مبينة فى شكل ١ ـ ٣ جـ .

هذا المتجه الأخير لايمتد خارجا من نقطة الأصل مثل المتجه $\mathbf{r}$ الذى اعتبرناه فى البداية . ومع ذلك فقد تعلمنا أن المتجهات التى لها نفس المقدار ، والتى تشير الى نفس الاتجاه متساوية ، ولذا نرى أنه لكى نساعد طرق تصورنا فان لنا حرية نقل أى متجه الى نقطة الأصل قبل تعيين مركباته الاتجاهية . وطبعا يجب أن نحافظ على التوازى أثناء عملية النقل .



شكل ١ ـ ٣(أ) المركبات المتجهة $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ للمتجه $\mathbf{r}$. (ب) وحدات المتجهات لنظام الاحداثيات الكرتيزية لها مقدار الوحدة وتوجه فى اتجاه زيادة متغيراتها الخاصة بها . (جـ) المتجة $\mathbf{R}_{PQ}$ يساوى الفرق الاتجاهى $\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$.

وإذا كنا نناقش قوة متجهة F ، أو بالأحرى أى متجه غير متجه إزاحى مثل r ، فستظهر مشكلة استخدام حروف مناسبة للمركبات الاتجاهية الثلاثة . ولن يجدى أن نسميهم x ، y و z لأنهم إزاحات أو مسافات موجهة وهى تقاس بالأمتار (وتختصر m) أو أى وحدة أطوال أخرى . وغالبا ما نتحاشى هذه المشكلة باستخدام مركبات مقياسية أو ببساطة المركبات F_x , F_y و F_z .

وتكون المركبات هى المقادير بإشارتها لمتجهات المركبات . وحينئذ يمكننا كتابة $\mathbf{F} = F_x \mathbf{a}_x + F_y \mathbf{a}_y + F_z \mathbf{a}_z$ وتكون متجهات المركبات هى $F_x \mathbf{a}_x$, $F_y \mathbf{a}_y$ و $F_z \mathbf{a}_z$.

وعلى ذلك فيمكن كتابة أى متجه B فى الصورة $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$ ومقدار B ، ويكتب |B| ، أو ببساطة B ، ويعطى بـ

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \qquad (١)$$

وكل من نظم الاحداثيات الثلاث التى نناقشها سيكون لها وحدات متجهة أساسية ومتعامدة على بعضها تستخدم لتحليل أى متجه الى مركباته المتجهة . ولكن وحدات المتجهات ليست مقصورة على هذا التطبيق . وغالبا ما تكون امكانية كتابة وحدة المتجه فى اتجاه محدد مفيدة . وهذا يمكن عمله ببساطة ، حيث أن وحدة المتجه فى اتجاه معطى ، هو مجرد متجه فى ذلك الاتجاه ، مقسوم على مقداره . فوحدة المتجه فى اتجاه r هى $\mathbf{r}/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، ووحدة المتجه فى اتجاه المتجه B هى

$$\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \qquad (٢)$$

وعلى سبيل المثال ، فوحدة المتجه الموجه من نقطة الأصل الى النقطة $G(2, -2, -1)$ يمكن الحصول عليها بتحديد ما يلى : أولا متجه G ممدود من نقطة الأصل الى $G(2, -2, -1)$ ،

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

ثم إيجاد مقدار G ،

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

وأخيراً بالتعبير عن وحدة المتجه المطلوبة كناتج القسمة ،

$$\mathbf{a}_G = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} = \tfrac{2}{3}\mathbf{a}_x - \tfrac{2}{3}\mathbf{a}_y - \tfrac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

ويلزمنا رمز مميز خاص لوحدة المتجه بحيث تكون صفتها ظاهرة مباشرة . والرموز التى سبق استخدامها هى u_B , a_B , 1_B ، أو حتى b . وسوف نستخدم دائما الحرف الصغير a مع رمز سفلى مناسب .

(**ملحوظة** : فى كل الكتاب تظهر تمارين تدريبية تلى الأقسام التى يقدم فيها مبدأ جديد لكى يسمح للطالب باختبار فهمه أو فهمها للحقيقة الأساسية نفسها . والمسائل مفيدة فى اكتساب تعود على المصطلحات والأفكار الجديدة ويجب أن تحل جميعها . وتظهر مسائل أكثر عمومية فى آخر الفصول . وحلول المسائل التدريبية معطى بنفس ترتيب أجزاء المسألة) .

ت ١ ـ ١ ـ إذا أعطيت النقط الثلاث $A(2, -3, 1)$, $B(-4, -2, 6)$ و $C(1, 5, -3)$ ، أوجد : (أ) المتجه من A الى C ، (ب) وحدة المتجه من B الى A ، (جـ) المسافة من B الى C ، (د) المتجه من A الى منتصف الخط المستقيم الواصل من B الى C .

الاجابة : $-3.5a_x + 4.5a_y + 0.5a_z$; 12.45; $0.762a_x - 0.127a_y - 0.635a_z$; $-a_x + 8a_y - 4a_z$.

١ ـ ٥ المجال المتجه :

لقد تم تعريف المجال المتجه بأنه : دالة اتجاهية لمتجه الموضع . وعامة سيتغير مقدار واتجاه الدالة مع تحركنا خلال المنطقة ، ويجب تحديد مقدار الدالة الاتجاهية من قيم إحداثيات النقطة المعنية . وحيث أننا اعتبرنا فقط نظام الاحداثيات الكرتيزية ، فعلينا أن نتوقع أن المتجه سيكون دالة للمتغيرات x , y و z .

وإذا فحصنا سرعة الماء فى المحيط فى منطقة ما بالقرب من السطح حيث يكون المد والتيارات هامة ، فقد نقرر أن نمثلها بمتجه سرعة والتى تكون فى أى اتجاه حتى إلى أعلى أو الى أسفل . فإذا أخذ المحور z الى أعلى والمحور x فى اتجاه الشمال والمحور y الى الغرب ونقطة الأصل على السطح فيكون لدينا نظام إحداثيات يمينى ، ويمكننا كتابة متجه السرعة فى الصورة $v = v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z$ حيث كل من المركبات v_x , v_y و v_z قد تكون دالة للمتغيرات الثلاثة x , y و z . فاذا بُسطت المسألة بافتراض أننا فى جزء من « تيار الخليج » حيث يتحرك الماء شمالا فقط فان v_y و v_z يكونان أصفارا . ويمكن إضافة افتراضات تسهيلية أخرى ، إذا كانت السرعة متناقصة مع العمق وتتغير ببطء شديد كلما تحركنا شمالا ، جنوبا ، شرقا أو غربا . ويمكن أن يكون $v = 2e^{z/100}a_x$ تعبيراً مناسباً . فتكون السرعة 2 m /s (m /s تعنى مترا لكل ثانية) عند السطح والسرعة 0.368×2 أو 0.736 m / s عند عمق 100 m (أى $z = -100$) وتستمر السرعة فى التناقص مع العمق ، وفى هذا المثال لمتجه السرعة اتجاه ثابت .

وبينما المثال السابق بسيط نوعا وهو تقريب كبير لحالة فيزيائية ، فان أى تعبير أكثر دقة سيكون بالتبعية أكثر تعقيداً وصعوبة فى التعليل . وسنواجه كثيرا من المجالات فى دراستنا للكهربية والمغناطيسية أبسط من مثال السرعة ، حيث كانت فيه مركبة واحدة ومتغير واحد (المركبة x والمتغير z) . وسندرس أيضا مجالات أكثر تعقيدا ، وحينئذ سنناقش طرقا لشرح هذه الصيغ فيزيائيا .

ت ١ ـ ٢ ـ مجال متجه معطى بـ $\mathbf{W} = 4x^2y\mathbf{a}_x - (7x + 2z)\,\mathbf{a}_y + (4xy + 2z)^2\mathbf{a}_z$ (أ) مامقدار المجال عند النقطة $P(2\,,-3\,,4)$ ؟ . (ب) إعط وحدة المتجه التى تبين اتجاه المجال عند P . (جـ) عند أى نقطة أو نقط على المحور z يكون مقدار W مساوياً للوحدة ؟ .

الاجابة : $53.4\ ;\ -0.899\mathbf{a}_x - 0.412\mathbf{a}_y + 0.150\mathbf{a}_z\ ;\ \pm 0.455$.

١ ـ ٦ الضرب بالنقطة :

سنبحث الآن الطريقة الأولى من طريقتين لضرب المتجهات . وستُناقش الطريقة الثانية فى القسم التالى .

إذا أعطينا متجهين A , B فان **الضرب بالنقطة أو الضرب المقياسى** يُعرف بأنه حاصل ضرب مقدار A ومقدار B وجيب تمام الزاوية الصغرى بينهما ،

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta_{AB}} \qquad (٣)$$

وتظهر النقطة بين المتجهين ، ويجب أن تكون ثقيلة للتأكيد . والضرب بالنقطة أو الضرب المقياسى هو كمية مقياسية كما تدل عليه إحدى التسميتين ، وينطبق عليه قانون التبادل .

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}} \qquad (٤)$$

لأن إشارة الزاوية لاتؤثر على حد جيب التمام . ويقرأ A.B « A نقطة B » .

ربما يكون التطبيق الأكثر انتشاراً لحاصل الضرب بالنقطة هو فى الميكانيكا ، حيث تعمل قوة ثابتة F طوال إزاحة مستقيمة L قدراً من الشغل $FL\cos\theta$ ، والتى من الأسهل أن تكتب F.L . ويمكن أن نعطى مسبقا إحدى نتائج الفصل الرابع بالاشارة الى أنه اذا تغيرت القوة على طول المسار فإن التكامل يكون ضروريا لايجاد الشغل الكلى ، وتصبح النتيجة

الشغل = $\int \mathbf{F}.d\mathbf{L}$.

ويمكن أن يؤخذ مثال آخر من المجالات المغناطيسية ، وهو موضوع سنقول حوله الكثير فيما بعد . التدفق الكلى Φ الذى يعبر سطحا مساحته S يعطى بـBS إذا كانت كثافة التدفق المغناطيسى B عمودية على السطح ومنتظمة عليه . ونحن نعرف سطحا متجها S على أن له مقدارا بقدر المساحة المعتادة ، وله اتجاه عمودى على السطح (مع تجنب مشكلة اختيار أى من العمودين الممكنين حاليا) . وحينئذ يكون التدفق الذى يعبر السطح هو B.S . وهذا التعبير صالح لأى اتجاه لكثافة التدفق المغناطيسى المنتظم . ولكن إذا كانت كثافة التدفق ليست ثابتة على السطح ، فان التدفق الكلى يكون $\Phi = \int \mathbf{B}.d\mathbf{S}$ وستظهر تكاملات بهذه الصورة العامة فى الفصل الثالث .

إن إيجاد الزاوية بين متجهين فى الفراغ الثلاثى الأبعاد غالباً ما يكون عملا نفضل تحاشيه ، ولهذا السبب فان تعريف الضرب بالنقطة عادة لايستخدم فى صيغته الأساسية . ويمكن الحصول على نتيجة أكثر نفعا باعتبار متجهين تعطى مركباتهما الكرتيزية مثل $\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$. وينطبق قانون التوزيع أيضا على الضرب بالنقطة ، ولذلك ، فان A.B يعطى مجموع تسعة حدود مقياسية ، يشمل كل منها حاصل الضرب بالنقطة لوحدتى متجهين . وحيث أن الزاوية بين أى وحدتى متجهين مختلفتين فى نظام الإحداثيات الكرتيزية هو 90 فاننا نحصل على

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y = 0$$

ما الحدود الثلاثة المتبقية ، فتشمل حاصل الضرب بالنقطة لوحدة متجه مع نفسها ، وهى الوحدة ، وتعطى فى النهاية

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \quad (٥)$$

وهو تعبير لايحتوى زوايا .

وإذا ضرب متجه فى نفسهٔ مقياسيا يعطى مقداره مربعا ، أو

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2} \quad (٦)$$

وأى وحدة متجه مضروبة مقياسيا فى نفسها تعطى الوحدة ،

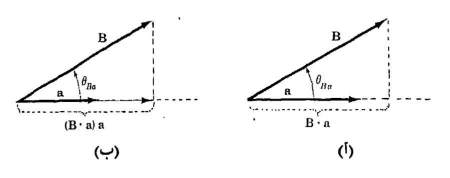
$$\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_A = 1$$

وأحد التطبيقات الكبيرة الأهمية للضرب بالنقطة هو ايجاد مركبة متجه فى اتجاه معين . وبالرجوع الى شكل ١ ـ ٤أ ، يمكننا ايجاد المركبة (المقياسية) للمتجه B فى الاتجاه المحدد بوحدة المتجه a كما يلى :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}|\,|\mathbf{a}| \cos \theta_{Ba} = |\mathbf{B}| \cos \theta_{Ba}$$

وتكون إشارة المركبة موجبة إذا كان $\theta_{Ba} < 90°$ ، وسالبة إذا كان $90° < \theta_{Ba} \leq 180°$

ولكى نوجد المركبة المتجهة لـ B فى اتجاه a . فاننا ببساطة نضرب المركبة (المقياسية) فى a ، كما هو موضح فى شكل ١ ـ ٤ب . فمثلا ، مركبة B فى اتجاه a_x هى $B.a_x = B_x$ والمركبة المتجهة هى $B_x a_x$ أو $(B.a_x)a_x$.



شكل ١ ـ ٤ ـ (أ) المركبة (المقياسية) للمتجه B فى اتجاه وحدة المتجه a هى B.a (ب) المركبة المتجهة لـ B فى اتجاه وحدة المتجه a هى (B.a)a

وعلى ذلك ، فان مشكلة إيجاد مركبة متجه فى أى اتجاه مرغوب تؤول الى مشكلة إيجاد وحدة المتجه فى هذا الاتجاه ، وذلك يمكننا عمله .

والتعبير الهندسى **مسقط** يستخدم أيضا مع الضرب بالنقطة . أى أن B.a هو مسقط B فى اتجاه a .

ت ١ ـ ٣ ـ إذا أعطيت $F = 2a_x - 5a_y - 4a_z$ و $G = 3a_x + 5a_y + 2a_z$. أوجد : (أ) F.G ؛ (ب) الزاوية بين F و G ؛ (جـ) طول مسقط F على G (د) المسقط المتجه لـ F على G .

الاجابة : -27.0 ؛ $130.8°$ ؛ 4.38 ؛ $-2.13a_x - 3.55a_y - 1.42a_z$

١ ـ ٧ الضرب بعلامة ×

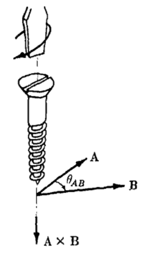
سنُعرف **الضرب بعلامة × أو الضرب الاتجاهى** لمتجهين معطيين A و B ، ويكتب بوضع علامة × بين المتجهين بالصورة $A \times B$ وتقرأ « A فى B » . وحاصل الضرب الاتجاهى $A \times B$ هو متجه ، مقداره يساوى حاصل ضرب مقدارى A و B وجيب الزاوية الصغرى بين A و B ، واتجاهه عمودى على المستوى الذى يشمل A و B وعلى امتداد أحد العمودين الممكنين ، والذى يكون فى اتجاه تقدم بريمة يمينية عندما يدور A إلى اتجاه B . وهذا الاتجاه موضح فى شكل ١ ـ ٥ ونذكر أن أيا من المتجهين

يمكن تحريكه كما تريد مع بقاء اتجاهه ثابتا الى أن يكون للمتجهين « نقطة أصل مشتركة » . وهذا يحدد المستوى الذى يحتويهما . ومع ذلك ، فان أغلب تطبيقاتنا ستتعلق بمتجهات معرفة عند نفس النقطة .

وكمعادلة يمكننا كتابة

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta_{AB}} \qquad (٧)$$

حيث مازال من المطلوب نص إضافى ، مثل ذلك المعطى آنفا ، لشرح اتجاه وحدة المتجه $\mathbf{a}_N$. والرمز السفلى يقوم مقام « عمودى » .



شكل ١ ـ ٥ اتجاه $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ هو اتجاه تقدم بريمة يمينية عندما يدار A إلى B .

وعكس ترتيب المتجهين A و B يعطى وحدة متجه فى الاتجاه المضاد ، ونرى أن حاصل الضرب الاتجاهى ليس تبادلياً ، لأن $(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

وإذا طُبق تعريف حاصل الضرب الاتجاهى على وحدات المتجهات $\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_y$ نرى أن $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ لأن كل متجه مقداره الوحدة والمتجهين متعامدين ، ودوران $\mathbf{a}_x$ إلى $\mathbf{a}_y$ يدل على الاتجاه الموجب لـ z بتعريف نظام الاحداثيات اليمينى . وبالمثل : $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$. لاحظ التماثل الأبجدى . وطالما أن المتجهات الثلاثة $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ و $\mathbf{a}_z$ مكتوبة بالترتيب (وبفرض أن $\mathbf{a}_x$ يلى $\mathbf{a}_z$ ، كثلاثة أفيال فى دائرة يمسك كل منها ذيل سابقه ، يمكننا كتابة $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{a}_x$ أو $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_y$) فانه يمكن وضع علامة × وعلامة التساوى فى أى من الفراغين الخاليين . وكأمر حقيقى فان من الأسهل الآن تعريف نظام إحداثيات كرتيزى يمينى بقول أن $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$.

وكمثال بسيط على استخدام الضرب الاتجاهى يمكن أخذه من الهندسة أو حساب المثلثات . فلإيجاد مساحة متوازى الأضلاع فان حاصل ضرب طولى ضلعين متجاورين يضرب بجيب الزاوية بينهما . وباستخدام الرموز المتجهة للضلعين ، فيمكننا التعبير عن المساحة (المقياسية) كمقدار $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ أو $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

ويمكن استخدام الضرب الاتجاهى ليحل محل قاعدة اليد اليمنى المألوفة لدى كل مهندسى الكهرباء . اعتبر القوة على موصل مستقيم طوله L ، حيث اتجاه L يناظر اتجاه التيار المستمر I مع وجود مجال مغناطيسى منتظم كثافة تدفقه B وباستخدام رموز المتجهات ، يمكننا كتابة النتيجة فى الصورة $\mathbf{F} = I\,\mathbf{L} \times \mathbf{B}$. وسنحصل على هذه العلاقة فيما بعد فى الفصل التاسع .

من الواضح يحتاج إيجاد حاصل الضرب الاتجاهى بواسطة تعريفه مجهودا أكثر من إيجاد حاصل الضرب المقياسى من تعريفه ، فليس فقط علينا إيجاد الزاوية بين المتجهين ، ولكن علينا إيجاد تعبيرا لوحدة المتجه $\mathbf{a}_n$. ولكن هذا المجهود يمكن تفاديه باستخدام المركبات الكرتيزية للمتجهين A و B وفك حاصل الضرب الاتجاهى كمجموع تسعة حواصل ضرب اتجاهية أكثر سهولة ، كل منها يشمل وحدتى متجهين ،

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = &A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z\\ &+ A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z\\ &+ A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

ولقد وجدنا أن $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$ ويتبع أن : $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$. والثلاثة حدود المتبقية أصفارا ، لأن حاصل الضرب الاتجاهى لأى متجه فى نفسه هو صفر ، حيث أن الزاوية المحصورة تساوى صفرا . ويمكن جمع هذه النتائج لتعطى

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{a}_z \qquad (٨)$$

أو بكتابتها كمحددة فى صورة يمكن تذكرها بسهولة أكثر ،

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}} \qquad (٩)$$

فاذا كان $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ ، فاننا نحصل على :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= [(-3)(5) - (1)(-2)]\mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)]\mathbf{a}_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\mathbf{a}_z$$

$$= -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z$$

ولأولئك الذين نسوا ، فان مفكوك المحددة مشروح فى الملحق الثانى للمرجع *1* المدرج فى آخر الفصل .

ت ١ ـ ٤ إذا كان $\mathbf{F} = -45\mathbf{a}_x + 70\mathbf{a}_y + 25\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{G} = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ أوجد : (أ) $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$ (ب) $\mathbf{a}_x \times (\mathbf{a}_y \times \mathbf{F})$ (جـ) $(\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) \times \mathbf{F}$ ، (د) وحدة متجه عمودى على كل من $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$.

الاجابة :

$\pm(0.669\mathbf{a}_x + 0.591\mathbf{a}_y - 0.451\mathbf{a}_z)$; $-70\mathbf{a}_x - 45\mathbf{a}_y$; $215\mathbf{a}_x + 190\mathbf{a}_y - 145\mathbf{a}_z$

١ ـ ٨ نظم إحداثيات أخرى : الاحداثيات الأسطوانية الدائرية :

إن نظام الإحداثيات الكرتيزية ، هو عامة ما يفضل الطالب حل جميع المسائل فيه . ولكن غالبا ما يعنى هذا شغلا أكثر للطالب حيث أن مسائل كثيرة لها نوع من التماثل يقتضى استخدام معالجة أكثر منطقية . ومن السهل أن نعمل الآن ، بصفة نهائية ، العمل المطلوب لنعتاد على الإحداثيات الأسطوانية والكروية بدلا من بذل جهد مساو أو أكثر لكل مسألة تشمل تماثلا اسطوانيا أو كرويا فيما بعد . ومع وضع هذا التوفير فى الجهد المستقبلى فى أذهاننا ، سنلقى نظرة متأنية وبعناية على الإحداثيات الأسطوانية والكروية .

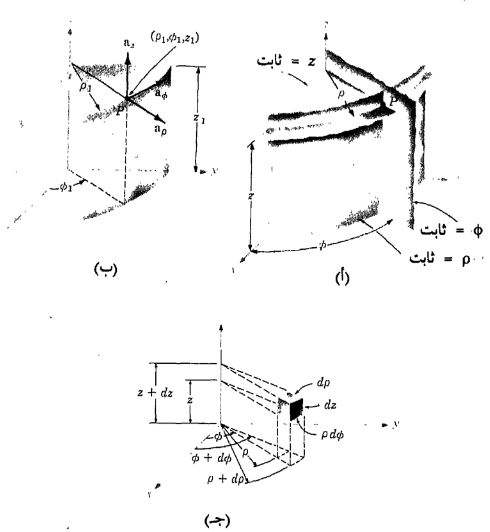
ونظام الإحداثيات الأسطوانية الدائرية ، هو الصورة فى الأبعاد الثلاثة للاحداثيات القطبية فى الهندسة التحليلية . ففى الاحداثيات القطبية ذات البعدين وُقعت النقطة فى مستوى باعطاء مسافتها ρ من نقطة الأصل ، والزاوية ϕ بين الخط الواصل من النقطة الى نقطة الأصل ، وبين خط نصف قطرى اختيارى ، مأخوذ ليكون $\phi = 0$ [1] . ويمكن

---

(١) المتغيران فى الاحداثيات القطبية غالبا ما يسميان r و θ . ولكن الأكثر شيوعا فى الاحداثيات الثلاثة هو أن نستخدم ρ للمتغير النصف قطرى فى الاحداثيات الاسطوانية و r للمتغير النصف قطرى (المختلف عنه) فى الاحداثيات الكروية . وكذلك فان المتغير الزاوى فى الاحداثيات الاسطوانية عادة يسمى ϕ لأن الكل يستخدم θ لزاوية مختلفة فى الاحداثيات الكروية . والزاوية ϕ مشتركة بين كل من الاحداثيات الاسطوانية ، والكروية .

الحصول أيضا على نظام إحداثيات ثلاثى الأبعاد ، وهو الأحداثيات الأسطوانية الدائرية ، بتحديد المسافة z للنقطة من مستوى اختيارى $z = 0$ كمستوى إسناد عمودى على الخط $\rho = 0$ وللتبسيط فاننا عادة نشير للإحداثيات الأسطوانية الدائرية ببساطة كإحداثيات أسطوانية . وسوف لايسبب ذلك أى ارتباك فى قراءة هذا الكتاب ، ولكن من الانصاف أن نشير الى أن هناك نظما مثل الإحداثيات الأسطوانية الناقصية المقطع ، والإحداثيات الأسطوانية زائدية المقطع ، والإحداثيات الاسطوانية مكافئية المقطع وغيرها .

لم نعد نقيم ثلاثة محاور كما فى الإحداثيات الكرتيزية ، ولكن يجب بدلا من ذلك أن نعتبر أى نقطة كتقاطع ثلاثة أسطح متعامدة معاً . وهذه الأسطح هى أسطوانة دائرية



شكل ١ ـ ٦ ـ (أ) الأسطح الثلاثة المتعامدة فيما بينها فى نظام الاحداثيات الأسطوانية الدائرية . (ب) وحدات المتجهات الثلاثة فى نظام الاحداثيات الأسطوانية الدائرية . (جـ) وحدة الحجم التفاضلية فى نظام الاحداثيات الأسطوانية الدائرية ، $d\rho$, $\rho d\phi$ و dz كلها عناصر أطوال .

(ρ = ثابت) ومستوى (ϕ = ثابت) ومستوى آخر (z = ثابت) . وهذا يناظر تعيين نقطة في نظام الإحداثيات الكرتيزية بتقاطع ثلاثة مستويات (x = ثابت ، y = ثابت و z = ثابت) .
الأسطح الثلاثة للاحداثيات الأسطوانية الدائرية مبينة فى شكل ١ - ٦أ . لاحظ أن ثلاثا من هذه الأسطح يمكن إمرارها بأى نقطة إلا إذا وقعت على المحور z حيث يكفى مستوى واحدا فى هذه الحالة .

ويجب أيضا تعريف ثلاث وحدات لمتجهات ، ولكن لم نعد نوجهها فى موازاة المحاور الإحداثية لأن مثل هذه المحاور توجد فقط فى الاحداثيات الكرتيزية . وبدلا من ذلك نأخذ نظرة أوسع لوحدات المتجهات فى الاحداثيات الكرتيزية وتحقق أنها موجودة فى اتجاه زيادة قيم الاحداثيات ، وأنهم متعامدون على السطح الذى يكون فيه قيمة ذلك الاحداثى ثابتة ، أى أن وحدة المتجه $\mathbf{a}_x$ عمودى على المستوى x = ثابت ، ويتجه نحو القيم المتزايدة لـ x . وبطريقة مناظرة ، يمكننا أن نُعرف الآن وحدات المتجهات فى الإحداثيات الأسطوانية $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\phi$ و $\mathbf{a}_z$.

وحدة المتجه $\mathbf{a}_\rho$ عند نقطة $P(\rho_1, \phi_1, z_1)$ تكون فى اتجاه نصف القطر للخارج عمودية على السطح الأسطوانى $\rho = \rho_1$. وتقع فى المستويات $\phi = \phi_1$ و $z = z_1$. ووحدة المتجه $\mathbf{a}\phi$ عمودية على المستوى $\phi = \phi_1$ ، وتشير فى اتجاه تزايد ϕ ، وتقع فى المستوى $z = z_1$ مماسة للسطح الأسطوانى $\rho = \rho_1$. ووحدة المتجه $\mathbf{a}_z$ مثل وحدة المتجه $\mathbf{a}_z$ فى نظام الاحداثيات الكرتيزية . ويبين شكل ١ - ٦ ب وحدات المتجهات الثلاثة فى الاحداثيات الأسطوانية .

وحدات المتجهات فى الاحداثيات الكرتيزية ليسوا دوال فى الاحداثيات ولكن اثنين من وحدات المتجهات فى الاحداثيات الاسطوانية ، $\mathbf{a}_\rho$ و $\mathbf{a}_\phi$ ، تتغيران فعلا مع الاحداثى ϕ لأن اتجاهيهما يتغيران . ولذا يجب عند التكامل أو التفاضل بالنسبة لـ ϕ ألا نعامل $\mathbf{a}_\rho$ و $\mathbf{a}_\phi$ كثوابت .

ومرة أخرى ، وحدات المتجهات متعامدة على بعضها البعض ، لأن كلا منها عمودى على أحد الأسطح الثلاثة المتعامدة فيما بينها ، ويمكننا أن نعرف نظام إحداثيات أسطوانى يمينى بأنه ذلك الذى فيه $\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$ ، أو (لأولئك الذين لديهم أصابع مرنة) إنه الذى فيه الابهام والسبابة والأوسط يشيرون فى اتجاه زيادة ρ , ϕ و z بالترتيب .

ويمكن الحصول على عنصر حجم تفاضلى فى الاحداثيات الأسطوانية بزيادة ρ , ϕ و z بزيادات تفاضلية $d\rho$, $d\phi$ و dz . الأسطوانتان ذواتا نصفى القطرين ρ و $\rho + d\rho$

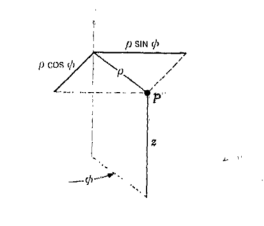
والمستويان نصفا القطرين عند الزاويتين ϕ و $\phi + d\phi$ والمستويان الأفقيان عند الارتفاعين z و $z + dz$ تحصر الآن حجما صغيرا كما هو مبين بالشكل (١ - ٦ جـ) له شكل أسفين مبتور . وعندما يصبح عنصر الحجم صغيرا جدا يقترب شكله من متوازى مستطيلات له جوانب أطوالها $d\rho$, $\rho d\phi$ و dz . ولاحظ أن $d\rho$ و dz لهما أبعاد أطوال ، أما $d\phi$ فليست كذلك ، ولكن $\rho d\phi$ هو طول . والأسطح لها المساحات $d\rho dz$, $\rho d\rho d\phi$ و $\rho d\phi\ dz$ ويصبح الحجم هو $\rho d\rho d\phi dz$

وبسهولة ترتبط المتغيرات فى نظامى الاحداثيات الكرتيزية والأسطوانية معا . وبالرجوع الى شكل ١ - ٧ نرى أن

$$x = \rho \cos \phi$$
$$y = \rho \sin \phi \qquad (١٠)$$
$$z = z$$

ومن وجهة النظر الأخرى فيمكننا التعبير عن المتغيرات الأسطوانية بدلالة x ; y و z

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (\rho \geq 0)$$
$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \qquad (١١)$$
$$z = z$$



شكل ١ - ٧ العلاقة بين المتغيرات الكرتيزية x , y و z ومتغيرات الاحداثيات الاسطوانية ρ , ϕ و z . ليس هناك تغير فى المتغير z بين النظامين

سنعتبر أن المتغير ρ موجب أو صفر ، ولذا استخدمنا الاشارة الموجبة فقط للجذر فى (١١) . والقيمة الصحيحة للزاوية ϕ تحدد بفحص أشارات x و y . فاذا كان $x = -3$ و $y = 4$ نجد أن النقطة تقع فى الربع الثانى ، ولذا فان $\rho = 5$ و $\phi = 126.9°$. وبالنسبة الى $x = 3$ و $y = -4$ نجد $\phi = 53.1°$ أو $\phi = 306.9°$ ، أيهما مناسب أكثر .

باستخدام (١٠) أو (١١) تحول بسهولة الدوال المقياسية المعطاة فى نظام أحداثيات الى النظام الآخر .

إلا أن الدالة الاتجاهية فى إحدى نظم الاحداثيات تتطلب خطوتين ، لكى نحولها إلى نظام إحداثى آخر ، لأن ذلك يتطلب عامة مجموعة مركبات متجهة مختلفة . أى أننا قد نعطى متجها كرتيزيا .

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

حيث كل مركبة معطاة كدالة فى x , y و z ونحتاج متجها فى الاحداثيات الأسطوانية

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$$

حيث كل مركبة معطاة كدالة فى ρ , ϕ و z .

ولكى نوجد أى مركبة مرغوبة لمتجه ، فنتذكر من مناقشة حواصل الضرب المقياسى أن مركبة فى اتجاه معين يمكن الحصول عليها بضرب المتجه مقياسيا بوحدة المتجه فى الاتجاه المطلوب وعلى ذلك

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho \qquad \text{و} \qquad A_\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi$$

وبفك حواصل الضرب هذه نحصل على

$$A_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho \qquad (١٢)$$

$$A_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \qquad (١٣)$$

$$\text{و} \quad A_z = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z = A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = A_z \qquad (١٤)$$

لأن $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho$ و $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi$ تساوى أصفارا .

ولكى نستكمل تحويل المركبات ، فمن الضرورى معرفة حواصل الضرب القياسية $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi$ و $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi$ وبتطبيق تعريف الضرب المقياسى نجد ونحن بصدد وحدات متجهة أن النتيجة هى مجرد جيب تمام الزاوية بين وحدتى المتجهين المعنيين . وبالرجوع الى شكل (١ - ٧) نتبين أن الزاوية بين $\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_\rho$ هى ϕ وعليه $\mathbf{a}_x . \mathbf{a}_\rho = \cos \phi$ ، ولكن الزاوية بين $\mathbf{a}_y$ و $\mathbf{a}_\rho$ هى $90^\circ - \phi$ و $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos (90^\circ - \phi) = \text{som}\ \phi$. وحواصل الضرب المقياسية المتبقية بين الوحدات المتجهة يمكن إيجادها بطريقة مماثلة والنتائج مجدولة كدالة فى ϕ فى الجدول ١٠ - ١ .

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

جدول ١ ـ ١ الضرب المقياسى لوحدات المتجهات فى نظامى الاحداثيات الاسطوانية والكرتيزية

وعلى ذلك : فان تحويل المتجهات من الاحداثيات الكرتيزية الى الأسطوانية أو العكس يُنجز باستخدام (١٠) أو (١١) لتغيير المتغيرات ، وباستخدام حاصل الضرب المقياسى لوحدات المتجهات المعطاة فى جدول ١ ـ ١ لتغيير المركبات . ويمكن أخذ الخطوتين بأى ترتيب .

كمثال ، دعنا نحول المتجه $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ الى الإحداثيات الأسطوانية . المركبات الجديدة هى

$$B_\rho = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho)$$
$$= y\cos\phi - x\sin\phi = \rho\sin\phi\cos\phi - \rho\cos\phi\sin\phi = 0$$
$$B_\phi = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi)$$
$$= -y\sin\phi - x\cos\phi = -\rho\sin^2\phi - \rho\cos^2\phi = -\rho$$

على ذلك
$$\mathbf{B} = -\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$$

ت ١ ـ ٥ ـ إذا أعطيت $P(\rho = 6, \phi = 125^\circ, z = -3)$ و $Q(x = 3, y = -1, z = 4)$ أوجد المسافة من : (أ) P إلى نقطة الأصل ، (ب) Q عموديا على المحور z (جـ) P إلى Q .

الاجابة $11.20;\ 3.16;\ 6.71$

ت ١ ـ ٦ (أ) عبر عن المجال الحرارى $T = 240 + z^2 - 2xy$ فى الاحداثيات الأسطوانية . (ب) أوجد الكثافة عند $P(-2, -5, 1)$ إذا كانت الكثافة هى : $e^{-z}(2 + \rho^3\cos^2\phi)$

الاجابة : $240 + z^2 - \rho^2\sin 2\phi\ ;\ 8.66$.

ت ١ ـ ٧ ـ (أ) عبر عن المجال المتجه $\mathbf{W} = (x-y)\mathbf{a}_y$ فى الاحداثيات الاسطوانية (ب) أعط المجال $\mathbf{F}$ فى الاحداثيات الكرتيزية إذا كان $\mathbf{F} = \rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho$

الاجابة : $\rho(\cos\phi - \sin\phi)(\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi)\ ;\ (x/\sqrt{x^2+y^2})(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$

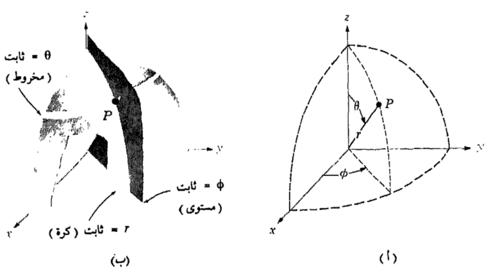
١ ـ ٩ نظام الاحداثيات الكروية :

ليس لدينا نظام إحداثيات ذو بعدين ليساعدنا على فهم نظام الاحداثيات الكروية الثلاثى الأبعاد ، كما هو لدينا فى نظام الاحداثيات الاسطوانية الدائرية . وفى نواح معينة يمكننا الاستعانة بمعلوماتنا عن نظام خطوط العرض وخطوط الطول المستخدم فى إيجاد مكان على سطح الأرض ، ولكننا عادة نعتبر فقط نقطا على السطح وليست تحت أو فوق الأرض .

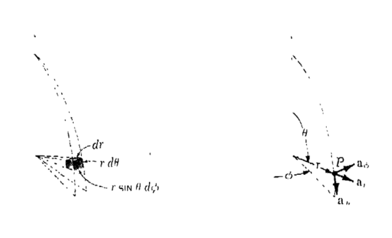
دعنا نبدأ ببناء نظام إحداثيات كروى على المحاور الكرتيزية الثلاثة (شكل ١ ـ ٨أ) . نعرف أولا المسافة من نقطة الأصل إلى أى نقطة على أنها r السطح r = ثابت هو كرة .

الاحداثى الثانى هو زاوية θ بين المحور z والخط المرسوم من نقطة الأصل الى النقطة المعنية . السطح θ = ثابت هو مخروط ، والسطحان ، المخروط والكرة ، متعامدان على طول خط تقاطعهما ، وهو دائرة نصف قطرها $r \sin \theta$. الاحداثى θ يناظر زاوية خط العرض إلا أن زاوية خط العرض مقاسة من خط الاستواء بينما θ مقاسة من « القطب الشمالى » .

الاحداثى الثالث ϕ هو زاوية أيضا وهو بالضبط نفس الزاوية ϕ فى الاحداثيات الأسطوانية ، وهى الزاوية بين المحور x والمسقط فى المستوى $z = 0$ للخط المرسوم من نقطة الأصل الى النقطة . وهى تناظر زاوية خط الطول ، ولكن الزاوية ϕ تزيد فى اتجاه « الشرق » . السطح ϕ = ثابت هو مستوى مار بالخط $\theta = 0$ (أو المحور z) .



(ب) (أ)



شكل ١ ـ ٨ (أ) الاحداثيات الكروية الثلاث . (ب) الأسطح الثلاثة المتعامدة مع بعضها فى نظام الاحداثيات الكروية . (جـ) وحدات المتجهات الثلاثة فى الاحداثيات الكروية $a_r \times a_\theta = a_\phi$. (د) عنصر الحجم التفاضلى فى نظام الاحداثيات الكروية .

ويجب علينا ثانية أن نعتبر أى نقطة كتقاطع ثلاثة أسطح متعامدة مع بعضها : كرة ومخروط ومستوى ، وكل منها موجه بالكيفية المشروحة سابقا . والأسطح الثلاثة مبينة فى شكل ١ ـ ٨ب .

وثانية يمكن تعريف ثلاث وحدات متجهة عند أى نقطة . كل وحدة متجه تكون متعامدة على أحد الأسطح المتعامدة مع بعضها وموجهة فى الاتجاه الذى يزيد فيه الاحداثى . فوحدة المتجه a_r تكون فى اتجاه نصف القطر للخارج عمودية على الكرة r = ثابت وتقع فى المخروط θ = ثابت والمستوى ϕ = ثابت ووحدة المتجه a_θ عمودية على السطح المخروطى ، وتقع فى المستوى مماسة للكرة . وهى موجهة فى اتجاه « خط طول » مشيرا « إلى الجنوب » . أما وحدة المتجه الثالث a_ϕ فهى نفسها مثل الاحداثيات الاسطوانية ، وتكون عمودية على المستوى ومماسة لكل من المخروط والكرة . وهى موجهة إلى « الشرق » .

ووحدات المتجهات الثلاث موضحة فى شكل ١ ـ ٨جـ . وهى بطبيعة الحال متعامدة مع بعضها ، ويحدد نظام احداثيات يمينى بجعل $a_r \times a_\theta = a_\phi$. يظهر فحص شكل ١ ـ ٨جـ ، بتطبيق تعريف الضرب الاتجاهى ، أن نظامنا يمينى . وتستخدم قاعدة اليد اليمنى فى تطابق الابهام والسبابة والوسطى لاتجاهات زيادة r , θ و ϕ على الترتيب (لاحظ أن التطابق فى الاحداثيات الاسطوانية كان مع ρ , ϕ و z ، وفى الاحداثيات الكرتيزية مع y , x و z) .

ويمكن إنشاء عنصر حجم تفاضلى فى الاحداثيات الكروية بزيادة r , θ و ϕ بمقادير dr , $d\theta$ و $d\phi$ كما هو مبين فى شكل (١ ـ ٨د) . والمسافة بين

السطحين الكرويين ذوى نصفى القطرين r و $r + dr$ هى dr والمسافة بين المخروطين اللذين لهما الزاويتان الراسمتان θ و $\theta + d\theta$ هى $rd\theta$، والمسافة بين المستويين النصف قطريين عند الزاويتين ϕ , $\phi + d\phi$ يمكن اثبات أنها $r \sin \theta d\phi$ بعد فكر سريع لحساب المثلثات . والأسطح لها مساحات $rdrd\theta$; $r\sin \theta\, drd\phi$ و $r^2 \sin \theta\, d\theta d\phi$ والحجم هو $r^2 \sin\theta\, drd\theta\, d\phi$

وتحويل المقياسيات من نظام الاحداثيات الكرتيزية الى الكروية يمكن إيجاده بسهولة باستخدام شكل ١ ـ ٨أ لربط مجموعتى المتغيرات :

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$
$$y = r \sin \theta \sin \phi \qquad (١٥)$$
$$z = r \cos \theta$$

بينما التحويل فى الاتجاه العكسى يُنجز بمساعدة

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (r \geq 0)$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (0° \leq \theta \leq 180°) \qquad (١٦)$$
$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

المتغير النصف قطرى r غير سالب ، وتنحصر θ بين $0°$ و $180°$ متضمنة . وتقع الزوايا فى الأرباع الصحيحة بفحص إشارات x , y و z .

ويتطلب تحويل المتجهات تحديد حواصل ضرب وحدات المتجهات فى الاحداثيات الكرتيزية والكروية . وسنستنتج هذه الحواصل من شكل ١ ـ ٨ جـ وبقدر من حساب المثلثات . وحيث أن حاصل الضرب المقياسى لأى وحدة متجه كروى مع وحدة متجه كرتيزية هى مركبة المتجه الكروى فى اتجاه المتجه الكرتيزى فان حواصل الضرب مع $\mathbf{a}_z$ هى

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

وحواصل الضرب المقياسى المشتملة على $\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_y$ تتطلب أولا : اسقاط وحدة المتجه الكروية على المستوى xy ، ثم الاسقاط على المحور المطلوب . فمثلا $\mathbf{a}_r.\mathbf{a}_x$ يمكن الحصول عليه باسقاط $\mathbf{a}_r$ على المستوى xy ، معطيا $\sin \theta$ ، ثم إسقاط $\sin \theta$ على المحور x والتى تعطى $\sin \theta \cos \phi$. وحواصل الضرب المقياسية الأخرى توجد بكيفية مماثلة وكلها معطاة فى جدول ١ ـ ٢ .

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

جدول ١ـ ٢ حواصل الضرب المقياسية لوحدات المتجهات فى نظامى الاحداثيات الكروية والكرتيزية

ويمكن توضيح طريقة التحويل باعتبار المتجه $\mathbf{G} = (xz/y)\,\mathbf{a}_x$. نوجد المركبات الكروية الثلاث بضرب G مقياسيا مع وحدة المتجه المناسب مع تغيير المتغيرات أثناء العملية :

$$G_r = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\sin\theta\cos\phi$$

$$= r\sin\theta\cos\theta\,\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G_\theta = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\cos\theta\cos\phi$$

$$= r\cos^2\theta\,\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G_\phi = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}(-\sin\phi)$$

$$= -r\cos\theta\cos\phi$$

ويجمع هذه النتائج نحصل على

$$\mathbf{G} = r\cos\theta\cos\phi(\sin\theta\cot\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\cot\phi\,\mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)$$

ويصف الملحق (أ) نظم الاحداثيات المنحنية الخطوط العامة ومنها نظم الاحداثيات الكرتيزية والاسطوانية الدائرة والكروية كحالات خاصة . والقسم الأول من هذا الملحق يمكن الآن التمعن فيه جيدا .

ت ١ـ ٨ ـ إذا أعطيت $P(r=6,\ \theta=110^\circ,\ \phi=125^\circ)$ و $Q(x=3,\ y=-1,\ z=4)$ أوجد المسافة من (أ) Q إلى نقطة الأصل ، (ب) P الى المستوى $y=0$ ، (جـ) P الى Q .

الاجابة : $10.35 ; 4.62; 5.10$

ت ١ ـ ٩ ـ (أ) عبر عن المجال الحرارى $T = 240 + z^2 - 2xy$ فى الاحداثيات الكروية . (ب) أوجد الكثافة عند $P(-2, -5, 1)$ إذا كانت الكثافة هى $re^{-r/2}(5 + \cos\theta + \sin\theta \cos\phi)$

الاجابة : $1.706 ; 240 + r^2(\cos^2\theta - \sin 2\phi \sin^2\phi)$

ت ١ ـ ١٠ ـ (أ) عبر عن المجال المتجه $\mathbf{W} = (x + y)\mathbf{a}_y$ فى الاحداثيات الكروية .
(ب) اعط المجال F فى الاحداثيات الكرتيزية اذا كانت $\mathbf{F} = r\cos\phi\,\mathbf{a}_r$

الاجابة :

$$r\sin\theta(\cos\phi - \sin\phi)[\sin\phi(\sin\theta\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\,\mathbf{a}_\theta) + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi];$$
$$(x/\sqrt{x^2 + y^2})(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)$$

مراجع مقترحة :

1 - Grossman, S.I. "Calculus" Academic Press, New York, 1977.

يناقش جبر المتجهات فى أجزاء من الفصول الخامس عشر الى السابع عشر ، ونظم الاحداثيات الثلاث التى نستخدمها مشروحة فى الفصل السابع عشر .

2 - Purcell, E.J. : "Calculus with Analytic Geometry", 3rd ed., Appleton-Century-Crofts, New York, 1978.

يغطى الفصل السادس عشر من هذا المدخل لحساب التفاضل والتكامل جبر المتجهات المناقش فى هذا الفصل . وبعض حساب التفاضل والتكامل للمتجهات موجود فى الفصل الثامن عشر .

3 - Spiegel, M.R. : "Vector Analysis", Schaum Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

عدد كبير من الأمثلة والمسائل مع أجوبتها مزود فى هذا العضو المختصر والرخيص من سلسلة موجزة .

4 - Thomas, G.B., Jr., and R.L. Finney : "calculus and Analytic Geometry," 5th ed. Addison - Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1979.

يناقش جبر المتجهات ونظم الاحداثيات الثلاث التى نستخدمها فى الفصل الحادى عشر . كما يناقش أيضا عمليات أخرى على المتجهات فى الفصلين الثالث عشر والخامس عشر .

مسائل

١ ـ إذا أعطيت المتجهين $A = -6a_x + 2a_y - 4a_z$ و $B = 4a_x + 3a_y - 2a_z$ أوجد (أ) وحدة متجه فى اتجاه $A + 2B$ (ب) مقدار $A + 2B$ (جـ) المتجة C بحيث أن $A + B + C = 0$

٢ ـ الرؤوس الثلاثة لمثلث تقع عند :
$A(-1, 2,5)$, $B(-4, -2, 3)$ و $C(1, 3, -2)$. (أ) أوجد طول محيط المثلث .
(ب) أوجد وحدة المتجه الموجه من منتصف الضلع AB الى منتصف الضلع BC .
(جـ) اثبت أن وحدة المتجه هذه مضروبة بكمية مقياسية يساوى المتجه من A الى C وبالتالى فان وحدة المتجه هذه توازى الضلع AC .

٣ ـ المتجهان $A = 4a_x + 5a_y - 2a_z$ و $B = 2a_x + 8a_y + 3a_z$ ممثلان بقطع خطية متجهة ممتدة خارجة من نقطة الأصل لنظام احداثيات كرتيزى . (أ) ماهى المسافة بين رأسى هذين المتجهين ؟ (ب) أوجد وحدة المتجه فى اتجاه A (جـ) أوجد المتجه C الموازى لـ A وله طول B

٤ ـ (أ) أوجد مركبات المتجه B إذا كان $|B| = 2$ و $a_B = 0.5a_x - 0.4a_y + na_z$ ، حيث a_B وحدة المتجه فى اتجاه B و n كمية مقياسية أكبر من الصفر . (ب) إذا كان $C = 8a_x - 3a_y - c_z a_z$ حدد c_z بحيث يكون $|C - a_x - a_y - a_z|$ أقل ما يمكن .

٥ ـ مجال السرعة لغاز معطى بالصورة $V = 5(x\, a_x + y a_y + z a_z) / (x^2 + y^2 + z^2 + 2)$.
أوجد عند النقطة $P(-2, 3, 1)$: (أ) مقدار السرعة . (ب) وحدة المتجه المحددة لاتجاهها . (جـ) عين معادلة السطح الذى عليه قيمة السرعة تساوى الوحدة .

٦ ـ مجال اتجاهى معين معطى بـ

$$A = \frac{100(x - y + z)}{x^2 + y^2 + z^2} a_x - xyz a_y + 8(x + y - z) a_z$$

بالنسبة للمسافة $0 \leqslant x \leqslant 10$ على الخط $y = 1$ و $z = 2$. إرسم رسما تخطيطيا لتغير : (أ) A_x مع x (ب) $|A|$ مع x .

٧ ـ إذا كانت $G = (2x - y)a_x + (4y + z)a_y + (4x - 2z)a_z$. (أ) عين وحدة المتجه الذى يبين اتجاه G عند $P(1, 1, 1)$. (ب) اين يكون اتجاه G مثل اتجاه المتجه $a_x + a_y + a_z$؟

٨ ـ مجال مقياسى معطى بـ $T = 2xy - 5z$ (أ) أوجد المجال المتجه :
$S = (\delta T / \delta x)\, a_x + (\delta T / \delta y) ay + (\delta T / \delta z) a_z$. أوجد عند النقطة :
$P(1, 2, 3)$ (ب) T ; (جـ) S : (د) $|S|$; (هـ) a_s

٩ ـ إذا أعطيت المجالات المتجهة $F = 2x^2 a_x - 4yz^2 a_y + 3(x + y - z) a_z$ و $G = (y a_x + z a_y + x a_z) / (x^2 + y^2 + z^2)$ أوجد : (أ) $|F(2, -1, 3)|$؛ (ب) $a_F(-1, 2, -2)$ ؛ (جـ) F.G عند $(2, -2, 4)$؛ (د) الزاوية بين F و Gعند $(2, -2, 4)$.

١٠ ـ دع $A = -2a_x + 3a_y + 5a_z$, $B = a_x + 3a_y - 4a_z$ و $C = 4a_x - 2a_y +$ a_z . (أ) أوجد مقدار A+ 3B . (ب) عين وحدة متجه فى اتجاه B — C . (جـ) عين المركبة المتجهة لـ C فى اتجاه B . (د) أوجد الزاوية بين A و C .

١١ ـ (أ) عين الزاوية بين $A_x a_x - 7a_y + 4a_z$ و $5a_x + 4a_y - 3a_z$ إذا كانت $A_x = 10$. كم يجب أن تكون قيمة A_x لكى تكون الزاوية : (ب) $90°$ ، (جـ) $62.1°$ ؟

١٢ ـ اذا أعطيت المتجهين $B = -6a_x - 8a_y + 9a_z$ و $C = 5a_x - 3a_y + 4a_z$ والنقطتين $P(1, 2, 3)$ و $Q(4, 0, -3)$ ، أوجد : (أ) B_1 و B_2 حيث : $B = B_1 + B_2$ و B_1 يوازى C ومتعامدا على B_2 (ب) الزاوية بين B والمتجه من P الى Q .

١٣ ـ اذا أعطيت $A = 3a_x - 4a_y + 5a_z$ و $B = -a_x + 2a_y - 3a_z$ ، أوجد : (أ) $A \times B$ ؛ (ب) $A.(A \times B)$ ؛ (جـ) $A \times (A \times B)$؛ (د) الزاوية بين A و B باستخدام تعريف أى من حاصل الضرب المقياسى والاتجاهى .

١٤ ـ دع , $A = -2a_x + 3a_y + 5a_z$ و $B = a_x + 3a_y - 4a_z$, و $C = 4a_x - 2a_y + a_z$. أوجد (أ) $A \times B$ ؛ (ب) $C.(A \times B)$ ، (جـ) $A.(B \times C)$ ؛ (د) وحدة المتجه العمودية على كل من B و C .

١٥ ـ النقط الثلاث $A(-1, 6, 2)$ و $B(2, 4, -3)$ و $C(4, 1, -5)$ تعرف مثلثا ومستويا . وبمعرفة أن المثلث هو نصف متوازى اضلاع ، أوجد : (أ) مساحة المثلث ؛ (ب) وحدة متجه عمودية على المستوى .

١٦ ـ دع متجهات تمتد من نقطة الأصل الى $A(4, 7, -5)$ و $B(2, -3, 6)$ وهذه المتجهات تحدد ضلعين لمتوازى اضلاع . (أ) عين أحداثيات النقطة C (الركن الرابع) . (ب) عين مساحة متوازى الأضلاع (ج) أوجد الزوايا الداخلية الأربع .

١٧ ـ عُبر عن متجه A عند نقطة $C(2, 30°, 5)$ فى الاحداثيات الاسطوانية بالصورة $20a_\rho - 30a_\phi + 10a_z$. (أ) أوجد $|A|$ عند C . (ب) أحسب المسافة من نقطة الأصل الى C . (جـ) أحسب الزاوية بين A عند C والسطح $\rho = 2$.

١٨ ـ متجهان معرفان عند نقطة معينة فى الاحداثيات الاسطوانية بالصورة :
$M = 5a_\rho - 8a_\phi + 3a_z$ و $N = -4a_\rho + 2a_\phi + 10a_z$. عين : (أ) M.N (ب) المركبة المقياسية لـ M فى اتجاه B (جـ) المركبة لـ M فى اتجاه N (د) $M \times N$ (هـ) وحدة متجه عمودية على كل من M و N .

١٩ ـ مجال متجه قوة معطى بـ $\mathbf{F} = 15\mathbf{a}_\rho + 12\mathbf{a}_\phi - 20\mathbf{a}_z$ عند $P(8,120,5)$. أوجد المركبة المتجهة لـ F التى : (أ) تتعامد على الاسطوانة $\rho = 8$ (ب) تمس الاسطوانة $\rho = 8$ ؛ (جـ) تمس المستوى $\phi = 120^\circ$. (د) أوجد وحدة المتجه العمودية على F وتمس الاسطوانة $\rho = 8$.

٢٠ ـ أسطح حجم مامحددة بـ $\rho = 5$ ، $\rho = 12$ و $\phi = 0.1\pi$, $\phi = 0.4\pi$ ، $z = -1$ و $z = 3$. (أ) أوجد طول الخط المستقيم الموصل قطريا ركنين متقابلين للحجم . (ب) أوجد مساحة كل من الأوجه الستة . (جـ) أوجد الحجم المحصور .

٢١ ـ مجال كهربى معطى بـ $\mathbf{E} = (50/\rho)\mathbf{a}_\rho - 4\mathbf{a}_z$. (أ) أوجد وحدة المتجه $\mathbf{a}_E$ فى مركبات كرتيزية عند $P(10, 20, 2)$. (ب) أعطى معادلة السطح الذى عليه $|\mathbf{E}| = 10$.

٢٢ ـ مجال متجه معطى بـ $\mathbf{G} = 10z\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho - 5_\rho \sin\phi\,\mathbf{a}_\phi + 4z\mathbf{a}_z$. (أ) أوجد $|\mathbf{G}(2,30^\circ,1.5)|$ (ب) أوجد $\mathbf{G}_T$ و $\mathbf{G}_N$ بمركبات اسطوانية إذا كان : $\mathbf{G} = \mathbf{G}_N + \mathbf{G}_T$ يوازى $\mathbf{a}_x$ وعمودى على $\mathbf{G}_N$ عند $(2,30^\circ,1.5)$.

٢٣ ـ نقطتان معرفتان فى الاحداثيات المتعامدة بـ $P(8,2,1)$ و $Q(-2, 7,4)$ (أ) أعط الاحداثيات الاسطوانية لكل من النقطتين . (ب) حدد المتجه الذى يمتد من P الى Q بمركبات اسطوانية عند P . (جـ) حدد المتجه الذى يمتد من Q الى P بمركبات اسطوانية عند Q . لاحظ أن النتيجة الأخيرة ليست السالب للنتيجة السابقة وذلك لأن $\mathbf{a}_\rho$ و $\mathbf{a}_\phi$ لهما اتجاهات مختلفة عند النقطتين .

٢٤ ـ عبر عن متجه C عند النقطة $K(r = 2, \theta = 30^\circ, \phi = 160^\circ)$ فى الاحداثيات الكروية بالصورة $\mathbf{C} = 20\mathbf{a}_r - 30\,\mathbf{a}_\theta + 10\mathbf{a}_\phi$. (أ) أوجد $|\mathbf{C}|$ عند K . (ب) أحسب المسافة من نقطة الأصل الى K . (جـ) احسب الزاوية بين C عند K والمخروط $\theta = 30^\circ$.

٢٥ ـ عرف متجهين عند نقطة P بالصورة $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_r - 3\mathbf{a}_\theta + 5\mathbf{a}_\phi$ و $\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_\theta + 3\mathbf{a}_\phi$ عين : (أ) F.G (ب) المركبة المقياسية لـ G فى اتجاه F عند P ، (جـ) المركبة المتجهة لـ G فى اتجاه F عند P ؛ (د) $\mathbf{G} \times \mathbf{F}$ ؛ (هـ) وحدة متجه عمودية على كل من F و G عند P .

٢٦ ـ يوجد عند النقطة $B(r = 5, \theta = 120^\circ, \phi = 75^\circ)$ مجال متجه قيمته : $\mathbf{A} = -12\mathbf{a}_r - 5\mathbf{a}_\theta + 15\mathbf{a}_\phi$. أوجد المركبة المتجهة لـ A والتى تكون : (أ) عمودية على السطح $r = s$ ؛ (ب) مماسة للسطح $r = 5$ ؛ (جـ) مماسة للمخروط $\theta = 120^\circ$ ؛ (د) أوجد وحدة المتجه التى تتعامد على A وتمس المخروط $\theta = 120^\circ$.

٢٧ ـ أسطح حجم معرفه بـ $r = 5$ و $r = 12$, $\theta = 20^\circ$ و $\theta = 80^\circ$ و $\phi = 0.1\,\pi$ و $\phi = 0.4\pi$. (أ) أوجد طول الخط المستقيم الذى يصل قطريا ركنين متقابلين للحجم . (ب) أوجد مساحة كل سطح من الأوجه الستة . (جـ) أوجد الحجم المحصور .

٢٨ ـ مجال معطى فى الاحداثيات الكروية بالصورة :
$\mathbf{F} = [\cos\theta / r^2]\,\mathbf{a}_r + [\sin\theta / r]\,\mathbf{a}_\theta$ (أ) عبر عن $\mathbf{F}$ بدلالة x , y , z , $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$.
(ب) أوجد قيمة $\mathbf{F}$ عند $(1 , 2 , 3)$.

٢٩ ـ إذا أعطيت النقطتين $P(4 , 7 , 3)$ و $Q(-3 , 6 , -5)$: (أ) عين موضع P فى الاحداثيات الاسطوانية ، (ب) عين موضع P فى الاحداثيات الكروية ؛ (جـ) عبر عن المتجه $\mathbf{R}_{PQ}$ بمركبات اسطوانية عند P .

٣٠ ـ حول المجال المتجه $\mathbf{A} = x\mathbf{a}_y$ إلى : (أ) الاحداثيات الاسطوانية ثم (ب) أوجد قيمته عند $P\,(2 , -5 , 3)$. (جـ) حول $\mathbf{A}$ الى الاحداثيات الكروية ، ثم (د) أوجد قيمته عند P

٣١ ـ عبر عن المجال المتجه $\mathbf{W} = (x^2 - y^2)\mathbf{a}_y + xz\mathbf{a}_z$ في : (أ) الاحداثيات الاسطوانية عند $P(\rho = 6 , \phi = 60^\circ , z = -4)$ ، (ب) الاحداثيات الكروية عند $Q\ (r = 4 , \theta = 30^\circ , \phi = 120^\circ)$.

الفصل الثانى

قانون كولوم وشدة المجال الكهربى

والآن وقد صغنا لغة جديدة فى الفصل الأول ، سوف نُرسى قليلا من المبادىء الأساسية فى الكهرباء ، ونحاول أن نصفها بدلالة هذه اللغة . فلوكنا قد استخدمنا حساب التفاضل والتكامل للمتجهات لعدة سنين ، ولدينا القليل من الأفكار الصحيحة عن الكهربية والمغناطيسية لاستطعنا التعمق وتقديم عديد من المعادلات متضمنة معادلات ماكسويل ، وقليلا من المعادلات المساعدة الأخرى ، ونمضى لنصفها فيزيائيا بفضل معلوماتنا عن تحليل المتجهات . وربما يكون هذا هو الطريق المثالى ، البدء بأكثر النتائج عمومية ، ثم نبين أن قوانين اوم وجاوس وكولوم وفاراداى وأمبير وبايوسافار وكيرشوف ، وقليل من القوانين الأخرى أقل تداولا هى جميعها حالات خاصة لهذه المعادلات . وإنه لمن المرضى فلسفيا أن يكون لدينا النتيجة الأكثر عمومية ، وأن نشعر أننا نستطيع الحصول على نتائج أى حالة خاصة نشاء . على أن مثل هذه القفزة قد تؤدى الى صيحات استغاثة كثيرة للمساعدة ، وليس بقليل من الطلبة الغارقين .

وبدلا من ذلك فسنقدم على فترات مناسبة القوانين التجريبية المذكورة آنفا ، معبرين عن كل باستخدام التدوين الاتجاهى ، وتستخدم هذه القوانين لحل عدد من المسائل البسيطة . وبهذه الطريقة فان اعتيادنا على كل من تحليل المتجهات ، والمجالات الكهربية والمغناطيسية سوف يزداد تدريجيا ، ومع الوقت نصل أخيرا الى عدة معادلات عامة ، سوف تحتاج لقليل من الشرح الاضافى .

وعندئذ يكون كل مجال النظرية الكهرومغناطيسية مفتوحا لنا ، ويمكننا أن نستخدم معادلات ماكسويل لشرح انتشار الموجات ، الاشعاع من الهوائيات ، الظاهرة السطحية أدلة الموجات وخطوط النقل ، وأنابيب الموجة المتنقلة وحتى للحصول على عمق نظر جديد لمحولات القوى العادية .

وفى هذا الفصل سنقصر إهتمامنا على المجالات الكهربية الاستاتيكية فى الفراغ أو الفضاء الحر . وهذه المجالات ، على سبيل المثال ، توجد فى نظم التركيز والانحراف فى أنابيب شعاع ـ الكاثود الكهروستاتيكية . ولجميع الأغراض العملية ، ستطبق نتائجنا أيضا فى الهواء والغازات الأخرى . وستدخل مواد أخرى فى الفصل الخامس بينما ستدخل المجالات المتغيرة مع الزمن فى الفصل العاشر .

وسنبدأ بوصف تجربة كمية أجريت فى القرن السابع عشر .

٢ ـ ١ ـ قانون كولوم التجريبى :

تبين السجلات من سنة ٦٠٠ ق . م . على الأقل أن هناك شواهد على معرفة الكهروستاتيكية . وكان الاغريق هم المسئولون عن تسمية « الكهرباء » المشتقة من تسميتهم للكهرمان ، وكانوا يقضون كثيرا من وقت فراغهم يدلكون جزءا صغيرا منه على أكمامهم ومراقبة كيف أنها بعد ذلك تلتقط قطعا من الوبر والنسيج . ولكن كان أغلب اهتمامهم فى الفلسفة والمنطق ، وليس فى العلم التجريبى ، ومضت عدة قرون قبل أن يعتبر تأثير الجذب شيئا آخر غير السحر أو قوة حياة .

ولقد كان الدكتور جلبرت ، طبيب صاحبة الجلالة ملكة انجلترا ، أول من قام بتجربة حقيقية لهذا التأثير وفى عام ١٦٠٠ أوضح أن الزجاج والكبريت والكهرمان ومواد أخرى ذكرها يمكنها « ليس فقط أن تجذب اليها القش والتبن ، بل كل المعادن والخشب وورق الشجر والحجر والأرضيات وحتى الماء والزيت » .

وبعد ذلك بقليل أجرى الكولونيل شارلس كولوم من مهندسى الجيش الفرنسى - وهو ضابط دقيق منظم الفكر - سلسلة تجارب مستفيضة مستخدما ميزان التواء حساس اخترعه بنفسه ، ليحدد كميا القوة المبذولة بين جسمين لكل منهما شحنة كهربية ساكنة . ونتائجه المنشورة معروفة الآن لكثير من طلبة المدارس الثانوية وتحمل تماثلا كبيرا مع قانون نيوتن للجاذبية (والذى اكتشف قبله بمائه عام) . وذكر كولوم أن القوة بين جسمين صغيرين جدا ، يفصلهما فى الفراغ أو الفضاء الحر مسافة كبيرة بالنسبة لمقاييسها ، تتناسب مع الشحنة على كل منهما وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة بينهما ، أو

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

حيث Q_1 و Q_2 الكميات الموجبة أو السالبة للشحنة و R هى المسافة بينهما و K ثابت تناسب . إذا استخدمنا نظام الوحدات الدولى (١) (SI) ، فان Q تقاس بالكولوم coulombs(C) ، R بالمتر meters ، والقوة يجب أن تكون بالنيوتون newtons (N) وسيتحقق ذلك إذا كتب ثابت التناسب K بالصورة

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

العامل 4π سيظهر فى مقام قانون كولوم ولكن لن يظهر فى المعادلات الأكثر فائدة (متضمنة معادلات ماكسويل) والتى سنحصل عليها بمساعدة قانون كولوم . والثابت

(١) نظام الوحدات الدولى (نظام م ك ث mks) مشروح فى الملحق (ب) . واختصارات الوحدات معطاة فى الجدول (ب ـ ١) . التحويلات الى نظم الوحدات الأخرى معطاة فى الجدول (ب ـ ٢) ، بينما البادئات التى تسمى قوى العشرة فى SI تظهر فى الجدول (ب ـ ٣) .

الجديد ϵ_0 يسمى سماحية الفضاء الحر ولها المقدار ، مقاس بالفاراد لكل متر farads per meter (F /m)

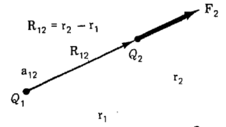
$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \qquad F/m \tag{1}$$

الكمية ϵ_0 ليست عديمة الأبعاد حيث أن قانون كولوم يظهر أن لها الوصف $C^2 / N.m^2$. وسوف نُعرف فيما بعد الفاراد ونُظهر أن له الأبعاد $C^2 / N . m$ ولقد سبقنا هذا التعريف باستخدام الوحدة F /m فى (١) آنفا .

ويكون قانون كولوم الآن

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{2}$$

وليست كل وحدات SI معروفة مثل الوحدات الانجليزية التى نستخدمها يوميا ، ولكنها أصبحت الآن معايير فى الهندسة الكهربية والفيزياء . والنيوتن وحدة قوة تساوى $0.2248 lb_f$ وهى القوة المطلوبة لاعطاء كتلة مقدارها واحد كيلو جرام (kg) عجلة قدرها متر واحد لكل ثانية لكل ثانية m /s^2 . والكولوم وحدة كبيرة جدا للشحنة ، لأن أصغر كمية شحنة معروفة وهى للاكترون (سالب) أو البروتون (موجب) قدرها : 1.60219×10^{-19} معطاة بوحدات mks ، وعلى ذلك فان شحنة سالبة مقدارها كولوم تمثل ما يقرب من 6×10^{18} الكترونا[1] . ويبين قانون كولوم أن القوة بين شحنتين كلا منهما مقدارها كولوم واحد يفصلهما متر هى $9 \times 10^9 N$ ، أومليون طن تقريبا .



شكل ٢ـ ١ إذا كان Q_1 و Q_2 لهما نفس الاشارة فان متجه القوة F_2 على Q_2 يكون فى نفس اتجاه المتجه R_{12}

وللالكترون كتلة عند السكون مقدارها $9.10956 \times 10^{-31} kg$ ونصف قطر ذى رتبة مقدار 3.8×10^{-15} m . ولايعنى هذا أن الالكترون كروى الشكل ، ولكن لمجرد استخدامه

(١) شحنة وكتلة الالكترون وغيرها من الثوابت الفيزيائية مجدولة فى الجدول (جـ ـ ٤) بالملحق (حـ)

لوصف حجم المنطقة التى فيها أكبر احتمال لوجود الكترون يتحرك ببطء . وكل الجسيمات المشحونة الأخرى متضمنة البروتون ، لها كتل أكبر وأنصاف أقطار أكبر وتشغل حجما احتماليا أكبر من الالكترون .

ولكى نكتب الصيغة المتجهة لمعادلة (٢) ، نحتاج الحقيقة الاضافية (المقدمة أيضا بالكولونيل كولوم) أن القوة تعمل على الخط الذى يصل الشحنتين وتكون طاردة إذا كانت الشحنتان متماثلتى الاشارة وجاذبة إذا كانتا متضادى الاشارة . دع المتجه $\mathbf{r}_1$ يعين موضع Q_1 بينما $\mathbf{r}_2$ يعين موضع Q_2 . فلذلك المتجه $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ يمثل الجزء الخطى الموجه من Q_1 الى Q_2 ، كما هو مبين فى شكل ٢ ـ ١ . والمتجه $\mathbf{F}_2$ هو القوة على Q_2 وهى مبينة فى حالة أن Q_1 و Q_2 لهما نفس الاشارة . والصيغة الاتجاهية لقانون كولوم هى

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12} \qquad (٣)$$

حيث $\mathbf{a}_{12}$ = وحدة متجه فى اتجاه $\mathbf{r}_{12}$ ، أو

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \qquad (٤)$$

وكمثال لاستخدام الصيغة الاتجاهية لقانون كولوم ، اعتبر شحنة مقدارها 3×10^{-4} C عند $p\ (1, 2, 3)$ وشحنة مقدارها -10^{-4}C عند $Q\ (2, 0, 5)$ فى فراغ فلذا

$$Q_1 = 3 \times 10^{-4} \qquad Q_2 = -10^{-4}$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2-1)\mathbf{a}_x + (0-2)\mathbf{a}_y + (5-3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3 \times 10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9} \times 9}\left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}\right)$$

$$= -30\left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}\right) \quad \text{N}$$

مقدار القوة هو 30 N (أو حوالى $7\ \text{lb}_f$) ، ويعين الاتجاه بوحدة المتجه ، والذى تُرك بين الأقواس ليظهر مقدار القوة . والقوة على Q_2 يمكن أيضا اعتبارها كثلاث مركبات قوى ،

$$\mathbf{F}_2 = -10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z$$

والقوة التى يُعبر عنها بقانون كولوم هى قوة متبادلة ، حيث أن كلا الشحنتين تؤثر عليها قوة لها نفس المقدار ، ولكن فى اتجاه متضاد . وكان يمكننا بالمثل كتابة

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12} \qquad (٥)$$

وقانون كولوم خطى ، لأننا إذا ضربنا Q_1 بعامل n فان القوة على Q_2 ستضرب أيضا فى نفس العامل n . وصحيح أيضا أن القوة على شحنة فى وجود عدة شحنات أخرى هى مجموع القوى على تلك الشحنة نتيجة كل من الشحنات الأخرى إذا أثرت بمفردها .

ت ٢ ـ ١ ـ شحنة نقطية $Q_1 = 2$ mC واقعة فى فضاء حر عند $P_1(-3, 7, -4)$ بينما $Q_2 = -5$mC عند $P_2(2, 4, -1)$. أوجد متجه القوة على : (أ) Q_2 ، (ب) Q_1 .

الاجابة :

$1.594\mathbf{a}_x + 0.956\mathbf{a}_y - 0.956\mathbf{a}_z$ KN ; $+1.594\mathbf{a}_x - 0.956\mathbf{a}_y + 0.956\mathbf{a}_z$KN .

٢ ـ ٢ ـ شدة المجال الكهربى :

إذا اعتبرنا الآن شحنة واحدة ثابتة المكان ، ولتكن Q_1 ، وحركنا شحنة ثانية ببطء حولها ، نلاحظ أنه يوجد هناك قوة فى كل مكان على هذه الشحنة الثانية ، وبتعبير آخر : فان هذه الشحنة الثانية تظهر وجود مجال قوة . وبتسمية هذه الشحنة الثانية شحنة اختبار ، Q_t ، فان القوة عليها تعطى بقانون كولوم

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a}_{1t}$$

وبكتابة هذه القوة كقوة لكل وحدة شحنات ،(٦)

$$\frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a}_{1t} \qquad (٦)$$

الكمية فى الطرف الأيمن للمعادلة (٦) دالة فى Q_1 وجزء الخط الموجه من Q_1 الى مكان شحنة الاختبار فقط . وهذه تصف مجالا متجها يسمى شدة المجال الكهربى .

ونعرف شدة المجال الكهربى بأنها : « متجه القوة على وحدة موجبة لشحنة اختبار » . ومع ذلك فاننا سوف لانقيسها عمليا بايجاد القوة على شحنة اختبار مقدارها 1C ، لأن ذلك من المحتمل أن يجعل القوة على Q_1 تغير وضع تلك الشحنة .

ويجب أن تقاس شدة المجال الكهربى بوحدات النيوتن لكل كولوم ، أى القوة لوحدة الشحنات . ومرة أخرى نبادر بكمية جديدة ذات أبعاد ، الفولت (V) the *volt* ، الذى سيقدم فى الفصل الرابع وله صفة الجول لكل كولوم (J /C) أو نيوتن ـ متر لكل كولوم (N.m / C) ، فاننا نقيس مباشرة شدة المجال الكهربى فى الوحدات العملية بالفولت لكل متر (V / m) . وباستخدام الحرف الكبير E لشدة المجال الكهربى نحصل أخيرا على

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t}} \qquad (٧)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a}_{1t} \qquad (٨)$$

المعادلة (٧) هى التعبير المعرف لشدة المجال الكهربى و(٨) هى التعبير عن شدة المجال الكهربى نتيجة شحنة نقطية واحدة Q_1 فى فراغ . وفى الأقسام التالية سنحصل على تعبيرات لشدة المجال الكهربى ونفسرها نتيجة لتنظيمات من الشحنة أكثر تعقيداً ، ولكن دعنا الآن نرى ما هى المعلومات التى يمكن الحصول عليها من (٨) ، أى من مجال شحنة نقطية واحدة .

أولا ـ دعنا نتخلص من أكثر الرموز السفلية فى (٨) مع الاحتفاظ بحقنا فى استخدامها فى أى وقت فيه احتمال لسوء الفهم :

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R} \qquad (٩)$$

ويجب أن نتذكر أن R هى مقدار المتجه R ، وهو جزء الخط الموجه من النقطة التى عندها Q الى النقطة المطلوب عندها E ، و $\mathbf{a}_R$ هى وحدة المتجه فى اتجاه R[١] .

(١) نريد بالتاكيد تجنب خلط r و $\mathbf{a}_r$ مع R و $\mathbf{a}_R$ فان الاثنين الأولين يرمزان بالذات لنظام الاحداثيات الكروية ، بينما R و $\mathbf{a}_R$ لا ينسبا لأى نظام احداثى ـ الاختيار مازال متاحا لنا .

دعنا نختار مكان Q_1 عند مركز نظام إحداثيات كروى . حينئذ تصبح وحدة المتجه $\mathbf{a}_R$ هى وحدة المتجه النصف قطرى $\mathbf{a}_r$ و R هى r . ومن ثم

$$(١٠) \quad \mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

أو

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

والمجال له مركبة واحدة نصف قطرية ، وعلاقة قانونها التربيعى العكسى واضحة تماما .

وفى الاحداثيات الكرتيزية يجب أن نكتب :

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_r = (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z) / \sqrt{x^2 = y^2 + z^2},$$

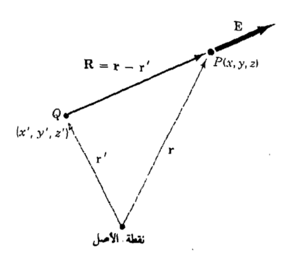
$\mathbf{R} = \mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ ، ولذا

$$(١١) \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{a}_z\right)$$

لم يعد هذا التعبير يظهر مباشرة الطبيعة البسيطة للمجال ، وتعقيده هو الثمن الذى ندفعه لحل مسألة لها التماثل الكروى فى نظام إحداثيات قد يكون لنا اعتياد أكثر عليه (مؤقتا) .

وبدون استخدام تحليل المتجهات يجب التعبير عن المعلومات الموجودة فى (١١) بثلاث معادلات : واحدة لكل مركبة ، ولكى نحصل على المعادلات يجب تقسيم مقدار شدة المجال الكهربى الى المركبات الثلاث بايجاد المسقط على كل محور إحداثيات . ولكن باستخدام التدوين الاتجاهى ، يتم ذلك تلقائيا عندما نكتب وحدة المتجه .

وإذا اعتبرنا شحنة ليست عند نقطة الأصل فى نظامنا الاحداثى ، فان المجال لم يعد له صيغة التماثل الكروى (ولا التماثل الاسطوانى ، إلا إذا وقعت الشحنة على المحور z) وعندئذ سيان أن نستخدم الاحداثيات الكرتيزية .



شكل ٢ ـ ٢ ـ المتجه $\mathbf{r}'$ يعين موقع الشحنة النقطية Q والمتجه $\mathbf{r}$ يعين نقطة عامة فى الفراغ $P(x, y, z)$ ، والمتجه $\mathbf{R}$ من Q إلى $P(x, y, z)$ هو لذلك $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

ولشحنة Q موضوعة عند نقطة المنبع $\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y + z'\mathbf{a}_z$ ، كما هو مبين فى شكل ٢ ـ ٢ ، نوجد المجال عند نقطة مجال عامة $\mathbf{r} = = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ بالتعبير عن $\mathbf{R}$ بـ $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ، ولذا

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (١٢)$$

$$= \frac{Q[(x-x')\mathbf{a}_x + (y-y')\mathbf{a}_y + (z-z')\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

وقد سبق أن عرفنا مجال متجه كدالة متجهة فى متجه الموضع وهذا يُؤكد عليه بجعل $\mathbf{E}$ يرمز لها بالتدوين الدالى بـ $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

المعادلة (١١) مجرد حالة خاصة لـ (١٢) حيث $x' = y' = z' = 0$

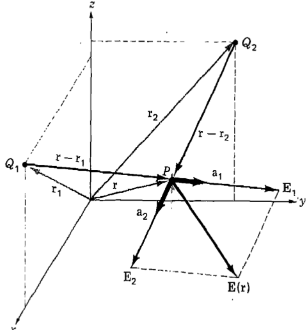
ت ـ ٢ ـ ٢ أوجد شدة المجال الكهربى عند $P(-4, 6, -5)$ فى فضاء حر الناتج عن شحنة 0.1 mC عند : (أ) نقطة الأصل ، (ب) $(2, -1, -3)$.

الاجابة : $-6.42\mathbf{a}_x + 7.49\mathbf{a}_y - 2.14\mathbf{a}_y$ ؛ $-5.32\mathbf{a}_x + 7.98\mathbf{a}_y - 6.65\mathbf{a}_z$ KV / m KV /m

٢ ـ ٣ ـ مجال n من الشحنات النقطية :

حيث أن القوى الكولومية خطية ، فان شدة المجال الكهربى نتيجة شحنتين نقطيتين Q_1 عند $\mathbf{r}_1$ و Q_2 عند $\mathbf{r}_2$ ، هى مجموع القوى على Q_t بسبب Q_1 و Q_2 عندما يعمل كل منهما على حدة ، أو

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r - r_1|^2} a_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r - r_2|^2} a_2$$



شكل ٢ ـ ٣ ـ أمكن الجمع الاتجاهى لشدة المجال الكهربى الكلى عند P الناتج عن Q_1 و Q_2 نتيجة خطية قانون كولوم .

حيث أن a_1 و a_2 هما وحدتا المتجهين فى اتجاه $(r - r_1)$ و $(r - r_2)$ بالترتيب . المتجهات r , r_1 , r_2 , $r - r_1$, $r - r_2$ و a_2 مبينة فى شكل ٢ ـ ٣ .

وإذا أضفنا شحنات أكثر عند مواضع أخرى ، فان المجال الناتج عن n من الشحنات النقطية يكون

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r - r_1|^2} a_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r - r_2|^2} a_2 + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |r - r_n|^2} a_n \quad (١٣)$$

وهذا التعبير يشغل حيزا أقل عندما نستخدم علامة التجميع Σ والعدد الصحيح الجمعى m الذى يأخذ كل القيم الصحيحة بين 1 و n .

$$E(r) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |r - r_m|^2} a_m \quad (١٤)$$

وعند فكها ، تكون (١٤) متطابقة مع (١٣) ، وعلى الطلبة غير المعتادين على علامة التجميع أن يحققوا تلك النتيجة .

ت ٢ - ٣ - شحنة نقطية $Q_1 = 2\mu C$ موضوعة عند $P(-3, 7, -4)$ فى فضاء حر ، بينما $Q_2 = -5\ \mu C$ عند $P_2 (2, 4, -1)$. أوجد عند النقطة $(12, 15, 18)$.
(أ) $\mathbf{E}$ ؛ (ب) E ، (جـ) $\mathbf{a}_E$

الاجابة :
$-0.356\mathbf{a}_x - 0.521\mathbf{a}_y - 0.776\mathbf{a}_z$; 54.7V/m ; $-19.5\mathbf{a}_x - 28.5\mathbf{a}_y - 42.4\mathbf{a}_z \text{V/m}$

ت ٢ - ٤ - أوجد قيم المجاميع : أ $\sum_{n=0}^{5} \frac{n}{n^3+1}$ ، ب $\sum_{m=1}^{6} \frac{(-1)^{m+1}}{m\sqrt{m+1}}$ (أ)

الاجابة : 0.492 , 0.931

٢ - ٤ - المجال نتيجة توزيع حجمى متصل للشحنات :

إذا تصورنا الآن منطقة من الفراغ مملوءة بعدد هائل من الشحنات المنفصلة عن بعضها بمسافات صغيرة جدا ، مثل الفراغ بين شبكة التحكم والكاثود فى مجمعة مدفعة الكترونات فى أنبوبة أشعة الكاثود العاملة بواسطة شحنة الحيز ، فاننا نرى ، أننا نستطيع إحلال هذا التوزيع لجسيمات صغيرة جدا بتوزيع متصل أملس يوصف بكثافة شحنة حجمية مثلما نصف الماء بأن كثافته 1g/cm^3 (جرام لكل سنتيمتر مكعب) مع أنه يتكون من جسيمات ذرية وجزيئية الحجم . ونستطيع أن نعمل هذا فقط اذا كنا لانهتم بعدم الانتظام البسيط (أو موجات) فى المجال عندما نتحرك من الكترون لآخر أو عندما نهتم قليلا بأن كتلة الماء تزيد بالفعل بخطوات صغيرة ولكن محدودة كلما أضيف جزىء جديد .

وفى الحقيقة ليس هناك حد على الاطلاق لأن نتائجنا النهائية كمهندسى كهرباء تكون تقريبا دائما بدلالة تيار فى هوائى استقبال ، جهد فى دائرة الكترونية أو شحنة على مكثف ، أو عامة بدلالة ظاهرة ماكروسكوبية ذات أبعاد واسعة . ونادرا ما يجب أن نعرف تيارا الكترون فالكترون[1] .

ونرمز لكثافة الشحنة الحجمية بـ ρ وهو نفس الرمز المستعمل للمتغير النصف قطرى فى الاحداثيات الأسطوانية . ولكن تقرير أى ρ نعنى ، يجب أن يكون عملا بسيطا يؤدى بدقة متناهية . وإذا بدا فى أى وقت أن هناك ارتباكا وشيكا فسنرمز لكثافة الشحنة بـ ρ_v .

وتقاس كثافة الشحنة الحجمية بالكولوم لكل متر مكعب (C/m^3) .

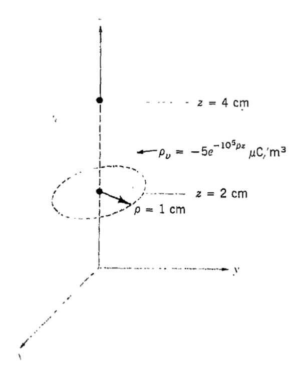
والشحنة الصغيرة ΔQ الموجودة فى الحجم الصغرى Δv هى

(١) ولكن دراسة الضوضاء الناتجة عن الكترونات أو أيونات فى الترانزستورات ، الأنابيب المفرغة والمقاومات تتطلب مثل هذا الفحص للشحنة .

$$\Delta Q = \rho\ \Delta v \qquad (١٥)$$

وتعرف ρ رياضيا باستخدام عملية النهايات على (١٥) ،

$$\boxed{\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}} \qquad (١٦)$$



شكل ٢ ـ ٤ ـ الشحنة الكلية المحتواة خلال الأسطوانة الدائرية القائمة يمكن الحصول عليها بايجاد قيمة $Q = \int_{vol} \rho\, dv$

والشحنة الكلية داخل حجم ما محدود ، يمكن الحصول عليها بالتكامل على ذلك الحجم

$$\boxed{Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \rho\ dv} \qquad (١٧)$$

وعادة ما تُستخدم علامة تكامل واحدة ، ولكن الحجم التفاضلى dv يدل على التكامل على حجم ، ومن ثم فهو تكامل ثلاثى . ولحسن الحظ أننا فى الغالب نرضى أنفسنا بالتكامل المُبين وليس أكثر ، لأن التكاملات المتعددة يصعب جدا إيجاد قيمها عدا فى المسائل ذات أقصى تماثل .

وكمثال لايجاد قيمة تكامل حجمى ، دعنا نجد الشحنة الكلية المحتواة فى طول 2 cm للحزمة الالكترونية المبينة فى شكل ٢ ـ ٤ . فى اللحظة المبينة نفترض أن كثافة الشحنة الحجمية هى

$$\rho_v = -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \qquad C/m^3$$

الحجم التفاضلى فى الاحداثيات الأسطوانية معطى فى قسم ١ ـ ٨ ، ولذلك ،

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

نكامل أولا بالنسبة لـ ϕ ، حيث أنها سهلة جدا ،

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho \, d\rho \, dz$$

ثم بالنسبة لـ z ، لأن ذلك سيسهل التكامل الأخير بالنسبة لـ ρ ،

$$Q = \int_0^{0.01} \left(\frac{-10^{-5}\pi}{-10^5 \rho} e^{-10^5 \rho z} \rho \, d\rho \right)_{z=0.02}^{z=0.04}$$

$$= \int_0^{0.01} -10^{-10}\pi (e^{-2{,}000\rho} - e^{-4{,}000\rho}) \, d\rho$$

وأخيرا ،

$$Q = -10^{-10}\pi \left(\frac{e^{-2{,}000\rho}}{-2{,}000} - \frac{e^{-4{,}000\rho}}{-4{,}000} \right)_0^{0.01}$$

أو

$$Q = -10^{-10}\pi \left(\frac{1}{2{,}000} - \frac{1}{4{,}000} \right) = \frac{-\pi}{40} \qquad pC$$

حيث pC ترمز الى بيكوكولوم *picocoulombs*[1] . فى نظام الوحدات الدولية .

وكتقدير تقريبى : لو فرضنا أن هذه الالكترونات تتحرك بسرعة ثابتة تساوى عشرة فى المائة من سرعة الضوء ، فان هذه الحزمة التى طولها 2cm ستكون قد سارت 2cm فى 2 /3 ns (nano second) ويكون التيار تقريبا يساوى خارج القسمة .

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{-(\pi/40)10^{-12}}{(2/3)10^{-9}}$$

(١) البادئات ومعانيها واختصاراتها مجدولة فى جدول (ب ـ ٣) بالملحق (ب) .

أو $118\ \mu$ A(micro ampers) تقريبا .

والاسهام العنصرى التزايدى لشدة المجال الكهربى عند r نتيجة شحنة عنصرية تزايدية ΔQ عند r'هى

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 \,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\rho\ \Delta v}{4\pi\epsilon_0 \,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

وإذا جمعنا إسهامات جميع الشحنات الحجمية فى منطقة معينة وندع العنصر الحجمى Δv يقترب من الصفر ، بينما يصبح عدد هذه العناصر لانهائيا ، فسيئول الجمع الى تكامل

$$(١٨) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho(\mathbf{r}')\, dv'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

ومرة أخرى هذا هو تكامل ثلاثى ، وسنبذل أقصى جهدنا لنتلافى أداء التكامل فعلا .

وقد تستحق دلالة الكميات المختلفة تحت علامة التكامل فى (١٨) قليلا من التمعن . فالمتجه r من نقطة الأصل يعين نقطة المجال التى عندها سيحدد E بينما يمتد المتجه r' من نقطة الأصل الى نقطة المنبع حيث تقع $\rho(\mathbf{r}')dv'$. والمسافة المقياسية بين نقطة المنبع ونقطة المجال هى $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ والكسر $(\mathbf{r}-\mathbf{r}') / |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ هو وحدة المتجه الموجه من نقطة المنبع إلى نقطة المجال . ومتغيرات التكامل هى x' , y' و z' فى الاحداثيات الكرتيزية .

ت ٢ ـ ٥ ـ أوجد الشحنة الكلية داخل كل من الحجوم المبينة :

(أ) $\rho = 10ze^{-0.1x} \sin \pi y$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $o \leqslant y \leqslant 1$ و $3 \leqslant z \leqslant 3.6$ ؛

(ب) $\rho = 4xyz$; $o \leqslant \rho \leqslant 2$, $o \leqslant \phi \leqslant \pi/2$ و $o \leqslant z \leqslant 3$ ؛

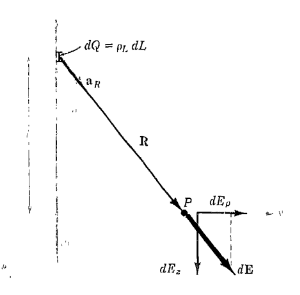
(جـ) $\rho_v = 3\pi \sin\theta \cos^2\phi / [2r^2 (r^2 +)]$ ؛ الكون

الاجابة : 36.1C ; 36.0C ; 36.5C

٢ ـ ٥ ـ مجال خط من الشحنة :

الى الآن اعتبرنا نوعين من توزيعات الشحنة وهما : الشحنة النقطية ، والشحنة الموزعة خلال حجم بكثافة ρ C/m^3 . فاذا اعتبرنا ـ الآن ـ كثافة شحنة حجمية على هيئة توزيع فتيلى ، مثل حزمة دقيقة جدا ومركزة فى أنبوبة أشعة الكاثود ، أو موصلا مشحونا ذا نصف قطر شديد الصغر ، فاننا نجد أنه لمن المناسب معاملة الشحنة كخط شحنة ذى كثافة

$\rho_L \ C/m$ وفى حالة الحزمة الالكترونية تكون الشحنات فى حركة ، وحقيقة لسنا بصدد مسألة كهروستاتيكية . على أنه إذا كانت حركة الالكترون ثابتة ومنتظمة (حزمة تيار مستمر) وإذا تجاهلنا مؤقتا المجال المغناطيسى الناتج ؛ فان الحزمة الالكترونية يمكن اعتبارها مكونة من الكترونات ساكنة ، حيث أن لقطات تصويرية مأخوذة عند أى لحظة ستظهر نفس التوزيع للشحنات .



شكل ٢ ـ ٥ الاضافة $d\mathbf{E} = dE_\rho \, \mathbf{a}_\rho + dE_z \mathbf{a}_z$ الى شدة المجال الكهربى ناشئة عن عنصر شحنة $dQ = \rho_L dL$ موضوع على مسافة L من نقطة الأصل . الكثافة الخطية للشحنة منتظمة وتمتد على كل طول المحور .

دعنا نفترض شحنة خطية مستقيمة ممتدة بطول المحور z فى نظام الاحداثيات الأسطوانية من $\infty -$ إلى ∞ ، كما هو مبين فى شكل ٢ ـ ٥ . ونريد إيجاد شدة المجال الكهربى $\mathbf{E}$ عند أى وكل نقطة ، والناتجة عن كثافة شحنة خطية منتظمة مقدارها ρ_L .

ويجب دائما اعتبار التماثل أولا لتعيين عاملين معينين : (١) مع أى من الاحداثيات لايتغير المجال ، و(٢) أى من مركبات المجال غير موجودة . والاجابة على هذين السؤالين عندئذ تدلنا على أى المركبات موجودة ومع أن الاحداثيات تتغير .

وبالرجوع الى شكل ٢ ـ ٥ نتحقق أنه عندما نتحرك حول خط الشحنة ، مغيرين ϕ مع إبقاء ρ و z ثابتين ، فان خط الشحنة يظهر بدون تغيير من كل زاوية . وبتعبير آخر : إن التماثل السمتى موجود ، ولاتتغير أى من مركبات المجال مع ϕ .

مرة أخرى ، إذا أبقينا ρ و ϕ ثابتين مع التحرك إلى أعلى ، وإلى أسفل خط الشحنة بتغيير z ، سيظل خط الشحنة ممتدا مسافة لانهائية فى كلا الاتجاهين ولاتتغير المسألة . وهذا هو تماثل محورى ويؤدى الى مجالات ليست دوالا فى z .

وإذا أبقينا ϕ و z ثابتين وغيرنا ρ فان المسألة تتغير ، ويؤدى بنا قانون كولوم إلى توقع أن يصبح المجال أضعف كلما زادت ρ . ومن ثم فبعملية الحذف نقاد الى الحقيقة ، أن المجال يتغير بتغير فقط مع ρ .

والآن ، أى المركبات موجودة ؟ . كل عنصر طول تزايدى من خط الشحنة يعمل كشحنة نقطية وينتج عنصر مساهمة تزايدى لشدة المجال الكهربى الموجه نحو الابتعاد عن القطعة الصغيرة للشحنة (بفرض خط شحنة موجب) . ولأن أيا من عناصر الشحنة لاينتج مركبة ذات الرمز السفلى ϕ لشدة المجال الكهربى فان E_ϕ يساوى صفرا إلا أن كل عنصر ينتج مركبة E_ρ ومركبة E_z ، ولكن المساهمة فى E_z بعناصر من الشحنة على مسافات متساوية أعلى ، وأسفل النقطة التى تعين عندها المجال تلغى بعضها الآخر .

ولذلك فقد وجدنا أن لدينا فقط مركبة E_ρ وأنها تتغير مع ρ فقط . والآن علينا أن نوجد هذه المركبة .

نختار نقطة P على المحور y التى عندها يعين المجال . وهذه نقطة عامة تماما بسبب عدم تغير المجال مع ϕ و z . وبتطبيق (٩) لايجاد عنصر المجال التزايدى عند P نتيجة عنصر الشحنة التزايدى $dQ = \rho_L\, dL$ ، نحصل على

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L\, dL}{4\pi\epsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

أو

$$dE_\rho = \frac{\rho_L\, dL \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_L\, dL}{4\pi\epsilon_0 R^2}\frac{y}{R} = \frac{\rho_L\, dL\rho}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

باستبدال R^2 بـ $L^2 + \rho^2$ وتجميع المساهمات من كل عنصر للشحنة ،

$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho\, dL}{4\pi\epsilon_0 (L^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

وبالتكامل باستخدام جداول التكامل أو بتغيير المتغير ، $L = \rho \cot\theta$ ، نحصل على

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\rho\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{L}{\sqrt{L^2+\rho^2}}\right)_{-\infty}^{\infty}$$

و

$$\boxed{E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}} \quad (١٩)$$

وهذه هى الاجابة المطلوبة ولكن هناك طرقا عديدة أخرى للحصول عليها . وقد

كان من الممكن استخدام الزاوية θ كمتغير التكامل ، لأن $L = \rho \cot \theta$ من شكل ٢ ـ ٥ و $dL = -\rho \csc^2 \theta \, d\theta$.

ولأن $R = \rho \csc \theta$ فان تكاملنا يصبح ، ببساطة

$$dE_\rho = \frac{\rho_L \, dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta = -\frac{\rho_L \sin \theta \, d\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho}$$

$$E_\rho = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{180}^{0} \sin \theta \, d\theta = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos \theta \Big]_{180}^{0}$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

وهنا كان التكامل أبسط ، ولكن بعض الخبرة بالمسائل من هذا النوع ضرورية ، قبل أن نستطيع دون زلل اختيار أبسط متغيرات التكامل عند بدء المسألة .

وكان من الممكن أيضا اعتبار (١٨) كنقطة بداية ،

$$\mathbf{E} = \int_{vol} \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

بفرض $\rho_v \, dv = \rho_L \, dL$ ومكاملا على طول الخط الذى هو الآن « الحجم » المحتوى على كل الشحنة . افترض أننا عملنا ذلك وتناسى كل شىء تعلمناه من تماثل المسألة . باختيار الآن نقطة ρ عند موضع عام (ρ , ϕ , z) (شكل ٢ ـ ٦) نكتب

$$\mathbf{R} = \rho \mathbf{a}_\rho - (L - z)\mathbf{a}_z$$

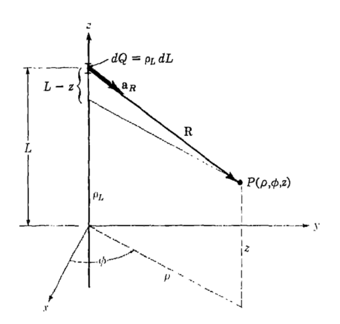
$$R = \sqrt{\rho^2 + (L - z)^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - (L - z)\mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + (L - z)^2}}$$

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \, dL[\rho \mathbf{a}_\rho - (L - z)\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \, dL \, \mathbf{a}_\rho}{[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(L - z) \, dL \, \mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}} \right\}$$

وقبل أن نكامل تعبيراً اتجاهيا ، يجب أن نُعرف ما إذا كان المتجه تحت علامة التكامل (هنا وحدات المتجهات $\mathbf{a}_\rho$ و $\mathbf{a}_z$) يتغير مع متغير التكامل (هنا dL) أم لا . فاذا لم يكن كذلك ، فانه يكون ثابتا ويمكن نقله من داخل التكامل تاركا كمية مقياسية يمكن تكاملها بالطرق العادية . وبالطبع ، فان وحدات متجهاتنا لاتتغير فى القيمة ، ولكن تغير الاتجاه هو فعلا أمر متعب . ولحسن الحظ فان اتجاه $\mathbf{a}_\rho$ لايتغير مع L (ولا مع ρ ، ولكنه يتغير مع ϕ) و a_z ثابت دائما .



شكل ٢ ـ ٦ هندسة المسألة للمجال حول خط لانهائى من الشحنة يؤدى الى تكاملات أكثر صعوبة عندما يهمل التماثل .

وعلى ذلك نحذف وحدات المتجهات من التكاملات ونكامل ثانية من الجداول أو بتغيير المتغيرات ،

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left\{\mathbf{a}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\, dL}{[\rho^2 + (L-z)^2]^{3/2}} - \mathbf{a}_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(L-z)\, dL}{[\rho^2 + (L-z)^2]^{3/2}}\right\}$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left[\mathbf{a}_\rho \rho \frac{1}{\rho^2}\frac{L-z}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \left[\mathbf{a}_z \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\mathbf{a}_\rho \frac{2}{\rho} + \mathbf{a}_z(0)\right] = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}\mathbf{a}_\rho$$

مرة أخرى نحصل على نفس الأجابة ـ كما ينبغى ـ لأنه ليس هنا أى خطأ فى الطريقة سوى أن التكامل كان أكثر صعوبة ، وتطلبت أداء تكاملين . وهذا هو الثمن الذى ندفعه نتيجة لاهمال اعتبار التماثل والغوص بعنف مع الرياضيات . فتبصر قبل التكامل .

وسنناقش طرقا أخرى لحل هذه المسألة الأساسية ـ بعد أن نقدم قانون جاوس ومفهوم الجهد .

دعنا الآن نعتبر الاجابة نفسها ،

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \qquad (١٩)$$

ونلاحظ أن المجال يتناقص عكسيا مع المسافة الى الخط المشحون ، بالمقارنة مع النقطة المشحونة حيث تناقص المجال مع مربع المسافة . فالتحرك عشر مرات بعيدا عن نقطة مشحونة يؤدى لمجال واحد فى المائة فقط من شدته السابقة ، ولكن التحرك عشر مرات أبعد من خط مشحون يقلل المجال الى عشرة فى المائة فقط من قيمته السابقة . ويمكن استنباط تناظر مع منبع اضاءة ، لأن شدة الضوء من نقطة منبع للضوء تقل عكسيا مع مربع المسافة الى المنبع . والمجال لأنبوبة فلورسنت طولها لانهائى يتناقص عكسيا مع القوة الأولى للمسافة النصف قطرية الى الأنبوبة ، ويجب أن نتوقع أن شدة الضوء حول أنبوبة محدودة الطول يخضع لهذا القانون قرب الأنبوبة . ومع ذلك ، فكلما تبعد نقطتنا أكثر فأكثر من أنبوبة محدودة الطول فانها تبدو فى النهايةكنقطة منبع ويخضع المجال لعلاقة التربيع العكسى .

وفى قسم ٢ ـ ٧ سنشرح كيف يمكن رسم المجالات تخطيطيا ونستخدم مجال خط الشحنة كمثال .

ت ٢ ـ ٦ خط شحنة منتظم $\rho_L = 25$ n C /m يقع على الخط $x = -3$, $z = 4$ فى فضاء حر . أوجد E فى المركبات الكرتيزية عند :
(أ) نقطة الأصل ، (ب) $P_1(2, 15, 3)$ ، (جـ) $P_2(\rho = 4, \phi = 60^\circ, z = 2)$.

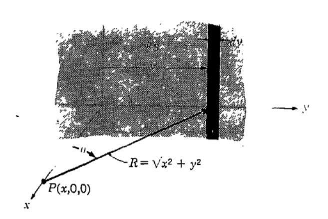
الاجابة : $77.5\mathbf{a}_x - 31.0\mathbf{a}_z$ V /m ; $86.4\mathbf{a}_x - 17.3\mathbf{a}_z$ V /m ; $53.9\mathbf{a}_x - 71.9\mathbf{a}_z$ V / m

٢ ـ ٦ ـ مجال لوح من الشحنة :

اللوح اللانهائى للشحنة ، ذو الكثافة المنتظمة ρ_s C /m^2 هو شكل أساسى آخر للشحنات . ومثل هذا التوزيع للشحنة قد يستخدم كثيرا لتقريب ذلك الموجود على موصلات خط نقل شريطى أو المكثف ذى اللوحين المتوازيين . وكما سنرى فى الفصل الخامس فان الشحنة الاستاتيكية تستوطن أسطح الموصلات وليس فى داخلها ، ولهذا السبب ، فان ρ_S تعرف عامة **بكثافة الشحنة السطحية** . وبذلك تكون عائلة توزيع الشحنة مكتملة ـ نقطة ، خط ، سطح وحجم أو Q , ρ_L , ρ_s و ρ

دعنا نضع لوحا من الشحنات فى المستوى yz ونعتبر التماثل مرة أخرى (شكل ٢ ـ ٧) . فنرى أولا أن المجال لايمكن أن يتغير مع y أو مع z ونجد أن المركبتين y و z الناشئتين من العناصر التفاضلية للشحنة الموجودة متماثلة بالنسبة للنقطة التى نرغب المجال عندها سوف تلغى بعضها . ومن ثم فان E_x هى الموجودة فقط ، وهذه المركبة دالة فى x وحدها . ومرة أخرى نواجه باختيار من طرق عدة لايجاد قيمة هذه المركبة بواسطتها ، وهذه المرة سنستخدم طريقة واحدة فقط ونترك الطرق الأخرى كتمارين لبعد ظهر يوم إجازة هادىء .

دعنا نستخدم مجال خط الشحنة اللانهائى (١٩) بتقسيم اللوح اللانهائى الى أشرطة تفاضلية العرض . وأحد هذه الأشرطة مبين فى شكل ٢ ـ ٧ . كثافة الشحنة الخطية ، أو الشحنة لكل وحدة أطوال ، هى $\rho_L = \rho_s\, dy$ ، والمسافة من خط الشحنة هذا الى نقطتنا العامة P على المحور x هى $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.



شكل ٢ ـ ٧ ـ لوح لانهائى من الشحنة فى المستوى yz ، ونقطة عامة P على المحور x ، وخط شحنة ذو عرض تفاضلى مستخدم كعنصر فى تعيين المجال عند P باستخدام $d\mathbf{E} = \rho_s dy \mathbf{a}_R / 2\pi \epsilon_0 R$.

والمساهمة فى E_x عند P من هذا الشريط تفاضلى العرض هو إذن

$$dE_x = \frac{\rho_S\, dy}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\theta = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\frac{x\, dy}{x^2 + y^2}$$

وبجمع تأثيرات كل الأشرطة

$$E_x = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\, dy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\tan^{-1}\frac{y}{x}\Big]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$$

وإذا اختيرت النقطة P على المحور x السالب فان

$$E_x = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$$

لأن المجال موجه دائما متباعدا عن الشحنة الموجبة . وهذه الصعوبة فى الاشارة يتغلب عليها عادة بتحديد وحدة المتجه $\mathbf{a}_N$ العمودى على اللوح موجها للخارج ، أو مبتعدا عنه حينئذ

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_N \qquad (٢٠)$$

وهذه إجابة تدعو للدهشة ، لأن المجال ثابت القيمة والاتجاه . إنه بنفس الشدة على بعد مليون ميل بعيداً عن اللوح مثلما هو على السطح . وبالرجوع الى مناظرتنا مع الضوء ، نرى أن المنبع الضوئى المنتظم على سقف غرفة كبيرة جدا يؤدى الى إضاءة على قدم مربع على الأرض ، مثلما يفعل على قدم مربع على بعد بوصات قليلة من السقف . وإذا أردت إنارة أكثر على هذا الموضوع فلن يعود عليك بفائدة أن تمسك الكتاب أقرب الى هذا المنبع الضوئى .

وإذا وضع لوح شحنات لانهائى ثانى له شحنة سالبة كثافتها $-\rho_S$ فى المستوى $x = a$ ، يمكننا إيجاد المجال الكلى باضافة مساهمة كل لوح . ففى المنطقة $x > a$ ،

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

وفى $x < 0$

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

وعند $0 < x < a$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x$$

و

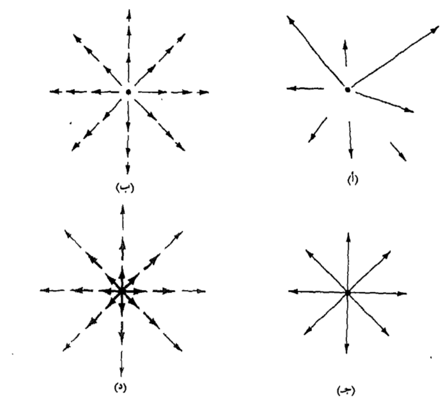
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad (٢١)$$

وهذه إجابة عملية هامة لأنها تعطى المجال بين لوحين متوازيين لمكثف هوائى ، بشرط أن الأبعاد الطولية للوحين كبيرة جدا بالنسبة للمسافة بينهما ، وأيضا بشرط أننا نعتبر نقطة بعيدة بعدا كبيرا عن الأحرف . والمجال خارج المكثف ، مع أنه غير صفرى ، كما وجدنا للحالة المثالية آنفا ، فهو عادة مهمل .

ت ـ ٢ ـ ٧ ـ وضعت ثلاثة ألواح منتظمة مشحونة فى فضاء حر كما يلى : $2\mu C/m^2$ عند $x = -3$ ، $-5\mu C/m^2$ عند $x = 1$ و $4\mu C/m^2$ عند $x = 5$. عين $\mathbf{E}$ عند النقطة :

(أ) $(0,0,0)$ (ب) $(2.5\ ,\ -\ 1.6,4.7)$ ، (ج) $(8\ ,\ -\ 2\ ,\ -\ 5)$ ؛
(د) $(-\ 3.1\ ,\ 0,3.1)$.

الاجابة 169.4 KV / m ; $-\ 395a_x$ KV / m ; $56.5a_x$ KV /m ; $-56.5a_x$ KV / m



شكل ٢ ـ ٨ (أ) رسم تخطيطى ردىء جدا . (ب) و(جـ) رسمان تخطيطيان لابأس بهما و(د) الشكل المعتاد لتخطيط خطوط الانسياب ، وفى الشكل الأخير تبين الأسهم اتجاه المجال عند كل نقطة على طول الخط ، والتباعد بين الخطوط يتناسب عكسيا مع شدة المجال .

٢ ـ ٧ ـ خطوط الانسياب والرسوم التخطيطية للمجالات :

لدينا الآن معادلات اتجاهية لشدة المجال الكهربى ناتجة عن عدة أشكال مختلفة للشحنة ، ولقد كان لدينا قليل من الصعوبة فى تفسير قيمة واتجاه المجال من المعادلات . ولسوء الحظ ، لايمكن أن تستمر هذه البساطة أطول كثيرا ، لأننا قمنا بحل أغلب الحالات البسيطة وتوزيعاتنا الجديدة للشحنة سوف تؤدى حتما الى تعبيرات أكثر تعقيدا للمجالات ، والى صعوبة أكثر فى تصور المجالات من خلال المعادلات . ومع ذلك ، فحقيقى أن صورة واحدة تقدر بحوالى ألف كلمة وذلك إذا عرفنا تماما أن نرسم هذه الصورة .

اعتبر المجال حول خط شحنة

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$$

يبين شكل ٢ ـ ٨أ منظر مقطع عرضى لخط الشحنة ، ويمثل ماقد تكون محاولتنا الأولى لتصوير المجال ، أجزاء خطية قصيرة مرسومة هنا وهناك لها طول متناسب مع مقدار E وتشير إلى اتجاه E .

ولكن الشكل يفشل فى إظهار التماثل بالنسبة لـ ϕ ، ولذا نحاول مرة أخرى فى شكل ٢ ـ ٨ب مع وضع تماثل للأجزاء الخطية . وهنا يظهر الخلل الحقيقى ، فان أطول الخطوط يجب أن يرسم فى أكثر المناطق ازدحاما ، وهذا أيضا يزعجنا إذا استخدمنا أجزاء خطية لها نفس الطول ولكن سمكها متناسب مع E (شكل ٢ ـ ٨جـ) . والأساليب الأخرى التى اقترحت تتضمن رسم خطوط أقصر لتمثل مجالاً أقوى (وهذا مضل بأصله) وكذلك استخدام كثافة اللون لتمثل مجالا أقوى (صعبة ومكلفة) .

وللحاضر ، دعنا نكتف ببيان اتجاه E فقط برسم خطوط متصلة من الشحنة بحيث تكون مماسة لـ E فى كل مكان . ويوضح شكل ٢ ـ ٨د هذا التوافق . والتوزيع المتماثل للخطوط (واحد كل *45*) يدل على التماثل السمتى ، ورؤوس الأسهم يجب أن تستخدم لتبين الاتجاه .

وتسمى هذه الخطوط عادة خطوط الانسياب ، مع أن تعبيرات أخرى مثل خطوط التدفق وخطوط الاتجاه تستخدم أيضا . وشحنة اختبار صغيرة موجبة موضوعة عند أى نقطة من هذا المجال وهى حرة الحركة ستكتسب عجلة فى اتجاه خط الانسياب المار بتلك النقطة . وإذا مثل المجال سرعة سائل أو غاز (الذى يجب أن يكون له ، عرضيا ، منبع عند $\rho = 0$) فان جسيمات صغيرة معلقة فى السائل أو الغاز ستقتفى أثر خطوط الانسياب .

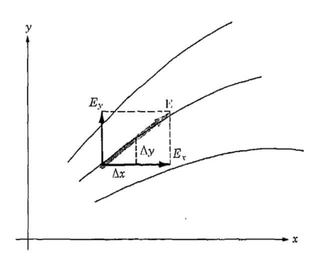
سنكتشف فيما بعد أن هناك فائدة إضافية تصاحب هذا الرسم التخطيطى لخطوط الانسياب ، حيث أنه يمكن بيان أن مقدار المجال يتناسب عكسيا مع المسافات بين خطوط الانسياب لبعض الحالات الخاصة المهمة . فكلما اقتربوا من بعضهم كان المجال أقوى . حينئذ سنجد أيضا طريقة أسهل وأكثر دقة لعمل مثل هذا النوع من الرسوم التخطيطية لخطوط الانسياب .

واذا حاولنا أن نرسم تخطيطا لمجال شحنة نقطية ، فان تغير المجال فى وبعيداً عن الورقة سيسبب أساسا صعوبات بالغة ، ولهذا السبب فان الرسم التخطيطى عادة يقتصر على المجالات ذات البعدين .

وفى حالة المجال ذى البعدين ، دعنا نضع اختياريا $E_z = 0$. وعلى ذلك فان خطوط الانسياب تنحصر فى مستويات فيهاz ثابتة ، ويكون الرسم التخطيطى هو نفسه لأى من هذه المستويات . عدد من خطوط انسياب موضحة فى شكل ٢ ـ ٩ ، والمركبتان E_x و E_y مبينتان عند نقطة عامة . ولأنه واضح من هندسة الشكل أن

$$\boxed{\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}} \qquad (٢٢)$$

فان معرفة الشكل الدالى لـ E_x و E_y (والقدرة على حل المعادلة التفاضلية الناتجة) سيمكننا من إيجاد المعادلات الخاصة بخطوط الانسياب .



شكل ٢ ـ ٩ يمكن الحصول على معادلة خطوط الانسياب بحل المعادلة التفاضلية $E_y / E_x = dy / dx$

وكتوضيح لهذه الطريقة اعتبر مجال خط شحنة منتظم بـ $\rho_L = 2\pi \epsilon_0$ ،

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{a}_\rho$$

وفى الاحداثيات الكرتيزية ،

$$\mathbf{E} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{a}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{a}_y$$

وعلى ذلك تكون المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \qquad \text{or} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

وللذلك ،

$$\ln y = \ln x + \ln C \text{ أو } \ln y = \ln x + C_1$$

ومنها يمكن الحصول على معادلات خطوط الانسياب ،

$$y = Cx$$

وكل خط انسياب يرتبط بقيمة معينة ل C والخطوط نصف القطرية المبينة فى شكل ٢ - ٨د يمكن الحصول عليها عندما تكون $C = o , 1 , -1$ و $1/C = 0$

وأيضا قد يمكن الحصول على معادلات خطوط الانسياب مباشرة فى الاحداثيات الاسطوانية والكروية . وسيفحص مثال على الاحداثيات الكروية فى قسم ٤ - ٧ من الفصل الرابع .

ت ٢ - ٨ - أوجد معادلة خط الانسياب المار بالنقطة $(3 , 2 , 1)$ فى المجال:
(أ) $E = ya_x + xa_x$ ؛ (ب) $E = (x + y)\, a_x + (x - y) a_y$.
الاجابة : $y^2 - x^2 = 3$, $y^2 + 2xy - x^2 = 7$.

مراجع مقترحة :

1 - Boast, W.B.: "Vecor Fields," Harper and Row, Publishers, Incorporated, New York, 1964.

يحتوى هذا الكتاب على عددين من الأمثلة والرسومات التخطيطية للمجالات .

2 - Della Torre, E.and C.L.Longo : "The Electromagnetic Field Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1969.

يقدم المؤلفان كل النظرية الكهرومغناطيسية بتطور معتنى به ودقة صارمة بناء على قانون تجريبى واحد - وهو كولوم الذى يبدأ فى الفصل الأول .

3 - Schelkunoff, S.A.: "Electromagnetic Fields", Blaisdell Publishing Company, New York, 1963.

كثيرا من النواحى الفيزيائية للمجالات تناقش مبكرا فى هذا المرجع بدون رياضيات عالية .

مسائل :

١ - ثلاث شحنات نقطية كل منها 20pC موضوعة فى فضاء حر على المحور x عند $x = -1$, $x = 0$ و $x = 1$. (أ) أوجد القوة المحصلة على شحنة 1C موضوعة عند $(2 , 10 , 1)$ ، (ب) استبدل الشحنات الثلاث بشحنة واحدة مقدارها 60pC عند

نقطة الأصل ، وأوجد القوة على الشحنة $1C$. (جـ) لماذا يكون الاجابتان متساويتين تقريبا ؟

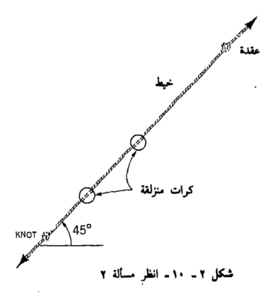
٢ ـ كرتا البلاستيك الصغيرتان المبينتان فى شكل ٢ ـ ١٠ مرتبتان بحيث يمكنهما الانزلاق بحرية على طول خيط عازل أعطيت للكرتين شحنات متماثلة موجبة . بعد ذلك وجدت الكرة السفلى مقابل العقدة السفلى ، بينما تحركت الكرة العليا الى موضع على بعد $5cm$ من تلك العقدة . أوجد قيمة الشحنة إذا كانت لكل كرة كتلة $0.08g$.

٣ ـ وضعت شحنات نقطية متماثلة شحنة كل منها $3\mu C$ عند الأركان الأربعة لمربع طول ضلعه $5\ cm$ فى فضاء حر . أوجد مقدار القوة على كل شحنة .

٤ ـ شحنة نقطية $Q= 1\mu C$ موضوعة فى فضاء حر عند $(0,0,1)$ ، بينما Q_2 عند $(0,0,-1)$ أوجد متجه القوة على شحنة مقدارها $1\mu\ C$ عند $(0,1,0)$ إذا كانت Q_2 تساوى : (أ) $1\mu C$ ؛ (ب) $-1\mu C$.

٥ ـ شحنتان نقطيتان قيمتهما $12nC$ و $-5nC$ وضعتا فى فضاء حر عند $(6,2,1)$ و $(2,7,4)$ بالترتيب . (أ) ما هو مقدار القوة المؤثرة على كل شحنة ؟ . (ب) أوجد E عند $(4,4,4)$.

٦ ـ شحنة نقطية قيمتها $50nC$ موجودة عند النقطة $(-10 , -6 , 8)$ فى فضاء حر . أوجدE عند $(-5 , 8 , 3)$ فى : (أ) المركبات الكرتيزية ، (ب) المركبات الاسطوانية .



شكل ٢ ـ ١٠ ـ انظر مسألة ٢

٧ ـ شحنة نقطية قيمتها $1\ nC$ موضوعة عند نقطة الأصل فى فضاء حر . أوجد معادلة المنحنى فى المستوى $z = 0$ الذى عليه $E_x = 1\ V/m$.

٨ ـ تستخدم شحنة اختبار موجبة لاستكشاف مجال شحنة نقطية واحدة Q موضوعة عند P (a,b,c) . فاذا وضعت شحنة الاختبار عند نقطة الأصل ، تكون القوة عليها فى

الاتجاه $0.5a_x - 0.5\sqrt{3a_y}$ ، وعندما تحرك شحنة الاختبار الى $(1,0,0)$ تكون القوة فى الاتجاه $0.6a_x - 0.8a_y$. أوجد b,a و c .

٩ ـ وضعت ثلاث شحنات نقطية فى فضاء حر كما يلى $Q_1 = -6\mu C$ عند $P_1\ (1,0,0)$, $Q_2 = 10\mu C$ عند $P_2\ (2,0.0)$ و $Q_3 = 4\mu C$ عند $P_3\ (4,0,0)$ فأى من الشحنات عليها أكبر القوى مقدارا ، وما هو مقدار تلك القوة ؟

١٠ ـ شحنتان نقطيتان متساويتان كل منهما 1 nC وموضوعتان فى فضاء حر عند $(0,0,-1)$ و $(0,0,1)$. أوجد E : (أ) عند $P(x,y,z)$ فى الاحداثيات الكرتيزية ، (ب) عند $Q\ (\rho, \phi, z)$ فى الاحداثيات الاسطوانية .

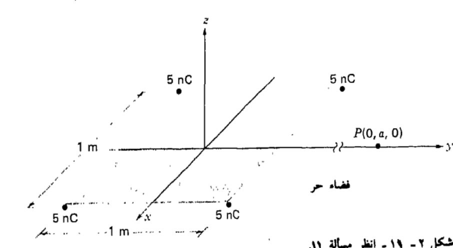
١١ ـ وضعت شحنات نقطية عند أركان مربع كما هو مبين فى شكل ٢ ـ ١١ . أوجد نسبة |E| عند $P\ (0,a,0)$ الى |E| عند $Q(0,2a,0)$ إذا كانت a تساوى : (أ) 2، (ب) 10 ، (جـ) ∞ .

١٢ ـ وضعت شحنة نقطية Q_1 عند $(0,0,0)$ و Q_2 عند $(0,0,1)$. عبر عن Q_2 بدلالة Q_1 بحيث أن E عند $(1,0,-1)$ لايكون لها : (أ) مركبة E_z ، (ب) مركبة E_x .

١٣ ـ كثافة حجمية للشحنة معطاة فى الثمن الأول (x , y و z موجبة) بـ $\rho = 10e^{-2z}\ (x^2 + 2y^2) C/m^3$ ، بينما $\rho = 0$ فى أى مكان آخر . أوجد الشحنة الكلية فى المنطقة :

(أ) $0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1\ ,\ 0 \leq z \leq 1$ (ب) $0 \leq x + 2y \leq 1$ و $0 \leq z \leq 1$.

١٤ ـ كثافة الشحنة الحجمية فى منطقة عمل صمام ثنائى مفرغ متوازى الألواح معطى بـ $\rho = -(4/9)\ \epsilon_0 V_0\ d^{-4/3}\ x^{-2/3}$ ، حيث يقع الكاثود عند $x = 0$ والأنود عند $x = d$ والجهد بين الأنود والكاثود هو V_0 . فاذا كان $V_0 = 40$V و $d = 1$cm ، أوجد الشحنة الكلية فى مقطع عرضى مساحته $1\ m^2$ يقع بين : (أ) $x = 0$ و $x = d/2$ (ب) $x = d/2$ و $x = d$.



شكل ٢ ـ ١١ ـ انظر مسألة ١١.

١٥ ـ تعطى كثافة حجمية لشحنة فى الاحداثيات الاسطوانية بالعلاقة :
$0 \leqslant z \leqslant 0.04$, $0 \leqslant \phi \leqslant 1/2\,\pi$, حيث $\rho_v = (\rho^2 - 10^{-4}) z \sin 2\varnothing \ c/m^3$
$.005 \leqslant p \leqslant 0.02$. بينما $\rho_v = 0$ فى أى مكان آخر . (أ) عين $\rho_{v,max}$. (ب) أوجد الشحنة الكلية فى المنطقة .

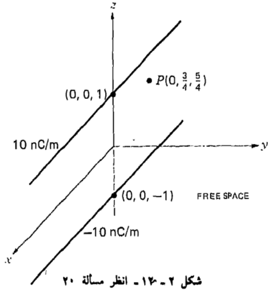
١٦ ـ تتغير كثافة الشحنة مع نصف القطر فى نظام الاحداثيات الاسطوانية بالصورة : $1/(\rho^2 + a^2)^2$. خلال أى مسافة من المحور z تقع نصف الشحنة الكلية ؟

١٧ ـ إذا تغيرت الكثافة الحجمية لشحنة خطيا مع نصف القطر ، $\rho = \rho_0\, r/a$ (حيث ρ_0 و a ثوابت) وبفرض نظام إحداثيات كروى ، أوجد الشحنة الواقعة داخل :
(أ) الكرة $r \leqslant a$ ؛ (ب) المخروط $0 \leqslant \theta \leqslant 0.1\pi$ ؛
(جـ) المنطقة $r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ و $o \leqslant \phi \leqslant 0.2\pi$.

١٨ ـ فى الاحداثيات الكروية دع $\rho = 10/r \ C/m^3$ وأوجد : (أ) الكثافة الحجمية للشحنة عند نقطة الأصل ، (ب) الشحنة الكلية فى كرة نصف قطرها 1 - mm ومركزها عند نقطة الأصل ، (جـ) الشحنة الكلية فى المنطقة التى توصف بـ $10 \leqslant r \leqslant 20$, $28^0 \leqslant \theta \leqslant 31^0$, $0.9\pi \ \phi \leqslant 0.96\,\pi$.

١٩ ـ خط شحنة لانهائى منتظم ، $\rho_L = 2n\ C/m$ ، يقع على امتداد المحور x فى فضاء حر ، بينما تقع شحنات نقطية قيمة كل منها 8nC عند $(0,0,1)$ و $(0,0,-1)$. (أ) أوجد E عند $(2,3,-4)$ ، (ب) الى أى قيمة يجب تغيير ρ_L لتجعل E صفرا عند $(0,0,3)$ ؟

٢٠ ـ (أ) عين E عند $P(0,0.78\ ,\ 1.25)$ لخطى الشحنات المنتظمين المبينين فى شكل ٢ ـ ١٢ . (ب) لاحظ أن المركبة فى اتجاه z لـ E فى الجزء (أ) هى صفر عند تلك النقطة الخاصة . والآن عين المحل الهندسى لجميع النقط التى عندها $E_z = 0$.



شكل ٢ ـ ١٢ ـ انظر مسألة ٢٠

٢١ ـ االمستقيم النصف ـ لانهائى ، $z \geqslant 0$ و $x = y = 0$ يحتوى كثافة شحنة منتظمة قيمتها 15 n C /m . عين E فى فضاء حر عند (أ) $P_A(0,0,-1)$ (ب) P_B $(1,2,3)$.

٢٢ ـ الجزء من المحور z الذى له $|z| \leqslant 2$ يحمل كثافة شحنة غير منتظمة قيمتها : $10\,|z|$ n C /m و $\rho_L = 0$ فى أى مكان آخر . عين E فى فضاء حر عند : (أ) $(0,04)$ ، (ب) $(0,4,0)$.

٢٣ ـ إذا أعطيت التوزيعات الأربعة للشحنة هذه فى فضاء حر 0.25n C/m^2 على السطح $y = 2$, $-\,0.25$ n C/m^2 على السطح : $y = -1$, 0.4nC/m^2 على السطح $x = -4$, 0.4π nC/m على الخط $x = 2$ و $z = 3$ ، أوجد E و $|E|$ عند النقطة $(1,3,-1)$.

٢٤ ـ يقع خط ذو شحنة 2πnC/m على طول المحور y ، بينما كثافات شحنة سطحية ذات 0.1n C/m^2 و -0.1n C/m^2 على المستويات $z = 3$ و $z = -4$ بالترتيب .
(أ) أوجد Eعند $P\,(1,-7,2)$ (ب) أعط الاحداثيات الكرتيزية لنقطة عندها E هى السالب للقيمة السابقة .

٢٥ ـ يحمل السطح المربع $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ و $z = 0$ كثافة شحنة $\rho_s = |x|$ n C/m^2 أوجد E عند $P(0,0,1)$.

٢٦ ـ تحمل المنطقة الدائرية ، $\rho \leqslant 1$ فى المستوى $z = 0$ فى فضاء حر كثافة شحنة $\rho_s = 5\rho$ n C/m^2 . عين E عند $(0,0,1)$.

٢٧ ـ (أ) أوجد الصورة العامة لمعادلة خطوط الانسياب للمجال $E = 10xya_x + 5x^2a_y$
(ب) حدد اتجاه E عند $(2,3,-5)$ بواسطة وحدة متجه .

٢٨ ـ إذا اعطيت المجال $E = (2x-1)\,a_x + (4-2y)a_y$ ، أوجد الصورة العامة لمعادلات خطوط الانسياب ، وارسم ذلك الخط المار بالنقطة $(1,3,6)$.

٢٩ ـ مجال معطى بـ $E = 2xz^2a_x + 2z\,(x^2+1)a_z$. أوجد معادلة خط الانسياب المار بالنقطة $(1\,,\,3\,,\,-1)$.

٣٠ ـ مجال كهربى معطى $E = \cosh x \sin y a_x + \sinh x \cos y a_y$ (أ) أوجد E عند $(0,\,\pi/3\,,\,0)$ (ب) عين معادلة خط الانسياب المار بـ $(0,\pi/3,0)$. (جـ) أوجد تقاطع خط الانسياب هذا مع الخطوط $x = 1$, $x = 2$ و $x = 5$.

٣١ ـ بالنسبة لمجالات لاتتغير مع z فى الاحداثيات الاسطوانية ، يمكن الحصول على معادلات خطوط الانسياب بحل المعادلة التفاضلية $E_\rho/E\phi = d\rho/(\rho d\phi)$. أوجد معادلة الخط المار بالنقطة $(2,30^\circ,0)$ للمجال $E = \rho\cos 2\phi\, a_\rho - \rho\sin 2\varnothing\, a_\phi$.

الفصل الثالث

كثافة التدفق الكهربى ، قانون جاوس والانفراج

بعد رسم قليل من المجالات المشروحة فى الفصل السابق ، وبعد التعود على فكرة خطوط الانسياب التى تبين اتجاه القوة على شحنة اختبار عند كل نقطة ، يكون من الصعب تجنب إعطاء هذه الخطوط معنى فيزيائيا والتفكير فيها كخطوط تدفق . فليس هناك جسيم طبيعى مقذوف نصف قطريا خارجا من الشحنة النقطية ، وليس هناك مجسات صلب ممتدة لتجذب أوتطرد شحنة اختبار غير واعية ، ولكن بمجرد رسم خطوط الانسياب على ورقة يظهر أن هناك صورة تبين شيئا ما موجودا .

وإنه لمن المفيد جدا أن نخترع تدفقا كهربيا ينساب للخارج متماثلا من الشحنة النقطية ، ومنطبقا على خطوط الانسياب ثم نتصور هذا التدفق كلما وجد مجال كهربى .

هذا الفصل يقدم ويستخدم فكرة التدفق الكهربى ، وكثافة التدفق الكهربى لحل عديد من المسائل المقدمة فى الفصل السابق مرة أخرى . وهنا يصبح العمل أسهل كثيرا ، وذلك بسبب المسائل ذات التماثل الأقصى التى نحلها .

٣ ـ ١ ـ كثافة التدفق الكهربى :

فى حوالى ١٨٣٧ أصبح « ميشيل فاراداى » مدير الجمعية الملكية بلندن شغوفا بالمجالات الكهروستاتيكية ، وتأثير المواد العازلة المختلفة على هذه المجالات . وهذه المشكلة كانت تشغله خلال السنوات العشر السابقة عندما كان منشغلا بتجارب عمله المشهور على قوة الدفع الكهربية المنتجة بالحث ، والتى سنناقشها فى الفصل العاشر . بانتهاء هذا البحث كان لديه زوجا من الكرات المعدنية متحدتى المركز ومنشأة ، بحيث كانت الخارجية تتكون من نصفى كرة يمسكان معا بمتانة . وجهز أيضا قشرا من مواد عازلة (أو مواد جزيئاتها ثنائية الكهربية ، « أو ببساطة » ثنائية الكهربية) والتى يمكنها شغل كل الحجم المحصور بين الكرتين متحدتى المركز . وسوف لانستفيد حاليا بما توصل اليه عن المواد العازلة ، لأننا سنقصر اهتمامنا على المجالات فى الفضاء الحر ، حتى الفصل الخامس . وعندئذ سنرى أن المواد التى استخدمها ستصنف على أنها عوازل مثالية .

بعدئذ فان تجربته تتركب أساسا من الخطوات التالية :

١ ـ عندما كانت الأدوات غير مُركبة أعطت الكرة الداخلية شحنة موجبة معروفة .

٢ ـ بعد ذلك أمسك نصفى الكرة معا حول الكرة المشحونة بحيث كان هناك حوالى 2cm من مواد عازلة بينهما .

٣ ـ فُرغت شحنة الكرة الخارجية بتوصيلها لحظيا بالأرض .

٤ ـ فُصلت الكرة الخارجية بعناية ، باستخدام أدوات مصنوعة من مادة عازلة حتى لاتضطرب الشحنة المنتجة بالحث عليها ، ثم قيست الشحنة السالبة المنتجة بالحث على كل نصف كرة .

ولقد وجد « فاراداى » أن الشحنة الكلية على الكرة الخارجية كانت مساوية فى **المقدار** للشحنة الأصلية الموضوعة على الكرة الداخلية ، وكان هذا صحيحا مهما كانت المادة العازلة التى تفصل الكرتين . واستنتج أن هناك نوعا ما من « الازاحة » من الكرة الداخلية الى الخارجية ، والتى كانت لاتعتمد على الوسط ، ونحن الآن نشير الى هذا التدفق على أنه **إزاحة** ، **تدفق إزاحة** « أو ببساطة » **تدفق كهربى** .

أيضا بينت تجربة « فاراداى » ، بالطبع ، أن شحنة موجبة أكبر على الكرة الداخلية أنتجت بالتبعية شحنة سالبة أكبر على الكرة الخارجية ، مؤدية الى تناسب مباشر بين الازاحة الكهربية والشحنة على الكرة الداخلية . ويعتمد ثابت التناسب على نظام الوحدات المستخدم . ونحن محظوظون فى استخدامنا لوحدات SI لأن الثابت هو واحد . فاذا رُمز للتدفق الكهربى بـ Ψ وللشحنة الكلية على الكرة الداخلية بـQ ، فان لتجربة « فاراداى »

$$\boxed{\Psi = Q}$$

ويُقاس التدفق الكهربى Ψ بالكولوم .

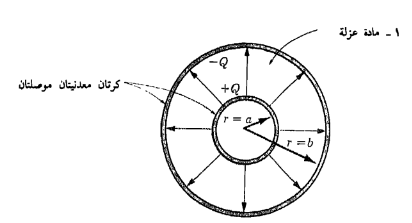
ونستطيع أن نحصل على معلومات كمية أكثر باعتبار كرة داخلية نصف قطرها a وكرة خارجية نصف قطرها b مع شحنات Q و $-Q$ بالترتيب (شكل ٣ ـ ١) . ومسارات التدفق الكهربى Ψ الممتدة من الكرة الداخلية الى الكرة الخارجية مبينة بخطوط الانسياب الموزعة بتماثل ، والمرسومة نصف قطريا من كرة الى الأخرى .

وينتج عند سطح الكرة الداخلية Ψ coulombs من التدفق الكهربى بواسطة شحنة $Q\ (= \Psi)$ coulombs وموزعة بانتظام على سطح له مساحة $4\pi a^2$ m^2 كثافة التدفق عند هذا السطح هى $\Psi / 4\pi a^2$ أو $Q/4\pi a^2$ C/m وهذه كمية جديدة هامة .

وكثافة التدفق الكهربى ، مقاسة بالكولوم لكل متر مربع (أحيانا توصف كخطوط لكل متر مربع » ، لأن كل خط ناشىء عن كولوم واحد) ، تعطى الحرف D ، الذى اختير فى الأصل بسبب التسميات البديلة ، **كثافة تدفق الازاحة أو كثافة الازاحة** . على أن كثافة التدفق الكهربى تصف أكثر ، وسنلتزم باستخدام ذلك التعبير .

وكثافة التدفق الكهربى D هى مجال متجه ، وهى عضو من طائفة « كثافة التدفق » فى المجالات المتجهة ، ويقابلها طائفة « مجالات القوى » والتى تشتمل على شدة المجال الكهربى E . واتجاه D عند نقطة هو اتجاه خطوط التدفق عند تلك النقطة ، ويعطى المقدار بعدد خطوط التدفق العابرة لسطح عمودى على الخطوط مقسوما على مساحة السطح .

وبالرجوع ثانية لشكل ٣ ـ ١ فان كثافة التدفق الكهربى تكون فى اتجاه نصف القطر ولها القيمة :



شكل ٣ ـ ١ ـ التدفق الكهربى فى المنطقة بين زوج من الكرات المشحونة متحدة المركز . واتجاه ومقدار D ليسا دوال فى العازل بين الكرتين .

$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\,\mathbf{a}_r \qquad \text{كرة داخلية}$$

$$\mathbf{D}\Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2}\,\mathbf{a}_r \qquad \text{كرة خارجية}$$

وعند مسافة نصف قطرية r ، حيث $a \leqslant r \leqslant b$ ،

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\mathbf{a}_r$$

فاذا جعلنا الآن الكرة الداخلية تصير أصغر وأصغر ، مع استبقاء الشحنة Q ، فانها تصبح شحنة نقطية فى النهاية ، ولكن كثافة التدفق الكهربى عند نقطة على بعد r meters من الشحنة النقطية مازالت تعطى بـ

(١) $$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

لأن Q من خطوط التدفق تكون موجهة بتماثل خارجة من النقطة ومارة خلال سطح كروى تخيلى مساحته $4\ \pi r^2$

وهذه النتيجة يجب أن تقارن مع قسم ٢ ـ ٢ ، المعادلة (١٠) ، لشدة المجال الكهربى نصف القطرية لشحنة نقطية فى فضاء حر ،

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

ولذلك ففى فضاء حر ،

(٢) $$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$ (فضاء حر فقط)

برغم أن (٢) تطبق للفضاء الحر فقط ، فانها ليست مقصورة فقط على مجال شحنة نقطية . فلتوزيع حجمى عام لشحنات فى الفضاء الحر

(٣) $$\mathbf{E} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho\, dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$ (فضاء حر فقط)

حيث إسْتنبطت هذه العلاقة من مجال شحنة نقطية واحدة . وبطريقة مماثلة ، تؤدى (١) الى

(٤) $$\mathbf{D} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho\, dv}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R$$

ولذا فان (٢) صحيحة لأى تشكيل للشحنة فى الفضاء الحر ، ونحن سنعتبر (٢) كمعرفة لـ D فى الفضاء الحر .

وكتحضير لدراسة العوازل فيما بعد ، قد يكون من المستحسن الاشارة الآن الى أن ، نتائج « فاراداى » تبين أن (١) مازالت مطبقة بالنسبة لشحنة نقطية مغمورة فى وسط عازل مثالى لانهائى وعلى ذلك تطبق (٤) . ومع ذلك المعادلة (٣) غير مطبقة ، ولذلك فان العلاقة بين D و E ستكون أكثر تعقيداً بقدر بسيط من (٢) .

ولأن D تتناسب مباشرة مع E فى الفضاء الحر ، فانه لن تكون هناك ضرورة حقيقية لادخال رمز جديد . ونحن نعمل هذا لأسباب عدة : أولا ، لأن D مرتبطة بفكرة التدفق ، التى هى فكرة هامة جديدة ، ثانيا ، لأن مجالات الـ D التى سنحصل عليها ستكون أسهل قليلا من المجالات المناظرة لـ E حيث أن ϵ_0 لاتظهر . وأخيرا ، أنها تساعد فى أن تصبح معتاد بعض الشىء على D قبل تطبيقها على المواد العازلة فى الفصل الخامس .

ت ٣ ـ ١ ـ شحنة نقطية قيمتها 15π nC موضوعة عند نقطة الأصل . عين التدفق الكهربى الكلى الذى يترك : (أ) سطح كرة نصف قطرها 5m ممركزة عند النقطة $(1, -1, 2)$ ، (ب) الوجه العلوى $(z = 0.5)$ لمكعب ضلعه 1m ، ممركز عند نقطة الأصل ، وحوافه موازية لمحاور الاحداثيات ، (ج) ذلك الجزء من إسطوانة دائرية قائمة $\rho = 5$ ، الذى له $z \geqslant 0$.

الاجابة : 23.6nC , 7.85nC , 47.1nC

ت ٣ ـ ٢ ـ أوجد |D| عند $P(3, -4, 5)$ فى مجال : (أ) شحنة نقطية مقدارها 0.2μC عند نقطة الأصل ، (ب) خط شحنة منتظم ذى 30nC/m على المحور z ، (جـ) شحنة سطحية منتظمة ذات 0.07πmC/m^2 فى المستوى $x = 5$.

الاجابة : 318pC/m^2 , 955pC/m^2 , 110.0pC/m^2 .

٣ ـ ٢ ـ قانون جاوس :

يمكن تجميع نتائج تجارب « فاراداى » بالكرات المتحدة المركز كقانون تجريبى ، بذكر أن التدفق الكهربى المار خلال أى سطح كروى تخيلى واقع بين الكرتين الموصلتين يساوى الشحنة المحصورة داخل السطح التخيلى . وهذه الشحنة المحصورة موزعة على سطح الكرة الداخلية ، أو أنه يمكن تركيزها كشحنة نقطية عند مركز الكرة التخيلية . وكيفما كان ، لأن كولوم واحد من التدفق الكهربى ينتج من كولوم واحد من الشحنة ، فانه لافرق أن يكون الموصل الداخلى مكعبا ، أو مفتاح باب نحاس ، وستظل الشحنة الكلية المنتجة بالحث على الكرة الخارجية كما هى . وبالتأكيد سوف تتغير كثافة التدفق عن توزيعها المتماثل السابق الى هيئة ما غير معلومة ، ولكن $+A$ coulombs على أى موصل داخلى سوف تُنتج شحنة منتجة بالحث قيمتها $-Q$coulombs على الكرة المحيطة . وبالتقدم خطوة أكثر ، فيمكننا أن نستبدل الآن علبة حساء مفرغة (ولكن مغلقة تماما) بنصفى الكرة الخارجين . Q coulombs على مفتاح الباب النحاسى سوف

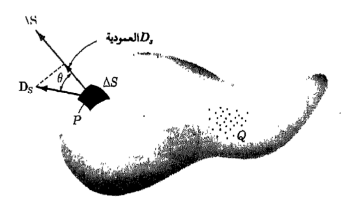
ينتج $Q = \Psi$ خطا للتدفق الكهربى وتولد بالحث Q coulombs — على العلبة الصفيح .(1)

وهذه التعميمات لتجربة « فاراداى » أدت الى النص الآتى ، « والذى يعرف بقانون جاوس »

« التدفق الكهربى المار خلال أى سطح مغلق ، يساوى الشحنة الكلية المحتواة بذلك السطح »

وإسهام جاوس ـ وهو واحد من أعظم الرياضيين الذين أنجبهم العالم على مر العصور ـ لم يكن فى الواقع فى ذكر القانون كما هو مذكور عندنا آنفا ، ولكن فى إعطاء صيغة رياضية لهذا النص والذى سنحصل عليه الآن .

دعنا نتخيل توزيعا للشحنة ، مبينة كسحابة من الشحنات النقطية فى شكل ٣ ـ ٢ ، محاطة بسطح مغلق له أى شكل . وقد يكون السطح المغلق سطح مادة ما حقيقية ، ولكن أكثر تعميما ، هو أى سطح مغلق نرغب فى تصوره . فاذا كانت الشحنة الكلية هى Q coulombs ، فان Q من التدفق الكهربى سوف تمر خلال السطح المحتوى . وعند أى نقطة على السطح سيكون لمتجه كثافة التدفق الكهربى D قيمة ما D_s ، حيث الرمز السفلى s لمجرد التذكرة بأن D يجب أن تقيم عند السطح و D_s ستتغير عامة فى المقدار والاتجاه من نقطة الى أخرى على السطح .



شكل ٣ ـ ٢ ـ كثافة التدفق الكهربى D_s عند P نتيجة شحنة Q . والتدفق الكلى المار خلال ΔS هو $D_s.\Delta S$.

يجب علينا الآن أن نعتبر طبيعة عنصر تزايدى من السطح . فعنصر المساحة التزايدى ΔS هو قريب جدا من جزء من سطح مستوى ، والوصف الكامل لعنصر السطح هذا يتطلب ليس فقط تقريرا عن مقدارها ΔS ولكن أيضا عن اتجاهها فى الفراغ .

(1) إذا كان الحساء عازلا تاما ، فأيضا كان من الممكن تركه فى العلبة دون أى فرق فى النتائج .

وبعبارة أخرى ، فان عنصر السطح التزايدى هو كمية متجهة . والاتجاه الأوحد الذى يمكن أن يرتبط بـ ΔS هو اتجاه العمود على المستوى الذى يمس السطح عند النقطة المعنية . وهناك بالطبع ، اثنان من هذه الأعمدة ، ويمكن إزالة الغموض بتحديد العمود الخارج ، كلما كان السطح مغلقا ، وهنا فان « خارجا » لها معنى محدد .

اعتبر عنصرا تزايديا للسطح ΔS عند أى نقطة P ودع $\mathbf{D}_s$ تعمل زاوية θ مع ΔS ، كما هو مبين بشكل ٣ ـ ٢ فالتدفق عبر ΔS يكون حينئذ حاصل ضرب المركبة العمودية لـ $\mathbf{D}_s$ و ΔS ،

$$\Delta\Psi = \text{التدفق الذى يعبر } \Delta S = D_{S,\,\text{norm}}\,\Delta S = D_S \cos\theta\;\Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta\mathbf{S}$$

حيث نستطيع تطبيق تعريف الضرب بالنقطة ، الذى أُظهر فى الفصل الأول .

والتدفق الكلى المار خلال السطح المغلق يحصل عليه بجمع المساهمات التفاضلية العابرة لكل عنصر سطح ΔS .

$$\Psi = \int d\Psi = \int_{\text{سطح مغلق}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

التكامل الناتج ، هو تكامل على سطح مغلق ، ولأن العنصر السطحى dS يشمل دائما تفاضلات إحداثيين ، مثل $dx\,dy$ أو $\rho d\phi\, d\rho$ أو $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ ، فان التكامل هو تكامل ثنائى . وعادة ما تستخدم علامة تكامل واحدة فقط للاختصار ، وسنضع S تحت علامة التكامل لتشير الى تكامل سطحى ، مع أن ذلك فعلا ليس ضروريا حيث أن التفاضلى dS هو الاشارة التلقائية للتكامل السطحى . وكاصطلاح أخير توضع دائرة صغيرة على علامة التكامل نفسها لتشير إلى أن التكامل مؤدى على سطح مغلق . وغالبا ما يسمى هذا السطح « سطح جاوسى » . وعلى ذلك فان لدينا الصورة الرياضية لقانون جاوس ،

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \text{الشحنة المحتواه} = Q \qquad (٥)$$

الشحنة المحصورة يمكن أن تكون عدة شحنات نقطية ، وفى هذه الحالة

$$Q = \Sigma Q_n$$

أو خط شحنة

$$Q = \int \rho_L\, dL$$

أو شحنة سطحية $$Q = \int_S \rho_S \, dS$$

أو توزيع حجمى للشحنة $$Q = \int_{\mathrm{vol}} \rho \, dv$$

وعادة تستخدم الصورة الأخيرة ، ويجب أن نتفق الآن أنها تمثل أيا من أو كلا من الصور الأخرى . وبهذا الفهم يمكن كتابة قانون جاوس بدلالة توزيع الشحنة كما يلى :

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathrm{vol}} \rho \, dv \qquad (٦)$$

وهو نص رياضى يعنى ببساطة أن التدفق الكهربى الكلى خلال أى سطح مغلق يساوى الشحنة المحصورة .

ولتوضيح تطبيق قانون جاوس ، دعنا نحقق نتائج تجربة « فاراداى » بوضع شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل فى نظام إحداثيات كروى ، وباختيار سطحنا المغلق ككرة نصف قطرها a . ولقد وجدنا أن شدة المجال الكهربى للشحنة النقطية هى

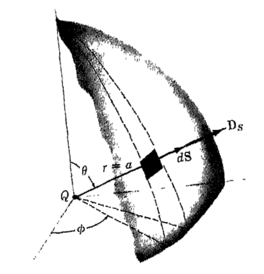
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

وحيث أن

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

فعندنا ، كما سبق ،

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$



شكل ٣-٣ تطبيق قانون جاوس على مجال شحنة نقطية Q على سطح كروى مغلق نصف قطره a. $\mathbf{D}$ فى كل موضع عمودية على السطح الكروى ولها قيمة ثابتة عند كل نقطة عليه .

عند سطح الكرة ،

$$\mathbf{D}_S = \frac{Q}{4\pi a^2}\,\mathbf{a}_r$$

والعنصر التفاضلى للمساحة على سطح كروى هو ، فى الإحداثيات الكروية من الفصل الأول ،

$$dS = r^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta = a^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta$$

أو

$$d\mathbf{S} = a^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta\, \mathbf{a}_r$$

والمكامل هو

$$\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta\, \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin\theta\, d\phi\, d\theta$$

مؤديا إلى التكامل السطحى المغلق

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta\, d\phi\, d\theta$$

وقد اختيرت النهايات على التكامل لكى يعمل التكامل على كل سطح الكرة مرة واحدة[1] . ويعطى التكامل

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta\, 2\pi\, d\theta = \frac{Q}{2}(-\cos\theta)\Big]_0^{\pi} = Q$$

ونحصل على نتيجة تبين أن Q كولوم من التدفق الكهربى تعبر السطح ، كما يجب ، حيث أن الشحنة المحصورة هى Q كولوم .

يحتوى القسم التالى أمثلة لتطبيق قانون جاوس على مسائل ذات تماثل هندسى بسيط ، وذلك بغرض إيجاد شدة المجال الكهربى .

ت ٣ - ٣ - احسب التدفق الكهربى الكلى الخارج من السطح الاسطوانى $\rho = 4.5$ و $z = \pm 3.5$ إذا كان تشكيل الشحنة : (أ) 2C شحنات نقطية على المحور x عند $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (ب) خط شحنة على المحور x ، $\rho_L = 2\cos 0.1x$ C/m (جـ) شحنة سطحية ، $\rho_s = 0.1\rho^2$ C/m^2 ، على المستوى $z = 0$.

---

(١) لاحظ أنه إذا غطت كل من θ و ϕ المدى من o إلى 2π فإن السطح الكروى يغطى مرتين .

الإجابة : $64.4C, 17.40C, 18.00$.

ت ٣ ـ ٤ ـ أوجد الشحنة الكلية الواقعة داخل الكرة $r = 2$ إذا كانت D تساوى (أ) $\mathbf{a}_r/r^2$ ، (ب) $\mathbf{a}_r/r$ ، (جـ) $[(\sin\theta)/r]\,\mathbf{a}_r + \{[\cos\theta\,(\ln r)]/r\}\mathbf{a}_\theta$.

الاجابة : $12.57C$; $25.1C$; $19.74C$

٣ ـ ٣ ـ تطبيق قانون جاوس :

بعض التوزيعات المتماثلة للشحنة :

دعنا الآن نعتبر كيف يمكننا استخدام قانون جاوس(٣ ـ ٢٢)

$$\boxed{Q = \int_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}}$$

لتعيين D_s إذا كان توزيع الشحنة معروفا . وهذا مثال لمعادلة تكاملية تظهر فيها الكمية المجهولة المطلوب تعيينها داخل التكامل .

والحل سهل ، إذا استطعنا أن نختار سطحا مغلقا يحقق شرطين :

١ ـ D_s فى كل موضع إما عمودية أو مماسة للسطح المغلق ، بحيث يصبح $\mathbf{D}_s.\,d\mathbf{S}$ إما $D_s\ dS$ أو صفرا ، بالترتيب .

٢ ـ على ذلك الجزء من السطح المغلق الذى عليه $\mathbf{D}_s.d\mathbf{S}$ ليست صفرا ، يكون D_s = ثابت .

ويتيح لنا هذا أن نستبدل ضرب المقياسيات D_s و dS بالضرب بالنقطة . وأن نخرج حينئذ D_s خارج علامة التكامل . ويكون التكامل المتبقى هو $\int_s dS$ على ذلك الجزء من السطح المغلق الذى تعبره D_s عموديا ، وهذا ببساطة هو مساحة هذا القسم من ذلك السطح .

ومعرفة تماثل المسألة « فقط» يمكننا من اختيار مثل هذا السطح المغلق ، وهذه المعرفة يمكن بسهولة الحصول عليها بتذكر أن شدة المجال الكهربى بسبب شحنة نقطية موجبة توجه نصف قطريا خارجة من الشحنة النقطية .

دعنا نعتبر مرة أخرى شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل فى نظام إحداثيات كروى ونستقر على سطح مغلق مناسب الذى سيحقق المطلبين المدرجين آنفا . وواضح أن السطح المطلوب هو سطح كروى ، ممركز عند نقطة الأصل وله « أى نصف قطر » r . D_s فى كل موضع عمودية على السطح ، D_s لها نفس القيمة عند كل نقط السطح .

وعلى ذلك فلدينا بالترتيب ،

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint_{sph} D_S\, dS$$

$$= D_S \oint_{sph} dS = D_S \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 4\pi r^2 D_S$$

ومن ثمّ

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

لأن r قد يكون لها أى قيمة ولأن $\mathbf{D}_s$ موجهة نصف قطريا للخارج

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\mathbf{a}_r \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\mathbf{a}_r}$$

والتى تتفق مع نتائج الفصل الثانى . والمثال لم يضف شيئا ، ويمكن أن يثار الاعتراض أنه كان علينا أن نعرف أن المجال متماثل وموجه نصف قطريا للخارج قبل أن نتمكن من الحصول على إجابة . هذا صحيح ، وذلك يدع علاقة التربيع العكسى على أنه التحقيق الوحيد الذى حُصل عليه من قانون جاوس . مع ذلك فقد خدم المثال توضيح طريقة يمكن تطبيقها على مسائل أخرى ، متضمنة عديدا ، مما لايقدر قانون كولوم فى الغالب تقديم إجابة لها .

هل هناك أى أسطح أخرى يمكن أن تحقق شرطينا ؟ . يجب على الطالب أن يقرر أن أسطحا سهلة مثل المكعب والاسطوانة لاتحقق المطلوبات .

وكمثال ثان ، دعنا نعتبر مرة أخرى توزيع خط الشحنة المنتظم ρ_L الواقع على طول المحور z والممتد من $-\infty$ الى $+\infty$. ويجب علينا أولا أن نحصل على معلومات عن تماثل المجال ، وقد نستطيع أن نعتبر هذه المعلومات كاملة عندما تكون الاجابة على السؤالين التاليين معروفة :

١ ـ مع أى إحداثيات يتغير المجال (أو فى أى المتغيرات تكون D دالة) ؟

٢ ـ أى مركبات D موجودة ؟

ونفس السؤالين طُرحا عندما استخدمنا قانون كولوم لحل هذه المسألة فى قسم ٢ ـ ٥ . وحينذاك وجدنا أن المعرفة التى حصل عليها من إجابتهما مكنتنا من عمل تكامل أسهل بكثير . وكان يمكن أن تُحل المسألة (وقد كان) بدون أخذ أى تماثل فى الاعتبار ولكن ذلك كان اكثر صعوبة .

على أنه عند استخدام قانون جاوس ، يظهر أنها ليست مسألة استخدام التماثل لتبسيط الحل ، لأن تطبيق قانون جاوس يعتمد على التماثل ، واذا لم نستطع أن نبين أن التماثل موجود فإننا لانستطيع استخدام قانون جاوس للحصول على حل . ولذا يصبح السؤالان السابقان « حتميين » .

ومن مناقشتنا السابقة لخط الشحنة المنتظم ، يتضح أن المركبة نصف القطرية لـ D هى الوحيدة الموجودة ، أو

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$$

وهذه المركبة دالة فى ρ فقط ،

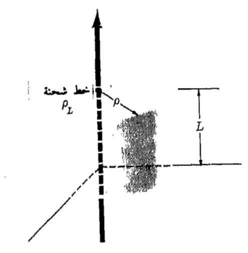
$$D_\rho = f(\rho)$$

والآن يكون اختيار سطح مغلق أمرا بسيطا ، لأن السطح الاسطوانى هو السطح الوحيد الذى تتعامد عليه D_ρ فى كل موضع ، ويمكن أن يغلق بأسطح مستوية عمودية على المحور z . ويبين شكل ٣ ـ ٤ سطحا اسطوانيا دائريا قائما نصف قطره ρ ممتدا من $z = 0$ إلى $z = L$.

ويتطبيق قانون جاوس :

$$Q = \oint_{\text{دائرى}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S \int_{\text{جوانب}} dS + 0 \int_{\text{قمة}} dS + 0 \int_{\text{قاع}} dS$$

$$= D_S \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz = D_S 2\pi\rho L$$



شكل ٣ ـ ٤ السطح الجاوسى لخط شحنة لانهائى هو اسطوانة دائرية قائمة طولها L نصف قطرها ρ. D ثابتة فى المقدار وتتعامد فى كل موضع على السطح الاسطوانى ؛ D توازى أوجه النهايات .

فنحصل على

$$D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho L}$$

وبدلالة كثافة الشحنة ρ_L تكون الشحنة الكلية المحصورة

$$Q = \rho_L L$$

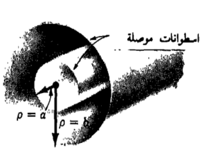
معطية

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

أو

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

توضح المقارنة مع قسم ٢ ـ ٥ ، المعادلة (١٩) ، أن النتيجة الصحيحة قد حُصل عليها بمجهود أقل بكثير . وبمجرد اختيار السطح المناسب ، يؤول التكامل عادة الى كتابة مساحة السطح الذى تكون D متعامدة عليه .



شكل ٣ ـ ٥ الاسطوانتان الموصلتان المتحدى المحور المكونتان لكبل محورى تعطيان كثافة تدفق كهربى فيما بين الاسطوانتين معطى بـ $D_\rho = a\rho_s / \rho$

ومسألة الكبل المحورى متطابقة تقريبا مع تلك التى لخط الشحنة ، وهى مثال يصعب حله للغاية من وجهة نظر قانون كولوم . افترض أن لدينا موصلين اسطوانتيين متحدى المحور ، الداخلى نصف قطره a والخارجى نصف قطره b ، وكلاهما لانهائى الامتداد (شكل ٣ ـ ٥) . وسنفترض توزيع شحنة ρ_s على السطح الخارجى للموصل الداخلى .

وتبين لنا اعتبارات التماثل أن المركبة D_ρ فقط هى الموجودة وأنها يمكن أن تكون دالة فى ρ فقط . ولذا فان اسطوانة دائرية قائمة طولها L ونصف قطرها ρ ، حيث $a < \rho < b$ ، تختار بالضرورة لتكون السطح الجاوسى ، ومباشرة نحصل على

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

والشحنة الكلية على طول L من الموصل الداخلى هى

$$Q = \int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_S a \, d\phi \, dz = 2\pi a L \rho_S$$

ومنها نحصل على

$$D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \qquad \mathbf{D} = \frac{a\rho_S}{\rho}\mathbf{a}_\rho \qquad (a < \rho < b)$$

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بدلالة الشحنة لكل وحدة أطوال ، لأن الموصل الداخلى له $2\pi a\rho_S$ كولوم على طول متر ، ولهذا يجعل $\rho_L = 2\pi a \ \rho_S$

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

والحل له صورة مطابقة لتلك التى لخط شحنة لانهائى .

ونتيجتنا مفيدة أيضا فى حالة كبل محورى محدود الطول ، ومفتوح عند النهايتين ، بشرط أن يكون الطول L أكبر مرات عديدة من نصف القطر b بحيث لاتؤثر الظروف غير المتماثلة عند النهايتين بوضوح على الحل . ويطلق على مثل هذا الجهاز « المكثف المحورى » . وسَيظهر كل من الكبل المحورى ، والمكثف المحورى كثيرا فى العمل الذى يلى .

ولأن كل خط تدفق كهربى يبدأ من الشحنة على الاسطوانة الداخلية يجب أن ينتهى على شحنة عكسية على السطح الداخلى للاسطوانة الخارجية ، فان الشحنة الكلية على ذلك السطح يجب أن تكون

$$Q_{\text{outer cyl}} = -2\pi a L \rho_{S,\ \text{inner cyl}}$$

والشحنة السطحية على الاسطوانة الخارجية نجد أنها

$$2\pi b L \rho_{S,\ \text{outer cyl}} = -2\pi a L \rho_{S,\ \text{inner cyl}}$$

أو

$$\rho_{S,\,\text{outer cyl}} = -\frac{a}{b}\rho_{S,\,\text{inner cyl}}$$

ماذا سيحدث إذا استخدمنا اسطوانة نصف قطرها ρ ، $\rho > b$ ، كسطح جاوسى ؟ عندئذ ستصبح الشحنة الكلية المحصورة صفرا ، لأن هناك شحنات متساوية ومتضادة على الاسطوانتين الموصلتين . على ذلك

$$0 = D_S 2\pi\rho L \qquad (\rho > b)$$
$$D_S = 0 \qquad (\rho > b)$$

ويمكن الحصول على نتيجة مطابقة بالنسبة لـ $\rho < a$ وهكذا فان كابل أو المكثف المحورى ليس له مجال خارجى (لقد أثبتنا أن الموصل الخارجى هو « درع ») وأنه لايوجد هناك مجال داخل الموصل المركزى .

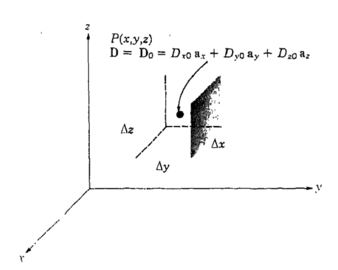
ت ٣ ـ ٥ ـ الأسطح الكروية r تساوى 2 , 4 و 6m تحمل كثافات شحنة سطحية مقاديرها 100 , 30 — و $6\mu\text{C/m}^2$ بالترتيب . أوجد $|\mathbf{D}|$ عند r تساوى : (أ) 1m ، (ب) 3m ، (جـ) 5m ، (د)8m .

الاجابة : $0\mu\text{C/m}^2$; $44.4\mu\text{C/m}^2$; $3.20\mu\text{C/m}^2$; $2.12\mu\text{C/m}^2$.

٣ ـ ٤ ـ تطبيق قانون جاوس .

عنصر حجم تفاضلى

سنطبق الآن قانون جاوس لنوع مختلف قليلا من المسائل ـ وهو ليس له أى تماثل على الاطلاق . وعند النظرة الأولى قد يبدو أن هذه الحالة لاأمل فيها ، لأنه بدون تماثل لايمكن اختيار سطح جاوسى بسيط بحيث تكون المركبة العمودية لـ D ثابتة ، أو صفرا فى كل موضع على السطح وبدون مثل هذا السطح ، لايمكن إيجاد قيمة التكامل . وهناك طريق واحد لتخطى هذه الصعاب وهو أن نختار سطحا مغلقا صغيرا جدا بحيث تكون D ثابتة تقريبا على السطح ، ويمكن للتغير البسيط فى D أن يُمثل بقدر كاف باستخدام الحدين الأولين لمفكوك متسلسلة تيلور (Taylor's series) بالنسبة لـ D . وستصبح النتيجة أكثر قُربا من الصحة كلما نقص الحجم المحصور داخل السطح الجاوسى ، ونهدف فى النهاية بأن نسمح لهذا الحجم أن يؤول الى الصفر .



شكل ٣ - ٦ سطح تفاضلى - الحجم حول النقطة P مستخدم لبحث معدل التغير الفراغى لـ D بجوار P

ويختلف هذا المثال أيضا عن سابقيه فى أننا سوف لانحصل على قيمة D كإجابة لنا ، ولكن بدلا من ذلك نحصل على معلومات بالغة القيمة عن طريق تغير D فى منطقة سطحنا الصغير . وهذا يؤدى مباشرة الى احدى معادلات ماكسويل (Maxwell's equations) الأربع التى هى أساسية لكل النظرية الكهرومغناطيسية .

دعنا نعتبر أن نقطة P ، مبينة فى شكل ٣ - ٦ ، معينة الوضع بنظام إحداثيات كرتيزى . وقيمة D عند النقطة P يمكن التعبير عنها فى المركبات الكرتيزية : $\mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$. ونختار لسطحنا المغلق الصندوق الصغير ، المتعامد ، ممركز عند P ، وله أضلاع أطوالها Δx , Δy و Δz ، ونطبق قانون جاوس ،

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q}$$

ولكى نوجد قيمة التكامل على السطح المغلق ، يجب أن يقسم التكامل إلى ستة تكاملات واحدا لكل وجه ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} + \int_{\text{left}} + \int_{\text{right}} + \int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}}$$

ولنختبر أولها بالتفصيل . حيث أن العنصر السطحى صغير جدا فان D تكون ثابتة أساسا (على هذا الجزء من السطح الكلى المغلق) و

$$\int_{\text{front}} \doteq \mathbf{D}_{\text{front}} \cdot \Delta\mathbf{S}_{\text{front}}$$

$$\doteq \mathbf{D}_{\text{front}} \cdot \Delta y\ \Delta z\ \mathbf{a}_x$$

$$\doteq D_{x,\,\text{front}} \Delta y\ \Delta z$$

حيث علينا فقط أن نقرب قيمة D_x عند وجه المقدمة هذا . ووجه المقدمة يكون على مسافة$\Delta x/2$ من P ، ولهذا

$$D_{x,\text{front}} \doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{rate of change of } D_x \text{ with } x$$

$$\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حيث D_{x0} هى قيمة D_x عند P وحيث يجب أن نستخدم التفاضل الجزئى لنعبر عن معدل التغير (rate of change) مع x، حيث أن D_x عامة تتغير أيضا مع y و z . وكان يمكن الحصول على هذا التعبير بطريقة منهجية اكثر باستخدام الحد الثابت والحد المحتوى على المشتقة الأولى فى مفكوك متسلسلة تايلور لـ D_x بجوار P

لدينا الآن

$$\int_{\text{front}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\,\Delta z$$

ولنعتبر الآن التكامل على الوجه الخلفى ،

$$\int_{\text{back}} \doteq \mathbf{D}_{\text{back}}\cdot\Delta\mathbf{S}_{\text{back}}$$

$$\doteq \mathbf{D}_{\text{back}}\cdot(-\Delta y\,\Delta z\,\mathbf{a}_x)$$

$$\doteq -D_{x,\text{back}}\Delta y\,\Delta z$$

و

$$\int_{\text{back}} \doteq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\,\Delta z$$

معطية

$$D_{x,\text{back}} \doteq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

فاذا جمعنا هذين التكاملين ، يكون لدينا

$$\int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

وبنفس الأسلوب تماما ، نجد أن

$$\int_{\text{right}} + \int_{\text{left}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

و

$$\int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ويمكن جمع هذه النتائج لتعطى

$$\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

أو

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \Delta v \qquad (٧)$$

والتعبير هو تقريب يصبح أحسن كلما تصبح Δv أصغر ، وفى القسم التالى سندع الحجم Δv يقترب من الصفر . وحاليا ، قد طبقنا قانون جاوس على السطح المغلق المحيط بعنصر الحجم Δv وكنتيجة حصلنا على التقريب (٧) الذى ينص على

الشحنة المحتواه فى الحجم Δv

$$\doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \times \Delta v \qquad (٨)$$

وكمثال ، إذا كانت $\mathbf{D} = e^{-x} \sin y\, \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y\, \mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ ، فاننا نرى أن

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

وبجمع هذه الحدود عند نقطة الأصل ، مثلا ، نجد ان الشحنة المحصورة فى عنصر حجم صغير هناك يجب أن تقرب من $2\Delta v$. فاذا كان Δv هو 10^{-9}m^3 فان لدينا شحنة محصورة مقدارها 2nC تقريبا .

ت ٣ - ٦ - دع

$$\mathbf{D} = \frac{100xy}{z^2+1}\mathbf{a}_x + \frac{50x^2}{z^2+1}\mathbf{a}_y - \frac{100x^2yz}{(z^2+1)^2}\mathbf{a}_z \qquad \text{C/m}^2$$

واحسب الشحنة الكلية المحصورة فى كرة دقيقة نصف قطرها 1μm ومركزها عند :(أ) *(5,8,1)* ، (ب) *(0,10, — 2)* .

الاجابة : 2.26×10^{-14}C , 8.38×10^{-6}C .

٣ ـ ٥ ـ الانفراج :

سنحصل الآن على علاقة مضبوطة من (٧) ، بأن نسمح لعنصر الحجم Δv بأن يتقلص إلى الصفر . ونكتب هذه المعادلة كمايلى :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \doteq \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

أو ، كنهاية

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

حيث استبدل التقريب بالتساوى . ومن الواضح أن الحد الأخير هو كثافة الشحنة الحجمية ρ ، ولهذا فان

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \rho \qquad (٩)$$

. تحتوى هذه المعادلة على معلومات أكثر من أن تناقش جميعها فى التو ، وسنكتبها كمعادلتين منفصلتين

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \qquad (١٠)$$

و

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \qquad (١١)$$

وسنحتفظ بـ (١١) لتعتبر فى القسم التالى .

لاتتضمن المعادلة (١٠) كثافة شحنة ، وكان يمكن إستخدام طرق القسم السابق على أى متجه A لايجاد $\oint \mathbf{A}.d\mathbf{S}$ لسطح مغلق صغير ، مؤدية الى

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \qquad (١٢)$$

حيث A يمكن أن تمثل سرعة ، تدرج درجة حرارة ، قوة أو أى مجال متجه آخر .

ولقد ظهرت هذه العملية كثيرا فى البحوث الفيزيائية فى القرن الماضى التى لقيت أسما وصفيا « الانفراج »(Divergence) . ويعرف انفراج A بأنه

$$\text{Divergence of } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \qquad (١٣)$$

ويختصر عادة div A ويمكن الحصول على شرح المعنى الفيزيائى لانفراج متجه بشرح العملية المتضمنة فى الطرف الأيمن لـ (١٣) بعناية ، حيث سنعتبر A كعضو فى عائلة كثافة تدفق المتجهات لكى تساعد التفسير الفيزيائى .

« **انفراج متجه كثافة التدفق A** هو الانسياب الخارجى للتدفق من سطح مغلق صغير لكل وحدة حجوم عندما يتقلص الحجم الى الصفر »

والشرح للمعنى الفيزيائى للانفراج والذى أمكن بهذه الصيغة غالبا مايكون مفيدا فى الحصول على معلومات كيفية عن انفراج مجال متجه بدون اللجوء إلى استقصاء رياضى . فمثلا دعنا نعتبر انفراج سرعة الماء فى حوض استحمام ـ بعد أن فُتحت البالوعة ـ التدفق الصافى للماء خلال أى سطح مغلق واقع كُلية داخل الماء يجب أن يكون صفرا ، حيث أن الماء أساسا لايمكن ضغطه ، والماء الداخل والخارج لمناطق مختلفة من السطح المغلق يجب أن يكون متساويا . ولهذا فان انفراج هذه السرعة يساوى صفرا .

على أنه ، إذا اعتبرنا سرعة الهواء فى أنبوبة داخلية والتى ثُقبت لتوها بمسمار ، فنحن ندرك حقيقة أن الهواء يتمدد كلما انخفض الضغط ، ويكون هناك بالتبعية صافى تدفق من أى سطح مغلق واقع داخل الأنبوبة الداخلية . ولذلك فان إنفراج هذه السرعة يكون أكبر من الصفر .

والانفراج الموجب لأى كمية متجهة يدل على منبع لتلك الكمية المتجهة عند تلك النقطة وبالمثل ، الانفراج السالب يدل على بالوعة . لأن إنفراج سرعة الماء آنفا هو صفر ، فانه لايوجد منبع أو بالوعة[1] .
ولكن الهواء المتمدد يُنتج انفراجا موجبا للسرعة ، ويمكن اعتبار كل نقطة داخلية كمنبع . وبكتابة (١٠) بمصطلحنا الجديد ، نحصل على

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad (١٤)$$

وهذا التعبير هو مرة أخرى فى صورة لاتشتمل على كثافة الشحنة . وهو نتيجة لتطبيق تعريف الانفراج (١٣) على عنصر حجم تفاضلى فى **الاحداثيات الكرتيزية** .

واذا اختيرت وحدة حجم تفاضلية $\rho d\,\rho d\phi dz$ فى الاحداثيات الاسطوانية ، أو $r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\phi$ فى الاحداثيات الكروية لحصل على تعبيرات للانفراج متضمنة

(١) باختيارنا لعنصر حجم فى الماء ، فان النقص التدريجى لمستوى الماء مع الزمن سوف يسبب فى النهاية أن يقع عنصر الحجم فوق سطح الماء . وفى اللحظة التى يتقاطع فيها سطح الماء مع عنصر الحجم يكون الانفراج موجبا ويكون الحجم الصغير منبعا . وهذا التعقيد قد تجنبناه فيما سبق بتعيين نقطة داخلية .

مركبات المتجه فى نظام الاحداثيات الخاص بها متضمنة تفاضلات جزئية بالنسبة لمتغيرات هذا النظام . وهذه التعبيرات محصول عليها فى الملحق «أ» ومعطاة هنا للتيسير

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(cartesian)} \tag{١٥}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(cylindrical)} \tag{١٦}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\ D_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{(spherical)} \tag{١٧}$$

وهذه العلاقات مبينة أيضا بداخل غلاف الظهر لسهولة الرجوع اليها .

ويجب ملاحظة أن الانفراج عملية تؤدى على متجه ، ولكن النتيجة كمية مقياسية . ويجب أن نتذكر بطريقة مماثلة بعض الشيء أن الضرب بالنقطة ، أو الضرب المقياسى ، كان ضربا لمتجهين وأدى لنتيجة مقياسية .

لسبب ما ، إنه لخطأ شائع عند مقابلة الانفراج للمرة الأولى أن تضفى صفة اتجاهية للعملية ببعثرة وحدات متجهات مع المشتقات الجزئية . مجرد ما يقوله لنا الانفراج كم من التدفق يكون تاركا لحجم صغير ، وذلك لكل وحدة حجوم ، وليس هناك إتجاه مرتبط به .

ت ٣ ـ ٧ ـ أحسب الانفراج لكل من المجالات المعطاة عند النقطة المبينة :

(أ) P_A $(1,2,3)$ ، (ب) P_B $(1, 1/2\pi, 3)$ ، (جـ) P_C $(2, 1/2\pi, 1/2\pi)$.

الاجابة : 988C/m^3 ، 0 ، 0.0767C/m^3 .

٣ ـ ٦ ـ معادلة ماكسويل الأولى (كهروستاتيكية)

ونود الآن أن ندعم مكاسب القسمين الأخيرين ونقدم شرحا لمعنى عملية «الانفراج» كما يرتبط بكثافة التدفق الكهربى . والتعبيرات الظاهرة هناك يمكن كتابتها

$$\text{div } \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \tag{١٨}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{١٩}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \tag{٢٠}$$

بالصور والمعادلة الأولى هى تعريف الانفراج ، والثانية هى نتيجة تطبيق التعريف على عنصر حجم تفاضلى فى الاحداثيات الكرتيزية معطية لنا معادلة يمكن بها ايجاد قيمة انفراج متجه معبر عنه فى الاحداثيات الكرتيزية ، والثالثة هى مجرد (١١) مكتوبة باستخدام المصطلح الجديد div D . المعادلة (٢٠) هى تقريبا نتيجة واضحة اذا كنا قد حققنا أى ألفة مع مفهوم الانفراج كما هو معرف بـ (١٨) ، لقانون جاوس معطى ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

فلكل وحدة حجوم

$$\frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

وبتقلص الحجم الى الصفر ،

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

سوف نرى div D على اليسار وكثافة الشحنة الحجمية على اليمين ،

$$\boxed{\text{div } \mathbf{D} = \rho} \qquad (٢٠)$$

وهذه أولى معادلات ماكسويل الأربع ، كما تطبق على الكهروستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة . وهى تقرر أن التدفق الكهربى لكل وحدة حجوم التارك لوحدة حجمية متناهية الصغر يساوى بالضبط كثافة الشحنة الحجمية هناك . وهذه المعادلة حرية بتسميتها **الصورة النقطية لقانون جاوس** . وقانون جاوس يربط التدفق التارك لأى سطح مغلق بالشحنة المحصورة ، ومعادلة ماكسويل الأولى تصنع نصا مطابقا على أساس « لكل وحدة حجوم لحجم متناهى الصغر » ، أى عند نقطة . وبتذكر أن الانفراج يمكن أن يعبر عنه كمجموع ثلاثة تفاضلات جزئية ، فان معادلة ماكسويل الأولى توصف أيضا بأنها صورة المعادلة التفاضلية لقانون جاوس ، وبالعكس فان قانون جاوس عُرف بأنه « الصورة التكاملية لمعادلة ماكسويل الأولى » .

وكتوضيح معين ، نعتبر انفراج D كيفيا في منطقة حول خط شحنة (ولكن ليس على خط الشحنة) . فى أى حيز صغير يدخل قدر من خطوط التدفق الكهربى السطح بقدر تركها له ، حيث أنه لاتوجد شحنة داخل الحيز يمكن أن يحط عليها خط تدفق ، ويجب أن يكون انفراج D صفرا . عند كل نقطة فى الفضاء المحيط بهذا الخط من الشحنة المعزول $\text{div}\,D = 0$. (إذا اختيرت نقطة على خط الشحنة نفسه نجد *div D*

لانهائية لأن كثافة الشحنة الحجمية لانهائية ، اى أن ، خط الشحنة يعطى كمية محدودة من الشحنة ولكن لها حجم صفرى) . والاثبات الرياضى البسيط أن الانفراج صفر هو جزء من المسألة رقم ٢٥ .

وليست عملية الانفراج مقصورة على كثافة التدفق الكهربى ، بل يمكن تطبيقها على أى مجال متجه . وسنطبقها على مجالات كهرومغناطيسية عديدة أخرى فى الفصول التالية .

ت ٣ ـ ٨ ـ أوجد تعبيرا لكثافة الشحنة الحجمية التى توجد المجالات :

(أ) $\mathbf{D} = e^{4x}e^{-5y}e^{-2z}(2\mathbf{a}_x - 2.5\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z)$ (ب) $\mathbf{D} = e^{-2z}(2\rho\phi\mathbf{a}_\rho + \rho\mathbf{a}_\phi - 2\rho^2\phi\mathbf{a}_z)$

(جـ) $\mathbf{D} = 2r\sin\theta\sin\phi\mathbf{a}_r + (1/r + r)\cos\theta\sin\phi\mathbf{a}_\theta + (1/r + r)\cos\phi\mathbf{a}_\phi$

الاجابة : $22.5e^{4x}e^{-5y}e^{-2z}$, $4\phi e^{-2z}(\rho^2 + 1)$, $2\sin\theta\sin\phi(2 - 1/r^2)$

٣ ـ ٧ ـ العامل المتجه ∇ ونظرية الانفراج :

إذا ذكرنا أنفسنا مرة أخرى أن الانفراج هو عملية على متجه تعطى نتيجة مقياسية ، مثلما يعطى الضرب بالنقطة لمتجهين نتيجة مقياسية ، فانه يبدو ممكنا أن نجد شيئا يمكن معاملته منهجيا بالنقطة مع D ليعطى المقياسى

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

ومن الواضح ، هذا لايمكن أن يتحقق باستخدام الضرب المقياسى ، الطريقة يجب أن تكون عملية نقطية .

وبهذا فى ذهننا نعرف العامل « دل » (del operator) ∇ كعامل متجه ،

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z} \qquad (٢٢)$$

تظهر عوامل مقياسية مماثلة فى طرق عدة لحل المعادلات التفاضلية حيث كثيرا ماندع D تحل محل d/dx , D^2 تحل محل d^2/dx^2 وهكذا[١] . نتفق على تعريف ∇ (وتُنطق دل) بأنها تعامل دائما كمتجه عادى مع الاستثناء الوحيد الهام أن تنتج مشتقات جزئية بدلا من حواصل ضرب لمقياسيات .

(١) العامل المقياسى D هذا ، الذى سوف لايظهر مرة أخرى ، لايجب أن يخلط مع كثافة التدفق الكهربى .

ونعتبر أن $\nabla \cdot \mathbf{D}$ تعنى

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \cdot (D_x\mathbf{a}_x + D_y\mathbf{a}_y + D_z\mathbf{a}_z)$$

سنعتبر أولا حواصل الضرب المقياسية لوحدات المتجهات ، اسقاط الحدود الصفرية الستة يترك

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(D_x) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z)$$

والآن عند إزالة الأقواس بالتأثير(operating) أو بالتفاضل :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

وهذا معروف بأنه انفراج D ، ولذلك فلدينا

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}}$$

واستخدام $\nabla.\mathbf{D}$ سائدا أكثر جدا من div D مع أن كلا الاستعمالين لهما ميزاتهما . فكتابة $\nabla.\mathbf{D}$ تسمح لنا بالحصول على التفاضلات الجزئية الصحيحة بسهولة وسرعة ، ولكن فى الإحداثيات الكرتيزية فقط ـ كما سنرى فيما يأتى بعد ـ ومن ناحية أخرى div D مُذكِّر ممتاز لشرح المعنى الفيزيائى للانفراج . وسنستخدم التدوين بالعامل $\nabla.\mathbf{D}$ من الآن فصاعدا للدلالة على عملية الانفراج .

والعامل المتجه ∇ لايستخدم فقط مع الانفراج ، ولكن سيظهر فى عديد من العمليات الهامة فيما بعد . وأحدها هو ∇u ، حيث u أى كمية مقياسية ، ويؤدى الى

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

والعامل ∇ ليس له صورة معينة فى نظم الاحداثيات الأخرى . وإذا كنا نعتبر فى الاحداثيات الأسطوانية ، فان $\nabla.\mathbf{D}$ مازالت تدل على انفراج D ، أو

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

حيث أخذ هذا التعبير من القسم ٣ ـ ٥ . وليس لدينا صورة ∇ نفسها لتساعدنا فى إيجاد هذا المجموع من التفاضلات الجزئية . وهذا يعنى أن ∇u ، الذى مازال غير مسمى ،

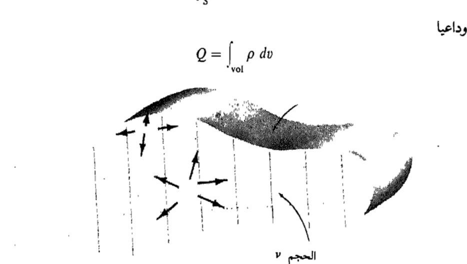
ولكنه مكتوب بسهولة آنفاً فى الاحداثيات الكرتيزية ، لايمكن ان نعبر عنه حاليا فى الاحداثيات الأسطوانية . ولكن مثل هذا التعبير سنحصل عليه عندما نعرف ∇u فى الفصل الرابع .

وسننهى مناقشتنا للانفراج بتقديم نظرية سوف نحتاج اليها عدة مرات فى فصول لاحقة ، وهى **نظرية الانفراج** (divergence theorem) وهذه النظرية تطبق على أى مجال متجه توجد فيه التفاضلات الجزئية الخاصة به ، مع أن أسهلها لنا أن نظهرها بالنسبة لكثافة التدفق الكهربى . ولقد حصلنا عليها فعلا ، وعلينا الآن عمل أكثر قليلا من إظهارها وتسميتها ، مُبتدءاً من قانون جاوس ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

وداعيا

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho \, dv$$



شكل ٣ ـ ٧ تنص نظرية الانفراج على أن التدفق الكلى العابر للسطح المغلق يساوى تكامل انفراج كثافة التدفق فى كل نقط الحجم المحصور . والحجم مبين هنا بقطاع عرضى .

ثم مستبدلا ρ بما تساويه ،

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

نحصل على

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho \, dv = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv$$

التعبيران الأول والأخير ، يُكونان نظرية الانفراج

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv \qquad (٢٣)$$

والتى يمكن أن تُذكر كما يلى :

« تكامل المركبة العمودية لأى مجال متجه على سطح مغلق يساوى تكامل انفراج هذا المجال المتجه فى كل نقط الحجم المحصور بالسطح المغلق »

ومرة أخرى : نؤكد أن نظرية الانفراج صحيحة لأى مجال متجه ، مع أننا حصلنا عليها بالتحديد بالنسبة لكثافة المجال الكهربى D ، وستُتاح لنا فرصة - فيما بعد - لتطبيقها على مجالات مختلفة عديدة . وتستمد فوائدها من الحقيقة أنها تربط تكاملا ثلاثيا **فى كل نقط حجم مابتكامل ثنائى على سطح** ذلك الحجم . وعلى سبيل المثال : فانه من الأسهل جدا أن نبحث عن التسرب فى قنينة مليئة بسائل فائر بفحص السطح عن أن نحسب السرعة عند كل نقطة داخلية .

وتصبح نظرية الانفراج واضحة فيزيائيا ، اذا اعتبرنا حجما v ، مبينا مقطعه العرضى فى شكل ٣ - ٧ ، محاطا بسطح مغلق S . بتقسيم الحجم الى عدد من الحجرات الصغيرة ذات الحجم التفاضلى واعتبار خلية واحدة يوضح أن التدفق المنفرج من مثل هذه الخلية **يدخل أو يتجمع عند** ، الخلايا المجاورة ، إلا إذا اشتملت الخلية على جزء من السطح الخارجى . وبتلخيص ، انفراج كثافة التدفق فى كل نقط حجم يؤدى ، حينئذ ، إلى نفس النتيجة . كتعيين صافى التدفق العابر للسطح المحيط .

وكتحقيق بسيط على صحة هذه النظرية ، اعتبر المجال $\mathrm{D}= 2xy\mathrm{a}_x + x^2\mathrm{a}_y$ ، ومتوازى السطوح القائم المكون بالمستويات $x = 0,1$, $y = 0,2$ و $z = 0,3$. وبايجاد قيمة التكامل السطحى أولا ، نلاحظ أن D موازية للأسطح عند $z = 0,3$ ، ولذلك $\mathrm{D}.d\mathrm{S} = 0$ هناك . وبالنسبة للأسطح الأربعة المتبقية لدينا

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^3\int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0}\cdot(-dy\,dz\,\mathbf{a}_x) + \int_0^3\int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1}\cdot(dy\,dz\,\mathbf{a}_x)$$

$$+ \int_0^3\int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0}\cdot(-dx\,dz\,\mathbf{a}_y) + \int_0^3\int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2}\cdot(dx\,dz\,\mathbf{a}_y)$$

$$= -\int_0^3\int_0^2 (D_x)_{x=0}\,dy\,dz + \int_0^3\int_0^2 (D_x)_{x=1}\,dy\,dz$$

$$-\int_0^3\int_0^1 (D_y)_{y=0}\,dx\,dz + \int_0^3\int_0^1 (D_y)_{y=2}\,dx\,dz$$

على أن $(D_x)_{x=0} = 0$ و $(D_y)_{y=2} = (D_y)_{y=0}$ ، الذى يترك فقط

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^3\int_0^2 2y\,dy\,dz = \int_0^3 4dz = 12$$

ولأن

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 2y$$

يصبح التكامل الحجمى

$$\int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_0^2 2y\, dy\, dz$$

$$= \int_0^3 4dz = 12$$

وبذلك يتم التحقق . وبتذكر قانون جاوس ، نرى أننا أيضا قد عينا شحنة كلية قدرها $12C$ واقعة داخل متوازى المستطيلات هذا .

ت ٣ ـ ٩ ـ أوجد قيمة كل من طرفى نظرية الانفراج للمجال : $G = 2\rho^2(\cos 5\phi a_\phi - \sin 5\phi a\phi + a_z)$ ولحيز على شكل اسفين محدود بـ $\rho \leqslant 5$, $0 \leqslant \phi \leqslant 0.1\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 10$. **الاجابة** : $333 - 333$, $- 333 -$

مراجع مقترحة :

1 - Plonsey, R.and R.E. collin:"Principles and Applications of Electromagnetic Fields", Mc Graw - Hill Book Company, New York, 1961,

فإن مستوى هذا المرجع أعلى الى حد ما من المرجع الحالى ، ولكنه مرجع ممتاز للاطلاع بعد ذلك . ويُظهر قانون جاوس فى الفصل الثانى .

2 - Plonus, M.A.: "Applied Electromagnetics" Mc Graw - Hill Book Company, New York, 1978.

يحتوى هذا الكتاب على وصف تفصيلى لأجهزة عملية كثيرة التى توضح تطبيقات كهرومغناطيسية . وعلى سبيل المثال : طالع المناقشة عن التصوير الجاف (xerography) فى الصفحات pp.95 — 98 كتطبيق كهروستاتيكى .

3 - Skilling, H.H.: "Fundamentals of Electric Waves", 2d ed., John Wiley & Sons. Inc., New York, 1948.

عمليات حساب التفاضل والتكامل للمتجهات موضحة جيدا ويناقش الانفراج على صفحات 22 و 38 وقراءة الفصل الأول مُرغّبة .

(أنظر المراجع المقترحة للفصل الأول) : G.B. و Jr و and R.L Finney و Thomas - 4 نظرية الانفراج مقدمة وموضحة من وجهات نظر مختلفة عديدة فى الصفحات من 718 الى 725

مسائل :

١ ـ وضعت علبة دهان فارغة على منضدة رخامية ، ونزع الغطاء ، وفرغ الجزءان بلمسهما بالأرض . لصق خيط نايلون عازل بمنتصف الغطاء ولصق قطعتا عملة

معدنيتين بالخيط بحيث لايتلامسان . أعطيت القطعة الأولى شحنة 4nC + وفرغت شحنة القطعة الثانية ، ثم أُنزلا فى العلبة حيث عُلقا بعيدا عن الجدران ، مع إحكام وضع الغطاء . ومرة أخرى لُمس خارج العلبة لحظيا بالأرض . ثم فُك الجهاز بعناية باستخدام قفازات وأدوات عازلة (أ) ماهى الشحنات الموجودة على كل من القطع المعدنية الأربع ؟ (ب) إذا كانت القطعة الأولى قد أعطيت شحنة مقدارها $+4\text{nC}$ والقطعة الثانية شحنة مقدارها -2nC — فماذا يصبح النظام النهائى للشحنات ؟

٢ ـ شحنة نقطية مقدارها $20\ \text{nC}$ موضوعة عند $(4,-1,-3)$ ، وخط شحنة منتظم ذو $-25\ \text{nC/m}$ — يقع على طول تقاطع المستويين $x=-4$ و $z=6$ (أ) احسب D عند $(3,1,0)$. (ب) كم هو قدر التدفق الكهربى الذى يترك سطح كرة نصف قطرها 5 ، ممركزة عند نقطة الأصل ؟ (جـ) أعد الجزء (ب) ، إذا كان نصف قطر الكرة هو 10 .

٣ ـ يحتوى السطح المستوى $z=0.5$ فى المنطقة $-1 \leqslant x \leqslant 1$ و $0 \leqslant y \leqslant 2$ على كثافة شحنة $\rho_S = 2x^2 + 5y\text{C/m}^2$ ، وليس هناك شحنة فى أى مكان آخر . كم هو قدر التدفق الكهربى الذى يترك المنطقة المكعبة : $|x|$, $|y|$ و $|z| \geqslant 1$؟ .

٤ ـ يقع خط ـ شحنة منتظم ذو 15nC/m على طول المحور z ، ووضع لوح منتظم الشحنة ذى 4nC/m^2 . عند المستوى $z=1$ (أ) ما هو التدفق الكهربى الكلى التارك للسطح الكروى $r=2$ ؟ . (ب) أوجد D عند النقطة على السطح الكروى حيث $x = 2$. (جـ) أعد الجزء (ب) للنقطة حيث $x=1$, $y=-0.5$ و $z>0$.

٥ ـ إذا كانت $\text{D} = 8xe^{-y}\text{a}_x - 4x^2e^{-y}\text{a}_y\ \mu\ \text{C/m}^2$ ، أوجد التدفق الكلى الخارج من سطح المكعب المكون بـ $|x|$, $|y|$ و $|z| \leqslant 1$.

٦ ـ فى الاحداثيات الأسطوانية ، دَع $\text{D} = (\rho\text{a}_\rho + z\text{a}_z)/\ [4\pi\ (\rho^2 + z^2)^{1.5}]$. عين التدفق الكلى الخارج من : (أ) السطح الأسطوانى اللانهائى الطول $\rho = 7$ ، (ب) الاسطوانة المحدودة، $\rho = 7$ و $|z| \leqslant 10$.

٧ ـ إذا أعطيت المجال $\text{D} = (2x+1)y^2\text{a}_x + 2x\ (x+1)y\text{a}_y\ \text{C/m}^2$. احسب التدفق الكلى العابر للسطح المعرف بـ : (أ) $x=5$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$ و $-2 \leqslant z \leqslant 2$ ، (ب) $y=2$ $-5 \leqslant x \leqslant 5$ و $-2 \leqslant z \leqslant 2$ ، (جـ) $\rho = 4$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ و $0 \leqslant z \leqslant 1$

٨ ـ السطح الأسطوانى $\rho = 0.2\ m$ يحتوى على كثافة شحنة ذات $50\ \text{C/m}^2$ ، بينما ذلك عند $\rho = 0.5m$ يحتوى على $-40\ C/m^2$. (أ) ماهى كثافة الشحنة الواجب وجودها على السطح $\rho = 0.4$ حتى تكون الشحنة الكلية صفراً ؟ . (ب) باستخدام هذه القيم الثلاث لـ ρ_s ، احسب D_ρ كدالة فى ρ وارسم D_ρ تخطيطيا مع $0 \leqslant \rho \leqslant 0.7\ \text{m}$, ρ . (جـ) إذا تغيرت ρ_s الى $-20\ \text{C/m}^2$ على $\rho = 0.4\text{m}$ ، ارسم مرة أخرى D_ρ مع ρ تخطيطيا .

٩ ـ تحتوى الأسطح الأسطوانية ρ تساوى $4,3$, $5\ m$ على كثافات شحنة سطحية منتظمة قيمها $12,8$ــ , $\rho_{sx}nC/m^2$ بالترتيب . (أ) ماذا يجب أن تكون قيمة ρ_{sx} حتى تكون $D=0$ لـ $\rho > 5$ ؟ . (ب) إذا كانت $\rho_{sx} = 2nC/m^2$ ، احسب وارسم D_ρ مع ρ لـ $0 \leqslant \rho \leqslant 6m$.

١٠ ـ يحتوى السطح الكروى $r = 0.2m$ كثافة شحنة مقدارها $50C/m^2$ ، بينما $r = 0.5$ يحتوى على $40C/m^2$ ــ . (أ) ماكثافة الشحنة الواجب وجودها على السطح $r = 0.4m$ حتى تكون الشحنة الكلية صفرا ؟ . (ب) باستخدام هذه القيم الثلاث لـ ρ_s ، أحسب D_r كدالة فى r وارسم D_r تخطيطيا مع r ، $0 \leqslant r \leqslant 0.7m$. (جـ) إذا غيرت ρ_s إلى $20C/m^2$ ــ على $r = 0.4$ ، ارسم مرة أخرى D_r تخطيطيا مع

١١ ـ تحتوى الأسطح الكروية r تساوى 3 , 4 و $5m$ على كثافات شحنة سطحية منتظمة قيمها 8 , 12 ــ و $\rho_{sx}nC/m^2$ بالترتيب . (أ) ماذا يجب أن تكون قيمة ρ_{sx} حتى تكون $D=0$ لـ $r > 5$ ؟ . (ب) إذا كانت $\rho_{sx} = 2n\ C/m^2$ ، احسب وارسم D_r مع r لـ $0 \leqslant r \leqslant 6m$.

١٢ ـ دع $\rho_v = 4\mu C/m^2$ لـ $0 \leqslant \rho \leqslant 2\ mm$ و $\rho_v = 32 \times 10^{-15}\rho^{-3}$ لـ $2 \leqslant \rho < 4$ و ، ودع $\rho_v = 0$ فى أى مكان آخر . اختر أسطحا جاوسية مناسبة ، وأحصل على تعبيرات لـ D_ρ ، وأوجد D_ρ عند ρ تساوى $3,1,0$ و $5\ mm$.

١٣ ـ أعد المسألة (١٢) فيما عدا أن تدع $\rho_v = \rho/1,000C/m^3$ لـ $0 \leqslant \rho \leqslant 2$ و $\rho_v = 2\ \mu C/m^3$ لـ $2 \leqslant \rho < 4mm$.

١٤ ـ فى الاحداثيات الكروية ، $\rho = 32 \times 10^{-15}r^{-3}$ لـ $0 \leqslant r < 2mm$ و $2 \leqslant r <$ $4mm$ و $p = 0$ فى أى مكان آخر . اختر أسطحا جاوسية مناسبة ، وأحصل على تعبيرات لـ D_r ، وأحسب قيم D_r عند r تساوى $3\ ,1\ ,0$ و $5mm$.

١٥ ـ أعد المسألة (١٤) باستثناء أن تدع $\rho = 0.035rC/m^2$ لـ $0 \leqslant r \leqslant mm$ و $\rho = 6\ \mu$ C/m^3 لـ $2 \leqslant r < 4mm$.

١٦ ـ كثافة شحنة معطاة بـ $\rho = 5\cos \pi x\ \mu C/m^3$ لـ $-0.5 \leqslant x \leqslant 0.5m$ و $\rho = 0$ فى أى مكان آخر . بعد اختيار أسطح جاوسية مناسبة : (أ) عين D فى كل مكان ، (ب) ارسم D_x تخطيطيا مع x ، (جـ) ارسم D_x تخطيطيا مع x إذا كانت شحنة سطحية $\rho_s = 2\mu C/m^2$ ، موجودة أيضا عند $x = 0.25$.

١٧ ـ وزعت كثافة شحنة كما يلى : $2\ \mu\ C/m^3$ ــ لـ $-2 < y < -1m$ و $2\mu C/m^3$ لـ $1 < y < 2m$ و $\rho = 0$ فى أى مكان آخر . (أ) استخدم قانون جاوس لتوجد D فى كل مكان . (ب) ارسم Dy تخطيطا مع y .

١٨ ـ $\mathbf{D} = (2y^2z - 8xy)\mathbf{a}_x + (4xyz - 4x^2)\mathbf{a}_y + (2xy^2 + 4z)\mathbf{a}_z\ C/m^2$
(أ) أوجد كمية التدفق الخارجة من حجم كروى مقداره $10^{-14}m^3$ موجود عند P $(1, -2,3)$ ، (ب) عين الشحنة الكلية داخل هذا الحجم . (جـ) ماهى كثافة الشحنة المتوسطة داخل الحجم ؟

١٩ - دع $\mathbf{D} = 20xy^3z^4\mathbf{a}_x + 30x^2y^2z^4\mathbf{a}_y + 40x^2y^3z^3\mathbf{a}_z\ \mathrm{C/m^2}$
(أ) كم قدر الشحنة المحتواة فى حجم $10^{-10}\mathrm{m}^3$ موجود عند $(3,1,2)$ ؟ (ب) عند $(2,2,3)$ ؟ (جـ) عند أى نقطة فى المنطقة $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ و $0 \leqslant z \leqslant 3$ ، يكون أكبر قدر من التدفق الخارج من حجم تزايدى قدره : $10^{-10}\mathrm{m}^3$ وماهو مقدار $\Delta\ \Psi_{max}$ ؟

٢٠ - حيز مكعبى مكون بالأسطح x , y و z تساوى $\pm\ 0.1$. فاذا أعطيت المجال $\mathbf{D}= 6\ x\ e^{2y}\ (\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y)\mathrm{C/m^2}$: (أ) أوجد قيمة التكامل السطحى لـ D على سطح المكعب وأوجد الشحنة الكلية المحتواة فى هذا الحيز ، (ب) افترض أن المكعب هو عنصر حجم تزايدى موجود عند نقطة الأصل ، واحسب الشحنة المحتواة باستخدام المعادلة (٨) فى قسم ٣ - ٤ .

٢١ - احسب انفراج كل من المجالات الآتية عند $P(1, -1, 2)$:
(أ) $\mathbf{D} = xze^{2y}(z\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + x\mathbf{a}_z)$ (ب) $\mathbf{D} = (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
(جـ) $\mathbf{D} = 0.2\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y + 0.35\mathbf{a}_z$ ، (د) $\mathbf{G} = xy^2z^3(\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z)$

٢٢ - عين القيم العددية لانفراج كل من المجالات الآتية عند $P\ (2\ ,\ 90^\circ\ ,\ 1)$:
(أ) $\mathbf{D} = 2\rho\cos\phi\mathbf{a}_\rho - \rho\sin\varphi\mathbf{a}_\phi + 4z\mathbf{a}_z$
(ب) $\mathbf{D} = 2\rho z(\cos\phi + \sin\phi)\mathbf{a}_\rho + \rho z(\cos\phi - \sin\phi)\mathbf{a}_\phi + \rho^2(\cos\phi + \sin\varphi)\mathbf{a}_z$
(جـ) $\mathbf{D} = 12\mathbf{a}_\rho + 4\mathbf{a}_z$ (د) $\mathbf{F} = 5\rho^2 z\phi(\mathbf{a}_\rho + 2\mathbf{a}_\phi - 3\mathbf{a}_z)$

٢٣ - أوجد انفراج كل من المجالات الآتية عند النقطة $P(2, \theta = 30^\circ, \phi = 90^\circ)$:
(أ) $\mathbf{D} = (2r\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\mathbf{a}_r + (r\cos\theta\cos\phi - \sin\theta)\mathbf{a}_\theta - r\sin\phi\mathbf{a}_\phi$
(ب) $\mathbf{D} = \sin^2\theta\sin\phi\mathbf{a}_r + \sin 2\theta\sin\phi\mathbf{a}_\theta + \sin\theta\cos\phi\mathbf{a}_\phi$
(جـ) $\mathbf{D} = 0.1\mathbf{a}_r$ (د) $\mathbf{W} = 0.2r^3\phi\sin^2\theta(\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\phi)$

٢٤ - بين أن انفراج المجال E المعطى بالمعادلة (٣٦) فى قسم ٤ - ٧ يساوى صفراً فى كل مكان تقريبا .

٢٥ - (أ) يقع خط شحنة منتظم كثافته ρ_L على طول المحور z . أثبت أن $\nabla.\mathbf{D} = 0$ فى كل مكان عدا على خط الشحنة . (ب) استبدل كثافة شحنة حجمية منتظمة ρ_0 لـ $0 \leqslant \rho \leqslant a$ بخط الشحنة أربط ρ_0 بـ ρ_L حتى تكون الشحنة لكل وحدة طول واحدة . ثم أوجد $\nabla.\mathbf{D}$ فى كل مكان .

٢٦ - إذا كانت $\mathbf{D} = xy^2z^2\mathbf{a}_x + x^2yz^2\mathbf{a}_y + x^2y^2z\mathbf{a}_z\ \mathrm{C/m^2}$ (أ) أوجد تعبيرا لكثافة الشحنة الحجمية ، (ب) احسب الشحنة الكلية داخل مكعب معرف بـ $0 \leqslant z \leqslant \mathrm{m}$, $0 \leqslant y \leqslant 2\mathrm{m}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\mathrm{m}$.

٢٧ - كثافة التدفق الكهربى فى داخل الحيز الأسطوانى $\rho \leqslant 5\mathrm{m}$ معطاة بـ $4\rho^2\mathbf{a}_\rho\mathrm{C/m^2}$.
(أ) ماهى كثافة الشحنة الحجمية عند $\rho = 2$ ؟ (ب) ماهى كثافة التدفق الكهربى عند $\rho = 2$ ؟ . (جـ) ما قدر التدفق الكهربى التارك للأسطوانة $\rho=2$, $|z| \leqslant 5$ ؟ (د) ما قدر الشحنة المحتواة داخل الأسطوانة $\rho= 2$, $|z| \leqslant 5$ ؟ .

٢٨ - تعطى كثافة التدفق الكهربى داخل الكرة $r \leqslant 5\mathrm{m}$ بـ $4r^2\mathbf{a}_r \mathrm{C/m^2}$ (أ) ما كثافة الشحنة الحجمية عند $r = 2$ ؟ (ب) ما كثافة التدفق الكهربى عند $r = 2$ ؟ (جـ) ما قدر التدفق الكهربى التارك للكرة $r = 2$ ؟ : (د) ماقدر الشحنة المحتواة داخل الكرة $r = 2$ ؟

٢٩ - دع D تعطى $0.1\rho \mathbf{a}_\rho \mathrm{C/m^2}$ لـ $0 \leqslant \rho \leqslant 0.2\mathrm{m}$ و $(0.004/\rho)^{a}\rho$ لـ $\rho \geqslant 0.2$ (أ) أوجد ρ_v عند $\rho = 0.1$ و $\rho = 0.3$ (ب) ما خط الشحنة الذى يمكن وضعه على طول المحور z ؛ ليجعل $D = 0$ لـ $\rho \geqslant 0.2$ ؟

٣٠ - دع $D = 20\rho^2 \mathbf{a}_\rho \mathrm{C/m^3}$. (أ) ما كثافة الشحنة الحجمية عند النقطة P $(0.5, 60^\circ, 2)$ ؟ (ب) استخدام طريقتين مختلفتين لايجاد كمية الشحنة الواقعة داخل السطح المغلق المحدد بـ $\rho = 3$ و $2 \leqslant \; \leqslant 0$.

٣١ - أوجد قيمتى كل من طرفى نظرية الانفراج للمجال $\mathbf{F} = (4x - x^2)\mathbf{a}_x - 3y^2z^2\mathbf{a}_y - (2y^3z^2 - z)\mathbf{a}_z$ فى المنطقة $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

٣٢ - إذا كانت $D = [(20 \cos 1/2\ \phi/p]\mathbf{a}_\phi$ فى المنطقة $1 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \emptyset \leqslant \pi$ و $0 \leqslant z \leqslant 2.5$ ، عين الشحنة الكلية الواقعة داخل المنطقة المعطاة بطريقتين مختلفتين .

٣٣ - دع $D = (0.1/r) \cos\theta \mathbf{a}_\theta$ داخل السخروط المقطوع المعرف بـ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, $2 \leqslant r \leqslant 5$ و $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. عين الشحنة الكلية الواقسة داخل الحيز المخروطى بايجاد قيمتى كل من طرفى نظرية الانفراج .

الفصل الرابع

الطاقة والجهد

فى الفصلين السابقين أصبحنا مُلمين بقانون « كولوم » واستخدامه فى إيجاد المجال الكهربى حول عدة توزيعات بسيطة للشحنة ، وأيضا بقانون « جاوس » وتطبيقه فى تحديد المجال حول بعض تنظيمات الشحنة المتماثلة . وكان استخدام قانون « جاوس » دائما أسهل لهذه التوزيعات العالية التماثل ، لأن مشكلة التكامل اختفت دائما عندما أُختير السطح المغلق المناسب .

ومع ذلك ، إذا كنا حاولنا أن نجد مجالا أعقد قليلا ، مثل ذلك الذى لشحنتين نقطيتين مختلفتين منفصلتين بمسافة صغيرة ، لوجدنا أنه لمن المستحيل أن نختار سطحا « جاوسيا » مناسبا ، وأن نحصل على إجابة . على أن قانون « كولوم » أكثر قدرة ، ويمكننا أن نحل مسائل لايمكن تطبيق قانون « جاوس » عليها . إن تطبيق قانون « كولوم » مُجهد ، ومُسهب وغالبا معقد تماما ، والسبب فى ذلك يرجع بالضبط لحقيقة أن شدة المجال الكهربى ، وهو مجال متجه ، يجب أن تستنبط مباشرة من توزيع الشحنة . وعامة يستلزم ذلك ثلاثة تكاملات مختلفة : واحد لكل مركبة ، وتحليل المتجه إلى مركبات عادة يزيد من تعقيد التكاملات .

وبالتأكيد سوف يكون أمرا مرغوباً ، إذا استطعنا ايجاد دالة مقياسية لم تعرف بعد مع تكامل واحد ثم نحدد المجال الكهربى من هذه الكمية المقياسية بطريقة ما سهلة ومباشرة ، مثل التفاضل .

وهذه الدالة المقياسية موجودة فعلا وتعرف بالجهد ، أو مجال الجهد . وسنجد أن لها شرحا فيزيائيا حقيقيا جدا لنعناها وأنها مألوفة أكثر لغالبيتنا عن المجال الكهربى الذى ستستخدم لايجاده .

ويجب أن نتوقع ، حينئذ ، أننا سنمد سريعا بطريقة ثالثة لايجاد المجالات الكهربية ـ تكامل مقياسى واحد ـ مع أنه ليس دائما بسيطا كما قد نبغى ، يتبعه تفاضل مرضى .

الجزء الباقى الصعب من المهمة ، هو التكامل ، الذى نهدف الى إزالته فى الفصل السابع .

٤ ـ ١ الطاقة المستنفذة فى تحريك شحنة نقطية فى مجال كهربى

عرفت شدة المجال الكهربى بالقوة على وحدة شحنة اختبار عند تلك النقطة ، التى نرغب أن نجد عندها قيمة هذا المجال المتجه . إذا حاولنا أن نحرك شحنة الاختبار ضد المجال الكهربى ، فعلينا أن نؤثر بقوة مساوية ومضادة لتلك المبذولة بواسطة المجال ، وهذا يتطلب منا أن نستنفذ طاقة ، أو نعمل شغلا . إذا رغبنا أن نحرك الشحنة فى اتجاه المجال ، فان استنفاذ طاقتنا سيصبح سالبا ، فنحن لن نعمل شغلا ، بل « المجال» .

افرض أننا نرغب فى تحريك شحنة Q مسافة $d\mathbf{L}$ فى مجال كهربى $\mathbf{E}$ القوة على Q بسبب المجال الكهربى هى

$$\boxed{\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}} \qquad (١)$$

حيث يُذكرنا الرمز السفلى أن هذه القوة بسبب المجال . ومُركبة هذه القوة فى اتجاه $d\mathbf{L}$ التى يجب أن نتغلب عليها

$$F_{EL} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{a}_L = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

حيث $\mathbf{a}_L$ = وحدة المتجه فى اتجاه $d\mathbf{L}$

القوة التى يجب علينا أن نُسلطها تساوى وتضاد القوة نتيجة المجال

$$F_{\text{appl}} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

واستنفاذنا للطاقة هو حاصل ضرب القوة والمسافة .

الشغل التفاضلى المبذول بالمصدر الخارجى المحرك لـ Q

$$= -Q\,\mathbf{E}.\mathbf{a}_L dL = -Q\mathbf{E}.d\mathbf{L}$$

أو

$$\boxed{dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \qquad (٢)$$

حيث استبدلنا $\mathbf{a}_L\, dL$ بالتعبير الأسهل $d\mathbf{L}$.

وكمية الشغل التفاضلى المطلوبه هذه ، قد تكون صفرا تحت شروط عدة يمكن تحديدها بسهولة من (٢) . هناك الشروط عديمة الأهمية التى فيها Q , $\mathbf{E}$ أو $d\mathbf{L}$ صفر ، وحالة أكثر أهمية ، هى التى فيها $\mathbf{E}$ و $d\mathbf{L}$ متعامدين . هنا تحرك الشحنة دائما فى اتجاه

على زوايا قائمة مع المجال الكهربى . ونستطيع أن نرسم تناظرا جيدا بين المجال الكهربى ومجال الجاذبية ، حيث مرة أخرى ، يجب أن تستنفذ طاقة لتتحرك ضد المجال . إن إنزلاق كتلة بسرعة ثابتة على سطح أملس غير مستقيم ، هى عملية عديمة المجهود إذا حركت الكتلة على طول منحنى ثابت الارتفاع ، بينما يجب بذل شغل موجب أوسالب لتحريكها الى ارتفاع أعلى ، أو أقل على التوالى .

وبالرجوع الى الشحنة فى المجال الكهربى ، فان الشغل المطلوب لتحريك الشحنة مسافة محدودة يجب أن يحدد من التكامل .

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \qquad (٣)$$

حيث يجب أن يُحدد المسار قبل أن يمكن إيجاد التكامل . والشحنة مفروض أنها ساكنة عند كلا الوضعين الابتدائى ، والنهائى .

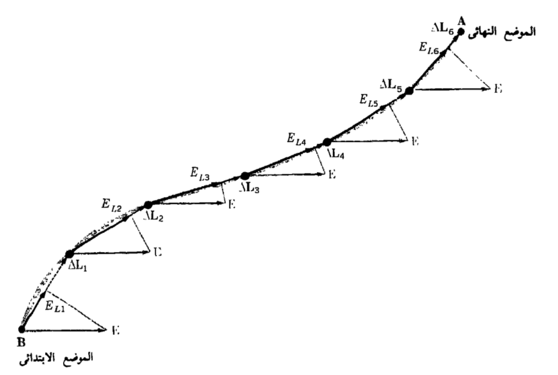
وهذا التكامل المحدد أساسى لنظرية المجال ، سوف نخصص القسم التالى لتفسيره وايجاد قيمته .

ت ٤ ـ ١ دعنا نفترض أن مسارا تفاضليا يمكن أن يمثل بخط طوله 1 mm ، موجه فى موازاة المتجه $2\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_y$. إذا كان $\mathbf{E} = z\,\mathbf{a}_x - 3y^2\mathbf{a}_y + x\,\mathbf{a}_z$ V/m ، فما كمية الشغل المبذول فى تحريك شحنة مقدارها $7\,\mu$C على طول هذا المسار إذا وقع المسار عند : (أ) $P_A(1,2,3)$ ، (ب) $P_B(2,0,-4)$ ، (جـ) $P_C(6,1,-7)$ ؟

الاجابة : 14 nJ , 14nJ ; -75 nJ .

٤ - ٢ التكامل الخطى

التعبير التكاملى (٣) للشغل المبذول فى تحريك شحنة نقطية Q من موضع الى آخر هو مثال لتكامل خطى ، الذى يتخذ دائما فى تدوين تحليل المتجهات ، شكل التكامل على طول مسار محدد لحاصل الضرب بالنقطة لمجال متجه وطول مسار متجه تفاضلى dL .



شكل ٤ ـ ١ تفسير بيانى لتكامل خطى فى مجال منتظم . التكامل الخطى لـ **E** بين النقطتين B و A لايعتمد على المسار المختار ، حتى فى مجال غير منتظم ، وهذه النتيجة ، عامة ، ليست صحيحة للمجالات المتغيرة مع الزمن .

وبدون استخدام تحليل المتجهات كان يجب علينا أن نكتب

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} E_L \, dL$$

حيث E_L = مركبة **E** فى اتجاه $d\mathbf{L}$

والتكامل الخطى ، يماثل كثير من التكاملات الأخرى التى تظهر فى التحليل متقدم المستوى ، بمافيها التكامل السطحى الذى يظهر فى قانون « جاوس » ، فى أنها أساسا وصفية . فنحن نحب أن ننظر اليه اكثر بكثير من أن نحب أن نجربه . وهو يخبرنا أن نختار مسارا ، ثم نقسمه الى عدد كبير من الأجزاء الصغيرة جدا ، ثم نضرب مركبة المجال فى اتجاه كل جزء فى طول الجزء ، وعندئذ نُجمع النتائج لكل الأجزاء . وهذه ، بالطبع ، عملية جمع ، والتكامل يُحصل عليه بالضبط فقط عندما يصبح عدد الأجزاء لانهائيا .

هذه العملية مبينة فى شكل ٤ ـ ١ ، حيث اختير مسار من موضع ابتدائى B الى موضع نهائى A(١) ، واختير مجال كهربى منتظم للتبسيط .

(١) الموضع النهائى أعطى التسمية A ليتناظر مع اصطلاح فرق الجهد ، كما هو مشروح فى القسم التالى .

والمسار مقسم الى ستة أجزاء ΔL_1 , ΔL_2 , ... , $\Delta L6$ ومركبات E فى اتجاه كل جزء يرمز له بـ E_{L1} , E_{L2} , ... , E_{L6} . والشغل المبذول فى تحريك شحنة Q من B الى A هو عندئذ تقريبا

$$W = -Q(E_{L1}\,\Delta L_1 + E_{L2}\,\Delta L_2 + \cdots + E_{L6}\,\Delta L_6)$$

أو ، باستخدام التدوين الاتجاهى ،

$$W = -Q(\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{L}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{L}_2 + \cdots + \mathbf{E}_6 \cdot \Delta\mathbf{L}_6)$$

ولأننا افترضنا مجالا منتظما ،

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \cdots = \mathbf{E}_6$$
$$W = -Q\mathbf{E} \cdot (\Delta\mathbf{L}_1 + \Delta\mathbf{L}_2 + \cdots + \Delta\mathbf{L}_6)$$

.ماهو هذا المجموع للأجزاء المتجهة بين الأقواس . المتجهات تجمع بقانون متوازى الأضلاع ، والمجموع هو مجرد المتجه الموجه من نقطة البداية B إلى نقطة النهاية A ، $\mathbf{L}_{BA}$. لذلك

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA} \qquad (\text{E منتظم}) \qquad (٤)$$

وبتذكر تفسير الجمع للتكامل الخطى ، يمكن الحصول الان بسرعة على هذه النتيجة للمجال المنتظم من التعبير التكاملى

$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \qquad (٥)$$

وعند تطبيقه على مجال منتظم

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \int_B^A d\mathbf{L}$$

حيث يصبح التكامل الأخير $\mathbf{L}_{BA}$ و

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA} \qquad (\text{E منتظم})$$

ولهذه الحالة الخاصة لشدة مجال كهربى منتظم ، يجب أن نلاحظ أن الشغل المستخدم فى تحريك الشحنة يعتمد فقط على $\mathbf{E}, Q$ و $\mathbf{L}_{BA}$ ، وهو متجه مرسوم من النقطة الابتدائية الى النهائية للمسار المختار . وهو لايعتمد على المسار المعين الذى اخترناه لكى تحمل الشحنة عليه . ويمكننا أن نقدم من B الى A على خط مستقيم ،

أو عن طريق أى مسار اخر ، والاجابة هى نفسها . وسنرى فى قسم ٤ ـ ٥ أن نصا مطابقا يمكن قوله لأى مجال E (استاتيكى) غير منتظم .

ولكى نوضح ميكانيكية إنشاء التكامل الخطى (٥) دعنا نختار المجال غير المنتظم

$$\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

ونعين الشغل المستنفذ فى حمل 2 C من $B\ (1,0,1)$ الى $A(0.8,\ 0.6,1)$ على طول القوس الأقصر للدائرة

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad z = 1$$

وبالعمل فى إحداثيات كرتيزية ، فان المسار التفاضلى $d\mathbf{L}$ هو $dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$ ويصبح التكامل

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\ &= -2 \int_1^{0.8} y\, dx - 2 \int_0^{0.6} x\, dy - 4 \int_1^1 dz \end{aligned}$$

حيث قد اختيرت النهايات على التكاملات لتتفق مع القيم الابتدائية والنهائية لمتغير التكامل المختص . وباستخدام معادلة المسار الدائرى (واختيار إشارة الجذر الصحيحة للربع المستخدم) نجد

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} \sqrt{1 - x^2}\, dx - 2 \int_0^{0.6} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 0 \\ &= -\left[x\sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x\right]_1^{0.8} - \left[y\sqrt{1 - y^2} + \sin^{-1} y\right]_0^{0.6} \\ &= -(0.48 + 0.927 - 0 - 1.571) - (0.48 + 0.644 - 0 - 0) \\ &= -0.96 \text{ J} \end{aligned}$$

فاذا اخترنا الآن مسار الخط المستقيم من B الى A ، فيجب أن نعين معادلات الخط المستقيم . أى اثنين من المعادلات الثلاث الآتية لمستويات مارة بالخط يكونان كافيين لتعريف الخط :

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B)$$

من المعادلة الأولى آنفا نجد

$$y = -3(x - 1)$$

ومن الثانية نحصل على

$$z = 1$$

على هذا ،

$$W = -2\int_{1}^{0.8} y\,dx - 2\int_{0}^{0.6} x\,dy - 4\int_{1}^{1} dz$$
$$= 6\int_{1}^{0.8} (x-1)\,dx - 2\int_{0}^{0.6}\left(1 - \frac{y}{3}\right)dy$$
$$= -0.96\ \text{J}$$

هذه هى نفس الاجابة التى وجدناها باستخدام المسار الدائرى بين نفس النقطتين ، وهى توضح مرة أخرى النص (غير المُبرهن) أن الشغل المبذول لايعتمد على المسار المأخوذ فى أى مجال كهروستاتيكى .

ويجب ملاحظة أن معادلات الخط المستقيم تبين أن $dy = -3dx$ و $dx = -1/3\ dy$. وهذه التعويضات قد تعمل فى التكاملين الأولين آنفا ، مع تغيير فى النهايات ، والاجابة يمكن أن يحصل عليها بتقدير التكاملات الجديدة . وهذه الطريقة غالبا تكون أبسط ، إذا كان المكامل دالة لمتغير واحد فقط .

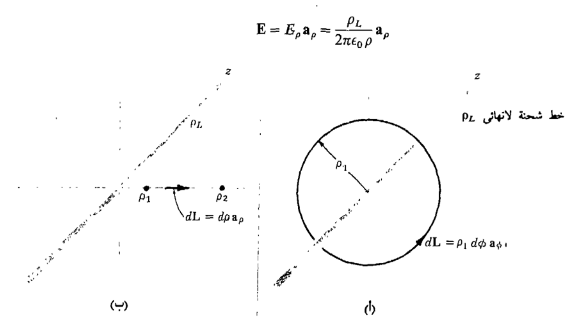
لاحظ أن تعبيرات $d\mathbf{L}$ فى نظمنا الثلاثة للاحداثيات تستخدم الأطوال التفاضلية التى حصلنا عليها فى الفصل الأول :

(٦)	$d\mathbf{L} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$	(كارتيزيه)
(٧)	$d\mathbf{L} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho\, d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z$	(إسطوانية)
(٨)	$d\mathbf{L} = dr\mathbf{a}_r + r\, d\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\mathbf{a}_\phi$	(كروية)

والعلاقات المتبادلة بين المتغيرات العديدة فى كل تعبير ، تُعين من المعادلات الخاصة للمسار .

وكمثال أخير يوضح تقييم التكامل الخطى ، دعنا نفحص مسارات عدة يمكننا أخذها بالقرب من خط شحنة لانهائى . المجال قد حُصل عليه مرات عدة ، وهو كلية فى الاتجاه نصف القطرى ،

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$$



شكل ٤ ـ ٢ (أ) مسار دائرى و (ب) مسار نصف قطرى حملت على طوله شحنة Q فى مجال خط شحنة لانهائى . لايبذل شغل فى الحالة الأولى .

دعنا أولا نجد الشغل المبذول فى حمل الشحنة الموجبة Q حول مسار دائرى نصف قطره ρ_1 ، مركزه عند خّط الشحنة ، كما هو موضح بشكل ٤ ـ ٢أ . وبدون أى كتابة ، نرى أن الشغل يجب أن يكون صفرا ، لأن المسار يكون دائما عموديا على شدة المجال الكهربى ، أو أن القوة على الشحنة دائما تؤثر على زوايا قائمة مع الاتجاه الذى نحركها فيه . ولكن للتمرين دعنا نُكون التكامل ونحصل على الاجابة .

العنصر التفاضلى $d\mathbf{L}$ أُختير فى الاحداثيات الاسطوانية ، والمسار الدائرى المختار يتطلب أن تكون $d\rho$ و dz أصفارا ، ولذلك $d\mathbf{L} = \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi$. عندئذ يكون الشغل

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho_1} \mathbf{a}_\rho \cdot \rho_1\, d\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$= -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\, d\phi \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

دعنا الان نحمل الشحنة من ρ_1 الى ρ_2 على طول مسار نصف قطرى (شكل ٤ ـ ٢ب) . هنا $d\mathbf{L}= d\rho \mathbf{a}_\rho$ و

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \cdot d\rho \mathbf{a}_\rho = -Q \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho}$$

أو

$$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

لأن ρ_2 أكبر من ρ_1 ، يكون $\ln (\rho_2/\rho_1)$ موجبا ، ونرى أن الشغل المبذول يكون سالبا ، مشيرا الى أن المنبع الخارجى المحرك للشحنة يتلقى طاقة .

أحد المزالق فى تقييم التكاملات الخطية هو الميل الى استخدام اشارات سالبة كثيرة جدا عند تحريك شحنة فى اتجاه احداثى متناقص القيمة هذا مُعتنى به كلية بواسطة نهايات التكامل ، ولايجب عمل محاولة مُساءة التوجيه لتغيير اشارة $d\mathbf{L}$. افرض أننا نحمل Q من ρ_2 الى ρ_1 (شكل ٤ ـ ٢ب) . مازال لدينا $d\mathbf{L}= d\rho \mathbf{a}_\rho$ ، ونتبين الاتجاه المختلف بالتعرف على $\rho = \rho_2$ كنقطة البداية و $\rho = \rho_1$ كنقطة النهاية ،

$$W = -Q \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

وهذا هو السالب للإجابة السابقة ، وواضح أنه صحيح .

ت ٤ ـ ٢ اثبت أن نفس الشغل يبذل فى تحريك شحنة مقدارها 10C — من نقطة الأصل الى $(1,2,3)$ خلال المجال $\mathbf{E} = 6x^2y\, \mathbf{a}_x + 2x^3 \mathbf{a}_y + 6z \mathbf{a}_z$ على طول المسارات الآتية : (أ) أجزاء خطية مستقيمة : $(0,0,0)$ الى $(1,0,0)$ الى $(1,2,0)$ الى $(1,2,3)$ (ب) الخط المستقيم : $y = 2x$ و $z = 3x$ ، (جـ) المنحنى $y = 2x$ و $z = 3x^4$.

الاجابة : 310J , 310J , 310J .

ت ٤ ـ ٣ ـ إذا تغير مجال $\mathbf{E}$ مع الزمن فلا يستلزم أن يكون محافظا . دع المجال المتجه $\mathbf{E}$ يكون $5xy\mathbf{a}_x$ V/m عند $t = 0$. ماكمية الشغل الذى يُبذل عند تلك اللحظة فى حمل شحنة مقدارها 0.4C من $(0,0,0)$ الى $(1,2,0)$ على طول المسار : (أ) $(0,0,0)$ الى $(1,0,0)$ الى $(1,2,0)$ ، (ب) $(0,0,0)$ الى $(0,2,0)$ الى $(1,2,0)$ ؟

الاجابة : 0J , 2J — .

٤ ـ ٣ تعريف فرق الجهد ، والجهد

نحن الآن مستعدون لتعريف مفهوم جديد من تعبير الشغل المبذول بمنبع خارجى فى تحريك شحنة Q من نقطة الى اخرى فى مجال كهربى $\mathbf{E}$

$$W = -Q \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

وبنفس الطريقة كما عرفنا شدة المجال الكهربى بالقوة على وحدة شحنة اختبار ، فاننا الان نعرف **فرق الجهد** V بالشغل المبذول (بمنبع خارجى) فى تحريك وحدة شحنة موجبة من نقطة الى اخرى ، فى مجال كهربى

$$\text{فرق الجهد} = V = -\int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{٩}$$

علينا أن نتفق على اتجاه التحرك ، كما يعنيه أسلوبنا ، ونعمل هذا بالنص على أن V_{AB} يعنى فرق الجهد بين النقط A و B وهو الشغل المبذول فى تحريك وحدة الشحنة من B (المسماة أخيرا) الى A (المسماة أولا) . وعلى ذلك ، فى تعيين V_{AB} ، فان B هى النقطة الابتدائية و A هى النقطة النهائية . والسبب لهذا التعريف الغريب بعض الشيء سيصبح أكثر وضوحا بعد قليل ، عندما نرى أن النقطة الابتدائية B غالبا تؤخذ عند مالا نهاية ، بينما تمثل النقطة النهائية A موضع الشحنة الثابت ، وعلى ذلك فان نقطة A بطبيعتها أكثر أهمية .

ويُقاس فرق الجهد « بالجول لكل كولوم » ، والذى يُعرف « بال » volt كوحدة أكثر شيوعا ، ويختصر V . وعلى ذلك ففرق الجهد بين النقطتين A و B هو

$$V_{AB} = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \text{V} \tag{١٠}$$

و V_{AB} يكون موجبا إذا بُذل شغل فى حمل الشحنة الموجبة من B الى A .

ومن مثال خط الشحنة فى القسم الأخير وجدنا أن الشغل المبذول فى أخذ شحنة Q من ρ_2 الى ρ_1 كان

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

وعلى هذا ، فرق الجهد بين انقطتين عند ρ_1 و ρ_2 هو

$$V_{12} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{١١}$$

ونستطيع اختبار هذا التعريف بايجاد فرق الجهد بين النقط A و B عند مسافات نصف قطرية r_A و r_B من شحنة نقطية Q . وباختيار نقطة أصل عند Q ،

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

و $$d\mathbf{L} = dr\ \mathbf{a}_r$$

نجد $$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (١٢)$$

إذا كان $r_B > r_A$ ، يكون فرق الجهد V_{AB} موجبا ، مشيرا الى أن طاقة أُستنفذت بواسطة المنبع الخارجى فى احضار الشحنة الموجبة من r_B الى r_A . وهذا يتفق مع الصورة الفيزيائية التى توضح أن الشحنتين المتشابهتين تتنافران معا .

وغالبا يكون من الملائم أن نتكلم عن **الجهد** أو **الجهد المطلق** ، لنقطة ، أكثر من فرق الجهد بين نقطتين ، ولكن هذا يعنى فقط أننا نوافق على أن نقيس كل فرق جهد بالنسبة الى نقطة اسناد محددة التى نعتبر أن لها جهدا صفريا . ويجب الوصول الى اتفاق عام على المرجع الصفرى قبل أن يكون لتعبير الجهد أى دلالة . فشخص له احدى يديه على الألواح الحارفة لأنبوبة اشعة الكاثود والتى هى « عند جهد 50V » ويده الأخرى على طرف الكاثود من المحتمل أنه سوف يكون مرتعشا بعنف جدا ليفهم أن الكاثود ليس المرجع الصفرى ، بل إن كل الجهود فى تلك الدائرة تقاس عادة بالنسبة الى الحائل المعدنى حول الأنبوبة والكاثود قد يكون سالبا بعدة آلاف من الفولتات بالنسبة للحائل .

ربما تكون أكثر نقطة إسناد صفرى شيوعا فى قياسات الجهد المعملية ، أو الفيزيائية هى « الأرض » والتى نعنى بها الجهد لمنطقة سطح الأرض نفسها . ونظريا ، نمثل هذا السطح عادة بمستوى لانهائى عند جهد صفرى ، مع أن بعض المسائل ذات المقياس الكبير ، مثل تلك المشتملة على انتشار عبر المحيط الأطلنطى ، تتطلب سطحا كرويا عند جهد صفرى .

ونقطة إسناد أخرى شائعة الاستخدام هى اللانهاية . وتظهر هذه عادة فى المسائل النظرية التى تقرب حالة فيزيائية تكون فيها الأرض بعيدة نسبيا عن المنطقة التى نهتم بها ، مثل المجال الاستاتيكى قُرب طرف جناح طائرة اكتسبت شحنة بالطيران خلال ركام رعدى ، أو المجال داخل ذرة . وعند العمل فى مجال جهد **الجاذبية** على الأرض ، يؤخذ المرجع الصفرى عادة عند مستوى سطح البحر ، ومع ذلك فلبعثة بين الكواكب يكون اختيار اللانهاية كمرجع صفرى مناسبا أكثر .

ويمكن أحيانا استخدام سطح اسطوانى له نصف قطر محدود عندما يوجد تماثل اسطوانى ويتحقق أن اللانهاية غير ملائمة . فى الكابل المحورى يُختار الموصل

الخارجى كمرجع صفرى للجهد . وهناك أيضا ، بالطبع ، عديد من المسائل الخاصة ، مثل تلك التى يجب أن نختار لها سطحا زائديا ذا طيتين أوشبه كرة مفلطح ، كمرجع جهد صفرى ، ولكن هذه لاتعنينا حاليا .

إذا كان الجهد عند نقطة A هو V_A وذلك عند B هو V_B فان

$$V_{AB} = V_A - V_B \tag{١٣}$$

حيث أننا بالضرورة نتفق أن V_A و V_B سيكون لهما نفس نقطة المرجع الصفرى .

ت ٤ - ٤ - اذا اعطيت المجال $\mathbf{E} = 40xy\mathbf{a}_x + 20x^2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ V/m ، احسب : (أ) V_{PQ} ، اذا أعطيت أن $P(1,-1,0)$ و $Q(2,1,3)$ ، (ب) V عند $P(1,-1,0)$ إذا كان المرجع الصفرى عند $Q(2,1,3)$ ، (جـ) V عند $P(1,-1,0)$ إذا كان المرجع الصفرى عند نقطة الأصل .

الاجابة : 106V , 106V , 20V .

٤ - ٤ مجال الجهد لشحنة نقطية

فى القسم السابق وجدنا تعبير (١٢) لفرق الجهد بين نقطتين واقعتين عند $r = r_A$ و $r = r_B$ فى مجال شحنة نقطية Q موضوعة عند نقطة الأصل ،

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = V_A - V_B \tag{١٤}$$

لقد فُرض هناك أن النقطتين تقعان على نفس الخط نصف القطرى أولهما نفس قيم الاحداثيات θ و ϕ مما سمح لنا أن ننشىء مسارا بسيطا على هذا الخط نصف القطرى لكى نحمل شحنتنا الموجبة عليه . والان يجب أن نسأل إذا ما كانت قيم مختلفة للاحداثيات θ و ϕ للموضع الابتدائى والنهائى ستؤثر على إجابتنا وإذا ما كنا نستطيع أن نختار مسارات أكثر تعقيدا بين النقطتين بدون تغيير النتائج . دعنا نجيب على كلا السؤالين فورا باختيار نقطتين عامتين A و B (شكل ٤ - ٣) عند المسافات نصف القطرية r_A و r_B ، وأى قيم للاحداثيات الأخرى .

طول المسار التفاضلى $d\mathbf{L}$ له المركبات ذات الرموز السفلية r , θ ، و ϕ ، والمجال الكهربى له مركبة نصف قطرية فقط . وعندئذ أخذ الضرب بالنقطة يترك لنا فقط

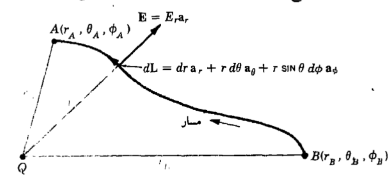
$$V_{AB} = -\int_{r_B}^{r_A} E_r\, dr = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

نحصل على نفس الاجابة ، ونرى لذلك ، أن فرق الجهد بين نقطتين فى مجال شحنة نقطية ، يعتمد فقط على بعد كل نقطة عن الشحنة ، ولايعتمد على المسار الخاص المستخدم فى حمل وحدة شحنتنا من نقطة الى الأخرى .

كيف يمكننا ـ بسهولة ـ أن نُعرف مرجعا صفريا للجهد ؟ الامكان الأبسط ، هو أن تدع $V = 0$ عند مالانهاية . وإذا سمحنا للنقطة عند $r = r_B$ بأن تتراجع الى مالانهاية يصبح الجهد عند r_A .

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

أو ، لأنه ليس هناك داع أن نميز هذه النقطة بالرمز السفلى A ،



شكل ٤ ـ ٣مسار عام بين نقطتين عامتينB و A فى مجال شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل . فرق الجهد V_{AB} لايعتمد على المسار المختار .

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (١٥)$$

هذا التعبير يعرف الجهد عند أى نقطة على مسافة r من شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل ، الجهد عند نصف قطر لانهائى مأخوذ على أنه المرجع الصفرى . وبالعودة الى تفسير فيزيائى ، فيمكننا أن نقول : إن $Q/4\pi\epsilon_0 r$ joules من الشغل يجب أن تُبذل فى حمل شحنة 1C من مالانهاية الى أى نقطة على بعد r meters من الشحنة Q .

وطريقة مناسبة للتعبير عن الجهد بدون اختيار مرجع صفرى خاص يستلزم اعتبار r_A أنه r مرة أخرى وندع $Q/4\pi\epsilon_0 r_B$ تكون ثابتة . على ذلك

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1 \qquad (١٦)$$

وC_1 يمكن أن تختار بحيث $V = 0$ عند أى قيمة مرغوبة لـ r . ونستطيع أيضا أن نختار المرجع الصفرى بطريقة غير مباشرة بأن ندع V تكون V_0 عند $r = r_0$.

يجب أن يُلاحظ أن فرق الجهد بين نقطتين ليس دالة فى C_1 .

معادلات (١٥) أو (١٦) تمثل مجال الجهد لشحنة نقطية . والجهد مجال مقياسى ولايتضمن أى وحدات متجهات .

دعنا نُعرف الآن سطحا متساوى الجهد كسطح مكون من كل تلك النقط التى لها نفس قيمة الجهد . تحريك وحدة شحنة على سطح متساوى الجهد لاينطوى على شغل ، لأن ، بالتعريف ، لايوجد فرق جهد بين أى نقطتين على هذا السطح .

الأسطح المتساوية الجهد ، فى مجال جهد شحنة نقطية هى كرات مركزها عند الشحنة النقطية .

وفحص صورة مجال الجهد لشحنة نقطية يبين أنه مجال معكوس مسافة ، بينما وجد أن شدة المجال الكهربى هى علاقة قانون تربيع عكسى . وتوجد نتيجة مماثلة لمجال قوة الجاذبية لكتلة نقطية (قانون تربيع عكسى) ومجال جهد الجاذبية (معكوس مسافة) . قوة الجاذبية المؤثرة بالأرض على جسم على بعد مليون ميل منها هى أربع مرات تلك المؤثرة على نفس الجسم على بعد مليونين من الأميال . على أن الطاقة الحركية المعطاة لجسم ساقط بحُرية ، مبتدئا من نهاية الكون بسرعة صفرية هى فقط قدرها مرتين عند مليون ميل ، عما هى عليه عند مليونين من الأميال .

ت ٤ ـ ٥ شحنة نقطة مقدارها 1.6nC واقعة عند نقطة الأصل فى فضاء حر . أوجد الجهد عند $r = 0.7$m إذا كان : (أ) المرجع الصفرى عند اللانهاية ، (ب) المرجع الصفرى عند $r = 0.5$ ؛ (جـ) $V = 5$V عند $r = 1$.

الاجابة : 20.5V ; $-\ 8.22$V , 11.16V .

٤ ـ ٥ مجال الجهد لنظام من الشحنات : خاصية المحافظة

عُرف الجهد عند نقطة بأنه الشغل المبذول فى احضار وحدة شحنة موجبة من المرجع الصفرى الى النقطة ، ولقد تشككنا أن هذا الشغل ، وبالتالى الجهد ، لايعتمد على المسار المأخوذ . فإذا لم تكن كذلك ، لما كان الجهد مفهوما مفيدا جدا .

دعنا الان نبرهن تأكيدنا . وسنعمل هذا بالبدء بمجال الجهد لشحنة نقطية مفردة التى أوضحنا بالنسبة لها ، فى القسم الأخير ، عدم الاعتماد بالنسبة للمسار ، مع ملاحظة أن المجال خطى بالنسبة للشحنة بحيث يمكن تطبيق التراكب . سيتبع حينئذ أن مجال نظام من الشحنات له قيمة عند أى نقطة لاتعتمد على المسار المأخوذ فى حمل شحنة الاختبار الى تلك النقطة .

على هذا فان مجال الجهد لشحنة نقطية مفردة ، التى سوف نميزها بـ Q_1 ونضعها عند $\mathbf{r}_1$ يشمل فقط المسافة $|r - r_1|$ من Q_1 الى النقطة عند $\mathbf{r}$ حيث نوجد قيمة الجهد . ولمرجع صفرى عند اللانهاية ، نجد

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

الجهد بسبب شحنتين ، Q_1 عند $\mathbf{r}_1$ و Q_2 عند $\mathbf{r}_2$ ، دالة فقط فى $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ و $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$ ، المسافات من Q_1 و Q_2 إلى نقطة المجال ، بالترتيب ،

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

وباستمرار اضافة شحنات ، نجد أن الجهد بسبب n من الشحنات النقطية هو

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

أو

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \qquad (١٧)$$

وإذا مثلت الآن كل شحنة نقطية على أنها عنصر صغير لتوزيع متصل لشحنة حجمية $\rho\Delta V$ ، فعند ذلك

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\,\Delta v_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\rho(\mathbf{r}_2)\,\Delta v_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{\rho(\mathbf{r}_n)\,\Delta v_n}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

وعندما نسمح لعدد العناصر أن يصبح لانهائيا ، نحصل على التعبير التكاملى

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad (١٨)$$

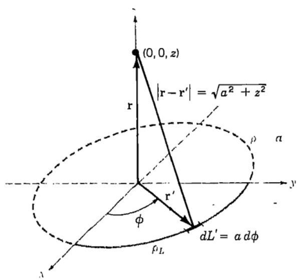
لقد قطعنا شوطا بعيدا من مجال الجهد لشحنة نقطية مفردة ، وقد يكون من المفيد أن نفحص (١٨) ونُنعش أنفسنا بمعانى كل حد . الجهد $V(\mathbf{r})$ يُعين بالنسبة الى مرجع جهد صفرى عند مالانهاية وهو مقياس مضبوط للشغل المبذول فى إحضار وحدة شحنة من لانهاية الى نقطة المجال عند $\mathbf{r}$ حيث نوجد الجهد . كثافة الشحنة الحجمية $\rho(\mathbf{r}')$ ، وعنصر الحجم التفاضلى dv' يتحدان ليمثلا كمية شحنة تفاضلية $\rho(\mathbf{r}')\,dv'$ موضوعة عند $\mathbf{r}'$. المسافة $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ هى تلك المسافة من نقطة المنبع الى نقطة المجال . والتكامل هو تكامل مضاعف (حجمى) .

اذا أخذ توزيع الشحنة صورة خط شحنة ، أو شحنة سطحية فالتكامل يكون على طول الخط أو على السطح :

$$(19) \quad V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\, dL'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$(20) \quad V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')\, dS'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

وأكثر التعبيرات تعميما للجهد يحصل عليه بضم (١٧) ، (١٨) ، (١٩) و (٢٠)



شكل ٤ - ٤ مجال الجهد لحلقة لها كثافة شحنة خط منتظمة يمكن الحصول عليه بسهولة من $V = \int \rho_L(\mathbf{r}')\, dL'/(4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$

وهذه التعبيرات التكاملية للجهد بدلالة توزيع الشحنة يجب أن تقارن بتعبيرات مشابهة لشدة المجال الكهربى ، مثل (١٨) فى قسم ٢ - ٤ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{vol} \frac{\rho(\mathbf{r}')\, dv'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

والجهد مرة أخرى هو مقلوب مسافة ، وشدة المجال الكهربى ، قانون تربيع عكسى . والأخير ، طبعا ، هو أيضا مُجال متجه .

ولكى نوضح استخدام أحد تكاملات الجهد هذه ، دعنا نوجد V على المحور z لشحنة خط منتظمة ρ_L على شكل حلقة ، $\rho = a$ فى المستوى $z = 0$ ، كما هو موضح فى شكل ٤ - ٤ . باستخدام (١٩) ، نجد $dL' = a d\phi$ و $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$ ، $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$ و $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$ و

$$V=\int_{0}^{2\pi}\frac{\rho_L a\, d\phi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{\rho_L a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

بتلخيص :

١ ـ الجهد نتيجة شحنة نقطية مفردة ، هو الشغل المبذول فى حمل وحدة شحنة موجبة من ما لا نهاية ، الى النقطة التى نريد الجهد عندها ، والشغل لا يعتمد على المسار المختار بين هاتين النقطتين .

٢ ـ مجال الجهد فى وجود عدد من الشحنات النقطية هو مجموع مجالات الجهد الفردية الناتجة عن كل شحنة .

٣ ـ الجهد نتيجة عدد من الشحنات النقطية أو أى توزيع شحنة متصل يمكن لذلك ايجاده بحمل وحدة شحنة من مالانهاية الى النقطة المطلوبة على طول أى مسار نختاره .

وبأسلوب آخر : تعبير الجهد (المرجع الصفرى عند مالانهاية) ،

$$V_A=-\int_{\infty}^{A}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

أو فرق الجهد

$$V_{AB}=V_A-V_B=-\int_{B}^{A}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

غير معتمد على المسار المختار للتكامل الخطى ، بغض النظر عن مصدر المجال $\mathbf{E}$.

وهذه النتيجة غالبا تذكر موجزة بتقرير ، أنه لايبذل شغل فى حمل وحدة الشحنة حول أى مسار مغلق ، أو

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=0 \qquad (٢١)$$

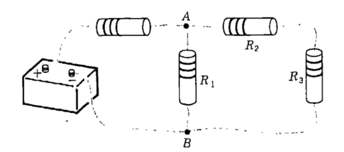
وُضعت دائرة صغيرة على علامة التكامل لتبين الطبيعة المغلقة للمسار . وهذا الرمز ظهر أيضا فى صياغة قانون « جاوس» ، حيث استخدم تكامل على سطح مغلق .

المعادلة (٢١) صحيحة للمجالات الاستاتيكية ، ولكننا سنرى مؤخرا كثيرا أن « فاراداى » بين أنها كانت غير كاملة عندما وجدت مجالات مغناطيسية متغيرة مع الزمن . وواحد من أعظم إسهامات « ماكسويل » للنظرية الكهرومغناطيسية ، كان فى إبانة أن مجالا كهربيا متغيرا مع الزمن أنتج مجالا مغناطيسيا ، ولذلك يجب أن نتوقع فيما بعد أن (٢١) ليست حينئذ صحيحة عندما يتغير أى من $\mathbf{E}$ أو $\mathbf{H}$ مع الزمن .

وبحصر اهتمامنا للحالة الاستاتيكية حيث $\mathbf{E}$ لايتغير مع الزمن ، اعتبر دائرة التيار المستمر الموضحة فى شكل ٤ ـ ٥ . نقطتين ، A و B ، محددتين ، و (٢١) ينص على

أن حمل وحدة شحنة من A خلال R_2 و R_3 الى B والعودة إلى A خلال R_1 لاينطوى على شغل ، أو أن مجموع فروق الجهد ، حول أى مسار مغلق هو صفر .

لذلك معادلة (٢١) هى مجرد صورة عامة أكثر من قانون « كيرشوف » الدائرى للجهود ، أكثر عمومية فى أننا نستطيع تطبيقها على أى منطقة حيث يوجد مجال كهربى ولسنا مقيدين بدائرة تقليدية مكونة من أسلاك ، ومقاومات ، وبطاريات .



شكل ٤ ـ ٥ مسألة دائرة تيار مستمر بسيطة والتى يجب أن تحل بتطبيق $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{L}$ على صورة قانون « كيرشوف » للجهد .

معادلة (٢١) سوف يلزم تعديلها قبل أن نستطيع تطبيقها على مجالات متغيرة مع الزمن . وسوف نعتنى بهذا فى الفصل العاشر ، وفى الفصل الثالث عشر سنستطيع حينئذ أن ننشىء الصيغة العامة لقانون كيرشوف للجهد لدوائر فيها تتغير التيارات والجهود مع الزمن .

أى مجال يحقق معادلة له الصورة (٢١) ، أى أن ، حيث التكامل الخطى المغلق للمجال يساوى صفرا ، يقال إنه **مجال محافظ** . والاسم ينبع من الحقيقة أنه لايُبذل شغل (أو أن **الطاقة محفوظة**) حول مسار مغلق . ومجال الجاذبية أيضا محافظ ، لأن أى طاقة تُستنفذ فى تحريك (رفع) جسم ضد المجال تسترجع تماما عندما يعود الجسم (يُخفض) الى موضعه الأصلى . ومجال جاذبية غير محافظ يمكنه أن يحل مشاكل طاقتنا الى الأبد .

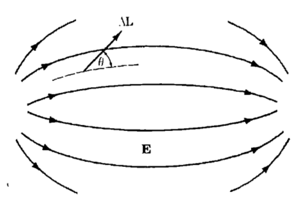
معدل تغير درجة الحرارة مع المسافة ، أو تدرج درجة الحرارة ، مقاسا بالكلفن/متر ، kelvins per meter (K/m) ، هو أيضا مجال محافظ ، حتى فى حالة التغير مع الزمن . إذا لم يكن ، لما أمكننا تعيين درجة حرارة وحيدة لكل نقطة .

ت ٤ ـ ٦ ـ استخدم معادلة (١٩) أو (٢٠) لايجاد الجهد عند $(0,0,10)$ المُسبب بكل من توزيعات الشحنة الآتية فى الفضاء الحر . (أ) حلقة : $\rho_L = 5$nC/m و $\rho = 4$ و $z = 0$ ، (ب) قرص : $\rho_S = 2$ nC/m^2 و $0 \leqslant \rho \leqslant 4$ و $z = 0$ ، (جـ) قرص مثقوب : $\rho_S = 3$nC/m^2 , $2 \leqslant \rho \leqslant 4$ و $z = 0$.

الاجابة : 104.9V , 87.0V , 97.0V .

٤ - ٦ تدرج الجهد

لدينا الآن طريقتان لتعيين الجهد ، واحدة مباشرة من شدة المجال الكهربى بواسطة تكامل خطى ، وأخرى من نفس توزيع الشحنة الأصلى بواسطة تكامل حجمى . وكلا الطريقتين ليستا مفيدتين جدا فى تعيين المجالات فى أغلب المسائل العملية ، لأنه ـ كما سنرى فيما بعد ـ لاشدة المجال الكهربى ، ولا توزيع الشحنة معروف فى الأغلب جدا .



شكل ٤ ـ ٦ متجه عنصر طول تزايدى ΔL مُوضح يصنع زاوية θ مع مجال E ، مُبين بخطوط انسيابه . منابع المجال غير مبينة .

والمعلومات التمهيدية فى الأغلب قابلة لأن تتكون من وصف سطحين متساويى الجهد ، مثل ذكر أن لدينا موصلين متوازيين مقطعهما دائرى عند جهدى 100V و 100V — وربما نرغب فى ايجاد السعة بين الموصلين ، أو توزيع الشحنة والتيار على الموصلين ، والتى يمكن منها حساب الفقد .

ويمكن الحصول على هذه الكميات بسهولة من مجال الجهد ، وهدفنا الحالى سيكون طريقة بسيطة لايجاد شدة المجال الكهربى من الجهد .

ولدينا فعلا علاقة التكامل الخطى العامة بين هاتين الكميتين ،

$$\boxed{V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \qquad (٢٢)$$

ولكن هذه تُستخدم بسهولة أكثر فى الاتجاه العكسى : معطيا E ، أوجد V .

على أن ، (٢٢) يمكن أن تُطبق على عنصر قصير جدا طوله ΔL الذى على طوله E ثابتة أساسا ، مؤدية الى تزايد فرق الجهد ΔV ،

$$(٢٣) \quad \Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{L}$$

دعنا نرى أولاً : إذا كنا نستطيع أن نحدد أى معلومات جديدة ، عن علاقة V بـ E من هذه المعادلة . إعتبر منطقة عامة من الفراغ ، كماهو مبين فى شكل ٤ ـ ٦ ، وفيه يتغير كل من E و V عندما نتحرك من نقطة الى نقطة . معادلة (٢٣) تُخبرنا أن نختار عنصر تزايد متجه طولة $\Delta L = \Delta L a_L$ ونضرب مقداره فى مُركبة E فى اتجاه a_L (أحد تفسيرات الضرب بالنقطة) لنحصل على فرق الجهد الصغير ، بين النقطتين النهائية والابتدائية لـ ΔL .

إذا رمزنا للزاوية بين ΔL و E بـ θ ، فان

$$\Delta V \doteq -E \, \Delta L \cos \theta$$

نود الآن أن نعبر الى النهاية ونعتبر التفاضل dV/dL . ولكى نعمل هذا ، يلزمنا أن نُبين أن V يمكن أن تُفسر على أنها دالة $V(x,y,z)$ الى الآن ، V هى مجرد نتيجة التكامل الخطى (٢٢) . إذا فرضنا نقطة بداية محددة أو مرجعا صفريا ، ثم جعلنا نقطة النهاية (x,y,z) ، فاننا نعرف أن نتيجة التكامل هى دالة وحيدة فى نقطة النهاية (x,y,z) لأن E مجال محافظ . ولذلك V هى دالة وحيدة ـ القيمة $V(x,y,z)$. وحينئذ يمكننا أن نعبر للنهاية لنحصل على

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

فى أى اتجاه يجب أن يوضع ΔL لنحصل على قيمة عظمى لـ ΔV ؟ تذكر أن E هى قيمة محددة عند النقطة التى نعمل عندها ، ولاتعتمد على اتجاه ΔL . المقدار ΔL أيضا ثابت ، ومتغيرنا هو a_L ، وحدة المتجه المبين لاتجاه ΔL . من الواضح أن أقصى تزايد موجب للجهد ، ΔV_{max} ، يحدث عندما يكون $\cos \theta$ هو -1 ، أو أن ΔL تشير فى الاتجاه المضاد لـ E . لهذه الحالة ،

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{max} = E$$

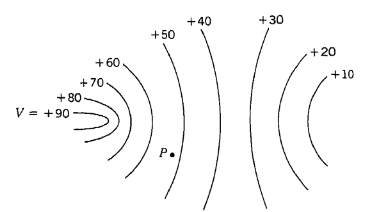
ويُرينا هذا التمرين الصغير خاصيتين للعلاقة بين E و V عند أى نقطة :

١ ـ مقدار شدة المجال الكهربى تُعطى بالقيمة العظمى لمعدل تغير الجهد مع المسافة .

٢ ـ وهذه القيمة العظمى يحصل عليها عندما يكون اتجاه تزايد المسافة مضادا لـ E أو بتعبير آخر : اتجاه E مضاد للاتجاه الذى فيه يزيد الجد بأقصى معدل .

دعنا الان نوضح هذه العلاقات بدلالة الجهد . شكل ٤ ـ ٧ مقصود به أن يبين المعلومات التى أُعطينا إياها عن مجال جهد ما . ويعمل هذا بإظهار الأسطح متساوية

الجهد (موضحة كخطوط ، فى الرسم التخطيطى ثنائى البعد) . نحن نرغب فى معلومات عن شدة المجال الكهربى عند نقطة P . مبتدئين عند P ، نضع مسافة تزايدية صغيرة $\Delta \mathbf{L}$ فى اتجاهات مختلفة ، متصيدين لذلك الاتجاه الذى فيه يتغير الجهد (متزايدا) بأقصى معدل . من الرسم التخطيطى ، يظهر أن هذا الاتجاه الى اليسار وإلى أعلى قليلا .



شكل ٤ ـ ٧ مجال جهد مبين بأسطحه المتساوية الجهد . المجال $\mathbf{E}$ عند أى نقطة عمودى على السطح متساوى الجهد المار بتلك النقطة وموجه نحو اتجاه الأسطح الأكثر سالبية .

ومن خاصيتنا الثانية آنفا ، تكون لذلك شدة المجال الكهربى موجهة فى الاتجاه المضاد أى الى اليمين والى اسفل قليلا عند P . ومقدارها معطى بقسمة الزيادة الصغيرة فى الجهد على عنصر الطول الصغير .

ويبدو مُرجحا أن الاتجاه الذى يزيد فيه الجهد بمعدل أكبر يكون عموديا على متساويات ـ الجهد (فى اتجاه زيادة الجهد) ، وهذا صحيح ، لأنه إذا وجهت $\Delta \mathbf{L}$ فى محازاة متساوى ـ جهد فان $\Delta V = 0$ بتعريفنا للسطح المتساوى الجهد . ولكن حينئذ

$$\Delta V = -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{L} = 0$$

ولأن لا $\mathbf{E}$ ولا $\Delta \mathbf{L}$ صفر ، فان $\mathbf{E}$ يجب أن تتعامد على $\Delta \mathbf{L}$ هذا ، أى تتعامد على متساويات ـ الجهد .

حيث أن معلومات مجال الجهد يُحتمل أكثر أن تعين أولا ، دعنا نصف اتجاه $\Delta \mathbf{L}$ الذى يؤدى الى أعظم زيادة فى الجهد رياضيا بدلالة مجال الجهد أكثر من شدة المجال الكهربى . ونعمل هذا بأن ندع $\mathbf{a}_n$ تكون وحدة متجه عمودى على السطح متساوى ـ الجهد وموجه فى اتجاه الجهود الأعلى . حينئذ يُعبر عن شدة المجال الكهربى بدلالة الجهد ،

$$(٢٤) \quad \mathbf{E} = -\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} \mathbf{a}_N$$

التى تبين أن مقدار E معطى بأقصى معدل تغير فراغى لـV واتجاه E عمودى على السطح متساوى ـ الجهد (فى اتجاه تناقص الجهد) .

ولأن $dV/dL|_{max}$ يحدث عندما يكون ΔL فى اتجاه a_N ، فيمكننا أن نذكر أنفسنا بهذه الحقيقة بأن ندع

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} = \frac{dV}{dN}$$

و

$$(٢٥) \quad \mathbf{E} = -\frac{dV}{dN}\mathbf{a}_N$$

معادلة (٢٤) أو (٢٥) تخدم فى إعطاء تفسير فيزيائى لعملية إيجاد شدة المجال الكهربى من الجهد . وكلاهما وصفى لأسلوب عام ، ولاننوى استخدامها مباشرة للحصول على معلومات كمية . وهذا الأسلوب المؤدى من V الى E ليس فريدا لهذا الزوج من الكميات ، ولكن قد ظهر فى العلاقة بين مجال مقياسى ومجال متجه فى الهيدروليكا ، علم الديناميكا الحرارية ، والمغناطيسيات ، وفى الحقيقة فى كل مجال تقريبا يطبق فيه تحليل المتجهات .

والعملية على V التى تحصل بها على E ـ معروفة بالتدرج (gradient) ، وتدرج مجال مقياسى T معرف كما يلى

$$(٢٦) \quad \boxed{\text{Gradient of } T = \text{grad } T = \frac{dT}{dN}\mathbf{a}_N}$$

حيث a_N وحدة متجه عمودى على الأسطح متساوية الجهد ، وذلك العمودى مختار بحيث يشير فى اتجاه القيم المتزايدة لـ T .

وباستخدام هذا التعبير الجديد ، يمكننا الآن كتابة العلاقة بين V و E كما يلى :

$$(٢٧) \quad \boxed{\mathbf{E} = -\text{grad } V}$$

ولأننا قد أوضحنا أن V دالة وحيدة فى x،y و z ، فيمكننا أخذ تفاضلها الكلى

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

ولكن عندنا أيضا

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz$$

ولأن كلا التعبيرين صحيح لأى dx , dy و dz ، فان

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

وهذه النتائج يمكن جمعها اتجاهيا لتعطى

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)} \qquad (٢٨)$$

ومقارنة (٢٧) و (٢٨) تمدنا بتعبير يمكن أن يستخدم لايجاد التدرج فى الاحداثيات الكرتيزية ،

$$\boxed{\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z} \qquad (٢٩)$$

وتدرج مقدار مقياسى هو متجه ، والاختبارات القديمة تبين أن وحدات المتجهات التى غالبا تضاف خطأ مع تعبير الانفراج ، تظهر أنها تلك التى حذفت خطأ من التدرج . بمجرد أن يفهم التفسير الفيزيائى للتدرج المعبر عنه ب (٢٦) ، على أن يظهر أقصى معدل فراغى لتغير كمية مقياسية ، والاتجاه الذى يحدث فيه هذه النهاية العظمى ، فيجب أن تكون الطبيعة المتجهة للتدرج واضحة من ذاتها .

العامل الاتجاهى $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$

يمكن أن يستخدم تقليديا كعامل على مقياسى T , ΔT منتجا

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

ومنها نرى أن

$$\boxed{\nabla T = \text{grad } T}$$

وهذا يسمح لنا أن نستخدم تعبيرا موجزا جدا لربط E و V .

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{٣٠}$$

ويمكن التعبير عن التدرج بدلالة المشتقات الجزئية فى نظم احداثيات أخرى من خلال تطبيق تعريفة (٢٦) . وهذه التعبيرات مُستنتجة فى الملحق (أ) ومكررة أسفل للتيسير عند معالجة مسائل لها تماثل اسطوانى أو كروى . وهى تظهر أيضا بداخل الغلاف الخلفى .

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad (\text{كارتيزى}) \tag{٣١}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad (\text{إسطوانى}) \tag{٣٢}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi \quad (\text{كروى}) \tag{٣٣}$$

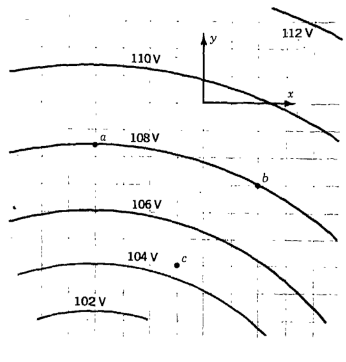
لاحظ أن مقام كل حد له صورة أحد مركبات $d\mathbf{L}$ فى ذلك النظام الاحداثى ، ماعدا أن التفاضلات الجزئية تحل محل التفاضلات العادية ، فمثلا ، $r \sin \theta\, d\phi$ تصبح $r \sin \theta \partial\phi$

وكمثال بسيط على استخدام التدرج فى إيجاد شدة المجال الكهربى من الجهد ، دعنا نبدأ بمجال الجهد لشحنة نقطية فى الاحداثيات الكروية (قسم ٤ ـ ٤ ، معادلة (١٥)) ،

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

التدرج فى الاحداثيات الكروية معطى بـ (٣٣) ، ونرى أن المركبة الوحيدة لـ E ستكون المركبة نصف القطرية لأن V دالة فى r فقط . بأخذ المشتقة الجزئية ، كماهو مبين بـ (٣٣) ، نحصل على

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r .$$



شكل ٤ ـ ٨ انظر مسألة ت ٤ ـ ٧ .

ت ـ ٤ ـ ٧ جزء من مجال جهد ثنائى ـ البعد $(E_z = 0)$ مبين فى شكل ٤ ـ ٨ . خطوط الشبكة فى المجال الفعلى على أبعاد 1mm . عين قيما تقريبية لـ E فى الاحداثيات الكرتيزية عند : (أ) a ، (ب) b ، (جـ) c .

الاجابة : V/m $\quad -750\mathbf{a}_y; \; -325\mathbf{a}_x - 700\mathbf{a}_y; \; -350\mathbf{a}_x - 950\mathbf{a}_y$

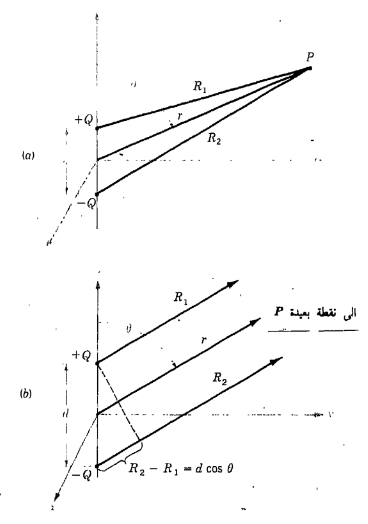
ت ٤ ـ ٨ : إذا أعطيت مجال الجهد $V = 50\,x^2yz + 20y^2$V فى فضاء حر ، أوجد : (أ) V عند $P\,(1,2,3)$ ، (ب) $\mathbf{E}_P$ ، (جـ) ρ_P ، (د) dV/dN عند P ، (هـ) $\mathbf{a}_N$ عند P .

الاجابة : 380 V; $\quad -600\mathbf{a}_x - 230\mathbf{a}_y - 100\mathbf{a}_z$ V/m; $\quad -5.67$ nC/m^3; $\quad 650$ V/m; $\quad 0.923\mathbf{a}_x + 0.354\mathbf{a}_y + 0.1538\mathbf{a}_z$

٤ ـ ٧ ثنائى القطب :

مجالات ثنائى القطب التى سوف نُظهرها فى هذا القسم مهمة جدا فى أنها تكون الأساس لتصرف المواد العازلة فى المجالات الكهربية ، كما هو مُناقش فى جزء من الفصل التالى ، كما أنها تبرر استخدام الصور ، كما هو مشروح فى قسم ٥ ـ ٥ من الفصل القادم . علاوة على ذلك ، فان هذا الاظهار سوف يخدم فى توضيح أهمية مفهوم الجهد المقدم فى هذا الفصل .

ثنائى القطب الكهربى ، أوببساطة ثنائى القطب ، هو الاسم المُعطى لشحنتين نقطيتين ، لهما مقدار متساو ، وإشارة مضادة مفصولتان بمسافة صغيرة بالنسبة للمسافة الى النقطة P التى نريد أن نُعرف عندها المجالات الكهربية والجهد .



شكل ٤ ـ ٩(أ) هندسة مسألة ثنائى القطب الكهربى . عزم ثنائى القطب $\mathbf{P} = Q\mathbf{d}$ يكون فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. (ب) بالنسبة لنقطة بعيدة P , R_1 هى أساسيا موازية لـ R_2 ، ونجد أن $R_2 - R_1 = d \cos \theta$.

وثنائى القطب مبين فى شكل ٤ ـ ٩أ . النقطة البعيدة P موصوفة بالاحداثيات الكروية r , θ و $\phi = 90$ ، نظرا للتماثل السمتى . الشحنتان النقطيتان الموجبة والسالبة لهما مسافة فاصلة d واحداثيات كرتيزية $(0,0, 1/2\ d)$ و $(0,0, -1/2d)$ ، بالترتيب .

وهذا كاف جدا بالنسبة للناحية الهندسية . ماذا يجب أن نعمل بعد ذلك ؟ هل يجب أن نُوجد شدة المجال الكهربى الكلى بجمع المجالات المعروفة لكل شحنة

نقطية ؟ . هل من الأسهل أن نوجد مجال الجهد الكلى أم لا ؟ فى أى من الحالتين ، بعد إيجاد أحدهما ، سنوجد الآخر منه قبل تسمية المسألة محلولة .

إذا اخترنا إيجاد E أولا ، سيكون لدينا مركبتان لنتبعهما فى الاحداثيات الكروية (التماثل يبين أن E_ϕ صفر) ، وحينئذ الطريقة الوحيدة لايجاد V من E هى باستخدام التكامل الخطى .

هذه الخطوة الأخيرة تشتمل على تعيين مرجع صفرى مناسب للجهد ، لأن التكامل الخطى يُعطينا فقط فرق الجهد بين النقطتين عند نهايّات مسار التكامل .

وفى الناحية الأخرى ، تعيين V أولا ، وهى كمية واحدة ، وليست متجه ، ولها تعبير أبسط قليلا فى حالة شحنة نقطية واحدة ، متبوعة بعملية التدرج لايجاد E . تبدو أنها مسألة اسهل بكثير .

وباختيار هذه الطريقة الأسهل ، ندع المسافات من Q و $-Q$ الى P تكون R_1 و R_2 ، بالترتيب ، ويُكتب الجهد الكلى كما يلى

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

لاحظ أن المستوى $Z = 0$ ، فى منتصف المسافة بين الشحنتين النقطيتين ، هو المحل الهندسى لنقط لها $R_1 = R_2$ ، ولذلك فجهده صفر ، مثل كل النقط عند مالانهاية .

ولنقطة بعيدة ، $R_1 = R_2$ ، وحاصل الضرب $R_1 R_2$ فى المقام يمكن أن يستبدل بـ r^2 . على أنه ، لايمكن عمل التقريب فى البسط دون الحصول على الاجابة عديمة الأهمية أن مجال الجهد يقترب من الصفر كلما بعدنا جدا عن ثنائى القطب . وبالرجوع أقرب قليلا من ثنائى القطب ، نرى من شكل ٤ ـ ٩ب أن $R_2 - R_1$ يمكن أن تُقرب بسهولة جدا إذا فرض أن R_1 و R_2 متوازيان ،

$$R_2 - R_1 \doteq d \cos\theta$$

وحينئذ تكون النتيجة النهائية

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (٣٤)$$

ومرة أخرى نلاحظ أن المستوى $z = 0$ $(\theta = 90)$ يكون عند جهد صفرى .

باستخدام علاقة التدرج فى الاحداثيات الكروية ،

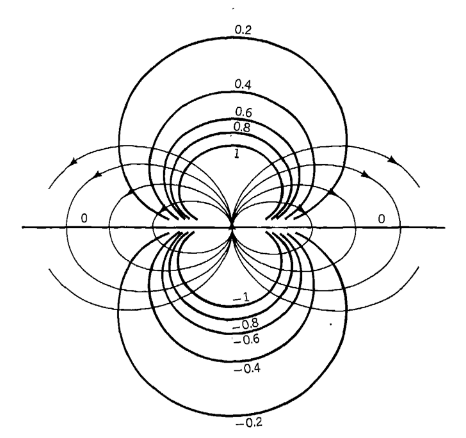
$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi\right)$$

نحصل على

$$\mathbf{E} = -\left(-\frac{Qd\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{a}_r - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{a}_\theta\right) \qquad (٣٥)$$

أو

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\mathbf{a}_r + \sin\theta\mathbf{a}_\theta)} \qquad (٣٦)$$



شكل ٤ ـ ١٠ المجال الكهروستاتيكى لثنائى قطب نقطى عزمه فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. ستة أسطح متساوية ـ الجهد مميزة بقيم نسبية لـ V .

وهذه هى مجالات ثنائى القطب البعيدة المرغوبة ، حصل عليها بقدر قليل جدا من العمل . وأى طالب عنده عدة ساعات ليقضيها يمكنه أن يحاول حل المسألة فى الاتجاه العكسى ، والمؤلف يعتبر الطريقة من الطول والإسهاب حتى أنه لا يجدر احتوائها هنا ولو حتى للتوضيح .

وللحصول على تخطيط لمجال الجهد ، نختار ثنائى قطب أن $Qd/(4\pi\epsilon_0) = 1$ وحينئذ $\cos\theta = Vr^2$ والخطوط السميكة فى شكل ٤ ـ ١٠ تبين متساويات ـ الجهد التى

لها V تساوى 0 , ± 0.2 , ± 0.4 , ± 0.6 , ± 0.8 و ± 1 . كما هو مُبين . ومحور ثنائى القطب رأسى والشحنة الموجبة عند القمة . ويُحصل على خطوط الانسياب للمجال الكهربى بتطبيق طُرق القسم ٢ ـ ٧ فى الاحداثيات الكروية ،

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{r\, d\theta}{dr} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

أو

$$\frac{dr}{r} = 2\cot\theta\, d\theta$$

التى نحصل منها على

$$r = C_1 \sin^2\theta$$

وخطوط الانسياب الرفيعة المبينة فى شكل ٤ ـ ١٠ هى لـ C_1 تساوى $2, 1.5, 1$ و 2.5

يمكن تبسيط مجال الجهد لثنائى القطب ، معادلة (٣٤) ، باستخدام عزم ثنائى القطب . دعنا أولا نرمز لطول المتجه الموجه من $-Q$ الى $+Q$ بـ $\mathbf{d}$ ونُعرف عندئذ عزم ثنائى القطب بأنه $Q\mathbf{d}$ ونُخصص لها الرمز $\mathbf{p}$. وعلى ذلك

$$\boxed{\mathbf{p} = Q\mathbf{d}} \qquad (٣٧)$$

ولأن $\mathbf{d}.\mathbf{a}_r = d\cos\theta$ ، فإننا نحصل على

$$V = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (٣٨)$$

هذه النتيجة يمكن أن تعمم كالتالى

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\,\mathbf{p}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} \qquad (٣٩)$$

حيث $\mathbf{r}$ تحدد موقع نقطة المجال P و $\mathbf{r}'$ تعين مركز ثنائى القطب . معادلة (٣٩) لاتعتمد على أى نظام إحداثيات .

عزم ثنائى القطب $\mathbf{P}$ سيظهر مرة أخرى عندما نناقش المواد العازلة . ولأنه يساوى حاصل ضرب الشحنة والبعد الفاصل ، فلا عزم ثنائى القطب ، ولا الجهد سوف يتغير ، كلما زادت Q ونقصت $\mathbf{d}$ ، بشرط أن يبقى حاصل الضرب ثابتا . الحالة النهائية لثنائى القطب نقطى تتحقق عندما ندع $\mathbf{d}$ تقترب من الصفر و Q تقترب من مالا نهاية بحيث يكون حاصل الضرب $\mathbf{p}$ محدودا .

وبتوجيه انتباهنا إلى المجالات المحصلة ، فإنه لمن المهم أن نلاحظ أن مجال الجهد الآن يتناقص كعكس مُربع المسافة ، وتتناقص شدة المجال الكهربى كعكس مكعب المسافة من ثنائى القطب . ويضعف كل مجال بمعدل أكبر من نظيره للشحنة النقطية ، ولكن هذا ليس أكثر مما يجب أن نتوقع لأن الشحنات المتضادة تظهر أقرب لبعضها عند المسافات الأكبر ، وتتصرف أكثر مثل شحنة نقطية واحدة ذات O C .

والتنظيمات المتماثلة لأعداد أكبر من الشحنات النقطية تنتج مجالات تتناقص كعكس قوى أعلى وأعلى لـ r . وتوزيعات الشحنة هذه تسمى **متعددة الأقطاب** ، وهى تستخدم فى متسلسلة لانهائية لتقريب تشكيلات شحنة أكثر تعقيدا .

ت ٤ ـ ٩ ثنائى قطب عند نقطة الأصل فى فضاء حر له عزم مقداره :
$400\pi_0(0.6\mathbf{a}_x - 0.75\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_y)$ C.m . أوجد الجهد عند :
(أ) $P_A(0,0,5)$ ، (ب) $P_B\ (0,5,0)$ ، (جـ) $P_C(5,0,0)$ ، (د) $P_D(2,3,4)$.

الاجابة : 3.2V , -3V , 2.4V , 1.597V .

ت ٤ ـ ١٠ ثنائى قطب فى فضاء حر مكون من شحنة مقدارها 1 nC عند $(0,0,0.01)$ و -1nC عند $(0,0,-0.01)$ أوجد عند نقطة $P(r = 0.2, \theta = 45 , \phi = 0)$: (أ) E ، (ب) |E| (جـ) مقدار E الذى سوف ينتج من الشحنة $+1$nC وهى تعمل بمفردها .

الاجابة : $31.8\mathbf{a}_r + 15.89\mathbf{a}_\theta$V/m , 35.5V/m , 241V/m .

٤ ـ ٨ كثافة الطاقة فى المجال الكهروستاتيكى :

لقد قدمنا مفهوم الجهد باعتباره الشغل المبذول ، أو الطاقة المستنفذة ، فى تحريك شحنة نقطية فى مجال كهربى ، والآن يجب أن نربط الأطراف السائبة لتلك المناقشة بتتبع أثر سريان الطاقة خطوة واحدة أبعد .

إن إحضار شحنة موجبة من مالانهاية فى مجال شحنة موجبة أخرى يتطلب شغلا ، هذا الشغل يبذل بواسطة المنبع الخارجى المحرك للشحنة . دعنا نتخيل أن المنبع الخارجى يحمل الشحنة حتى نقطة قريبة من الشحنة الثابتة ، ثم يُمسكها هناك . الطاقة يجب أن تحفظ ، والطاقة المستنفذة فى إحضار هذه الشحنة لموضعها تمثل الآن طاقة جهد ، لأنه إذا رفع المنبع الخارجى قبضته عن الشحنة ، فإنها ستكتسب عجلة مبتعدة عن الشحنة الثابتة ، مكتسبة طاقة حركة لذاتها والقدرة على عمل شغل .

ولكى نوجد طاقة الجهد الموجودة فى نظام شحنات ، يجب أن نوجد الشغل المبذول بواسطة منبع خارجى فى وضع الشحنات فى أماكنها .

ويمكننا أن نبدأ بتصور كون فارغ . فإحضار شحنة Q_1 من مالا نهاية إلى أى موضع لايتطلب شغلا ، لعدم وجود مجال هناك [1] . ووضع Q_2 عند نقطة فى مجال Q_1 يتطلب قدرا من الشغل معطى بحاصل ضرب الشحنة Q_2 والجهد عند تلك النقطة نتيجة Q_1 . فاذا رمزنا لهذا الجهد بـ $V_{2,1}$ ، حيث يبين الرمز السفلى الأول الموضع والرمز السفلى الثانى المنبع ، أى أن $V_{2,1}$، هو الجهد عند موضع Q_2 نتيجة Q_1 فحينئذ

الشغل لوضع $Q_2 = Q_2\ V_{2,1}$ وبالمثل ، يمكننا التعبير عن الشغل المطلوب لوضع كل شحنة إضافية فى مجال أولئك الموجودين بالفعل :

الشغل لوضع $Q_3 = Q_3\ V_{3,1} + Q_3\ V_{3,2}$

الشغل لوضع $Q_4 = Q_3\ V_{4,1} + Q_2\ V_{4,2} + Q_4\ V_{4,3}$

الخ . والشغل الكلى يحصل عليه باضافة كل مساهمة :

الشغل الكلى للوضع = طاقة جهد المجال = W_E

$$W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \cdots \quad (٤٠)$$

بملاحظة صورة حد ممثل فى المعادلة السابقة ،

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}}$$

حيث يمثل كل من R_{13} و R_{31} المسافة المقياسية بين Q_1 و Q_3 ، ونرى أنه كان ممكنا كتابتها $Q_1 V_{1,3}$ بنفس الصحة . واذا استبدل كل حد فى تعبير الطاقة الكلية بمساويه ، نحصل على

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \cdots \quad (٤١)$$

وجمع تعبيرى الطاقة (٤٠) و (٤١) يعطينا فرصة لتبسيط النتيجة قليلا :

$$\begin{aligned} 2W_E = \quad & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots) \\ & + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots) \\ & + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

(١) على أن ، شخصا ما فى المشغل عند مالانهاية عليه ان يعمل كمية لانهائية من الشغل ليخلق الشحنة النقطية فى المقام الأول ! . ما كمية الطاقة المطلوبة لضم نصفى - شحنة ،حتى ينطبقا ليكونا وحدة شحنة ؟

لأن كل مجموع للجهود بين الأقواس هو الجهد المتضام نتيجة كل الشحنات عدا الشحنة عند النقطة التى يوجد عندها هذا الجهد المتضام . وبتعبير آخر ،

$$V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots = V_1$$

وهو الجهد عند موضع Q_1 نتيجة وجود Q_2 ، Q_3 ، . . . . ولذلك يكون لدينا

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \cdots) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=N} Q_m V_m \qquad (٤٢)$$

ولكى نحصل على تعبير للطاقة المختزنة فى منطقة توزيع شحنة متصل ، تستبدل ρdv بكل شحنة ، ويصبح المجموع تكاملا ،

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho V \, dv \qquad (٤٣)$$

المعادلات (٤٢) و (٤٣) تتيح لنا أن نجد طاقة الجهد الكلية الموجودة فى نظام شحنات نقطية أو كثافة شحنة حجمية موزعة . ويمكن بسهولة كتابة تعبيرات مماثلة بدلالة كثافة شحنة خطية أو سطحية . وعادة نُفضل أن نستخدم (٤٣) وندعها تمثل كل نماذج الشحنة المختلفة التى قد يجب علينا اعتبارها . وهذا يمكن أن يعمل دائما باعتبار أن الشحنات النقطية ، كثافة الشحنة الخطية ، أوكثافة الشحنة السطحية توزيعات متصلة لكثافة شحنة حجمية خلال مناطق صغيرة جدا . وسنوضح مثل هذا الأسلوب بمثال بعد قليل .

وقبل أن نشرع فى أى تفسير لهذه النتيجة ، يجب أن ندرس أسطرا قليلة من تحليل المتجهات الأكثر صعوبة ونحصل على تعبير مكافىء لـ (٤٣) ولكنه مكتوب بدلالة E و D .

ونبدأ بجعل التعبير أطول قليلا . باستخدام معادلة « ماكسويل » الأولى ، نستبدل ρ بما يساويها $\nabla . \mathbf{D}$ ونستفيد من متطابقة اتجاهية صحيحة لأى دالة مقياسية V وأى دالة اتجاهية $\mathbf{D}$ ،

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V) \; . \qquad (٤٤)$$

والتى يمكن بسهولة أن تُثبت بالفك فى الاحداثيات الكرتيزية . وعلى ذلك نحصل ، بالتتابع ، على

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho V \, dv = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V \, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] \, dv$$

وباستخدام نظرية الانفراج من الفصل الأخير ، يحول التكامل الحجمى الأول فى المعادلة الأخيرة الى تكامل سطحى مغلق ، حيث يحيط السطح المغلق بالحجم المعتبر . هذا الحجم ، الذى ظهر أولا فى (٤٣) ، يجب أن يحتوى على كل شحنة ، وعلى ذلك لايمكن أن يكون هناك شحنات خارج هذا الحجم . ولذلك يمكننا أن نعتبر الحجم لانهائى الامتداد إذا رغبنا . ونحصل على

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot (\nabla V)\, dv$$

التكامل السطحى يساوى صفرا ، لأن على هذا السطح المغلق المحيط بالكون نرى أن V تقترب من الصفر على الأقل كانحدار $1/r$ (تبدو الشحنات كشحنة نقطية من هناك) ، D تقترب من الصفر على الأقل كانحدار $1/r^2$ ، بينما عنصر السطح التفاضلى ، يظهر أكثر فأكثر مثل جزء من كرة ، متزايدة فقط كـ r^2 . لذلك يقترب المكامل من صفر كانحدار $1/r$ على الأقل . وفى النهاية يكون المكامل والتكامل صفرا . بتعويض $\mathbf{E} = -\nabla V$ فى التكامل الحجمى المتبقى ، نحصل على إجابتنا ،

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \epsilon_0 E^2\, dv \qquad (٤٥)$$

دعنا الآن نستخدم هذا التعبير الأخير لنحسب الطاقة المختزنة فى المجال الكهروستاتيكى لقسم من كابل أومكثف محورى طوله L . عندنا من الفصل السابق

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0 \rho}\mathbf{a}_\rho$$

حيث ρ_S هى كثافة الشحنة السطحية على الموصل الداخلى ، الذى نصف قطره a . وعلى ذلك ،

$$W_E = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \epsilon_0 \frac{a^2\rho_S^2}{\epsilon_0^2 \rho^2}\rho\, d\rho\, d\phi\, dz = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

وهذه النتيجة نفسها يمكن الحصول عليها من (٤٣) . نختار الموصل الخارجى كمرجعنا الصفرى للجهد ، على ذلك يكون جهد الاسطوانة الداخلية

$$V_a = -\int_b^a E_\rho\, d\rho = -\int_b^a \frac{a\rho_S}{\epsilon_0 \rho}\, d\rho = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

يمكن أن تُفسر كثافة الشحنة السطحية ρ_s عند $\rho = a$ على أنها كثافة شحنة حجمية $\rho_v = \rho_s/t$ ، ممتدة من $\rho = a - 1/2\, t$ إلى $\rho = a + 1/2\, t$ ، حيث $t \ll a$. لذلك يكون المكامل فى (٤٣) صفرا فى كل مكان بين الاسطوانتين (حيث تكون كثافة الشحنة

الحجمية صفرا) ، وكذلك على الاسطوانة الخارجية (حيث يكون الجهد صفرا) . ولذلك يجرى التكامل فقط خلال القشرة الاسطوانية عند $\rho = a$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho_v V\, dV = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t}\frac{a\rho_S}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

ومنها

$$W_E = \frac{a^2 \rho_S{}^2 \ln (b/a)}{\epsilon_0} \pi L$$

مرة أخرى

ويتخذ هذا التعبير صورة مألوفة أكثر إذا عرفنا أن الشحنة الكلية على الموصل الداخلى هى $Q = 2\pi a L\rho_s$. وبضم ذلك مع فرق الجهد بين الاسطوانتين ، V_a ، نرى أن

$$W_E = \frac{1}{2} Q V_a$$

التى يجب أن تكون مألوفة على أنها الطاقة المختزنة فى مكثف .

والسؤال عن أين تُختزن الطاقة فى مجال كهربى لم يجب عليه بعد . وطاقة الجهد لايمكن أبدا أن تربط تماما بدلالة موضع فيزيائى . أحدهم يرفع قلما ، يكتسب القلم طاقة جهد . هل تختزن الطاقة فى جزيئات القلم ، فى مجال الجاذبية بين القلم والأرض أم فى مكان ما غامض ؟ . هل تُختزن الطاقة فى مكثف فى الشحنات نفسها ، فى المجال ، أم أين ؟ لايستطيع أحد أن يقدم أى برهان لرأيه أو لرأيها الشخصى ، ويجب أن يُترك تقرير هذا الأمر للفلاسفة .

وتسهل نظرية المجال الكهرومغناطيسية الاعتقاد بأن طاقة أى مجال كهربى أو توزيع للشحنة مختزن فى المجال نفسه ، لأنه إذا أخذنا (٤٥) ، وهو تعبير مضبوط وصحيح بصرامه ،

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv$$

ونكتبه على أساس تفاضلى ،

$$dW_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv$$

أو

$$\boxed{\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}} \qquad (٤٦)$$

نحصل على كمية $1/2$ D.E ، التى لها وحدات كثافة طاقة ، أو جول للمتر المكعب . ونعرف أننا إذا كاملنا كثافة الطاقة هذه على كل الحجم المحتوى على المجال ، فان النتيجة تساوى حقا الطاقة الكلية الموجودة ، ولكن ليس لدينا تبرير لقول أن الطاقة المختزنة فى كل عنصر حجم تفاضلى dv هى $1/2$D.E dv أكثر مما لدينا عند النظر الى (٤٣) والقول أن الطاقة المختزنة هى $1/2\ \rho V dv$. ولكن التفسير الذى تقدمه (٤٦) مناسب ، وسنستخدمه الى أن يثبت خطأه .

ت ٤ ـ ١١أوجد الطاقة المختزنة فى فضاء حر فى المنطقة الكروية $r \leqslant 10$ لمجال الجهد (أ) $V = 100r^2$ (ب) $V = 100r^2 \sin\theta$

الاجابة : 44.5mJ , 33.4mJ .

مراجع مقترحة :

1 - Attwood, S.S.: "Electric and Magnetic Fields" 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

هناك عدد كبير من خرائط المجال المرسومة جيدا لتوزيعات شحنة مختلفة بما فيها مجال ثنائى القطب . تحليل المتجهات غير مستخدم

2 - Skilling, H.H.: (انظر المراجع المقترحة للفصل الثالث)

التدرج مشروح على pp. 19 — 21 .

(انظر المراجع المقترحة للفصل الأول)

3 - Thomas, G.B., Jr., and R.L. Finneg :

المشتقة الاتجاهية والتدرج مقدمين على pp. 59. — 599

مسائل :

١ ـ ماهو عنصر الطاقة التزايدى (in pico joules) التى يُحتاج اليها لتحريك شحنة $1\ \mu c$ فى المجال $\mathrm{E} = 12\mathrm{a}_\rho - 20\mathrm{a}_\phi + 10\mathrm{a}_z$ V/m من النقطة $P\ (8, 30°, 11)$ إلى النقطة : (أ) $Q_A\ (9,30°\ ,\ 11)$ ، (ب) $Q_B\ (8,30°,\ 10)$ ، (جـ) $Q_c\ (8,30.1°,11)$ ، (د) $Q_D(10,35°,\ 8)$ ؟

٢ ـ مجال كهربى معطى بـ :

$\mathrm{E} = -10e^y(\sin 2z\mathrm{a}_x + x\sin 2z\mathrm{a}_y + 2x\cos 2z\mathrm{a}_z)$V/m .

(أ) أوجد $|\mathrm{E}|$ عند $P\ (5,0,\pi/12)$. (ب) ماكمية الشغل المبذول فى تحريك شحنة مقدارها 2C مسافة عنصرية تزايدية مقدارها 1 mm من P فى اتجاه a_x ؟ (جـ) a_y ؟ (د) a_z ؟ (هـ) $(\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y + \mathrm{a}_z)$ ؟

٣ ـ أوجد قيمة $\int \mathrm{F}.d\mathrm{L}$ لـ $\mathrm{F} = (x^2 + 5yz)\mathrm{a}_x - z^3\mathrm{a}_y + x^2yz\mathrm{a}_y$ من $(1,2,3)$ الى $(6,1,2)$ على طول المسار المكون من ، (أ) الأجزاءالثلاثة الخطية المستقيمة :

$y = 2$, $z = 3$, $x = 6$, $z = 3$, $x = 6$, $y = 1$ ، (ب) خط تقاطع $z = y + 1$
و $x = 11 - 5y$.

٤ - دع $G = 2x^2ya_x - (4x + z)a_y$ وأوجد قيمة التكامل الخطى $\int G.dL$ من نقطة ابتدائية $P\ (1,1,1)$ إلى نقطة نهائية $Q\ (3,5,1)$ مستخدما المسار : (أ) الخط المستقيم $z = 1$, $y = 2x - 1$ ، (ب) القطع المكافىء : $2y = x^2 + 1$, $z = 1$.

٥ - إذا أعطيت $E = 10ya_x + 10xa_y - 2a_z$ V/m ، عين الشغل المتضمن فى حمل شحنة مقدارها 3C من $(0, -2,8)$ الى $(5,3,23)$ على طول المسار :
(أ) $y^2 = x + 4$, $z = 2x^2 - y^3$ ، (ب) الخط المستقيم المباشر .

٦ - إذا أعطيت المجال الكهربى فى الاحداثيات الكروية :
$E = 60\ (\cos\theta a_r + 0.5\sin\theta a_\theta\ 1/r^3$ V/m فما مقدار الشغل الذى يجب أن يبذل فى حمل شحنة $1C$ من :
$A\ (3, \theta = 60°\ , \phi = 90°)$ إلى $B\ (2, \theta = 120°, \phi = 0)$ على طول سلسلة من أجزاء المسار التى عليها r و ϕ مثبتين أولا ، r و θ ، وأخيرا θ و ϕ ؟

٧ - ثلاث شحنات نقطية متماثلة كل منها $4\mu C$ موضوعة عند أركان مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه 0.5mm فى فضاء حر . ما مقدار الشغل الذى يجب أن يبذل لتحريك احدى الشحنات الى نقطة عند منتصف المسافة بين الشحنتين الأخريين ؟

٨ - إذا أعطيت شدة المجال الكهربى $E = [\ 10/(x^2 + y^2)]\ (xa_x + y\ a_y) - 2a_z$ V/m ، دع الجهد يكون 10V عند $(3,4,5)$. أوجد V عند $(6, -8, 7)$.

٩ - إذا كان $E = 50z\sin\phi\ a_\rho + 50z\cos\phi\ a_\phi + 50\rho\sin\phi\ a_z$V/m والجهد عند نقطة الأصل مأخوذ على أنه صفر ، أوجد$V(2,150°,3)$ باستخدام المسار : (أ) جزءان مستقيما الخط : $\phi = 150°$, $z = 0$ و $\rho = 2$, $\phi = 150°$ ، (ب) $\rho = 12\phi/5\pi$, $z = 18\phi/5\pi$.

١٠ - لوح منتظم من الشحنة ، $\rho_{s1} = 40\epsilon_0$ C/m² موضوع فى المستوى $x = 0$ فى فضاء حر . (أ) أوجد V عند $P\ (7, -3,1)$ إذا كان $V = 0$ عند $Q\ (2,4,6)$. (ب) لوح شحنة ثان $\rho_{s2} = -15\epsilon_0$ C/m² موجود عند المستوى $y = 6$. مرة أخرى أوجد V عند $P\ (7, -3, 1)$ إذا كان $V = 0$ عند $Q\ (2,4,6)$.

١١ - شحنة خطية منتظمة ذات 0.6 nC/m تقع على طول المحور z فى فضاء حر . أوجد الجهد عند $P\ (3,4,2)$ إذا كان : (أ) $V = 0$ عند $A\ (2, -9,3)$ ، (ب) $V = 24$V عند $B\ (10,24,1)$. أوجد V_{AB} إذا كان : (جـ) $V_p = 41$V ، (د) $V_p = 0$.

١٢ - شحنات نقطية $Q_A = 5nC$, $Q_B = -2$nC و $Q_C = 1$nC موضوعة فى فضاء حر عند $P_A(1,2, -2)$, $P_B(-2, 4,1)$ و $P_C\ (3,0,2)$ ، بالترتيب . أوجد الجهد عند $P\ (-3, -2, 4)$ اذا كان : (أ) $V = 0$ عند مالانهاية ، (ب) $V = 5$V عند مالانهاية ، (جـ) $V = 0$ عند $P_R\ (0,5, -2)$.

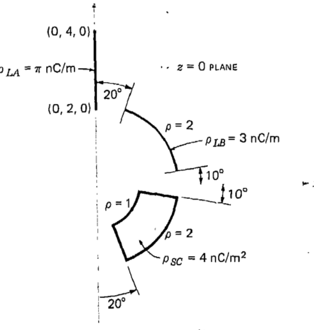
١٣ - خط شحنة ، $\rho_L = 10\pi\epsilon_0$ C/m ، يقع على طول المحور x فى فضاء حر ، بينما شحنة نقطية $Q = 4\pi\epsilon_0$C ، موضوعة عند $(2,4,-1)$. وثلاث نقط محددة بـ $A\ (1,-1,2)$ ، $B\ (4,0,5)$ و $C(-2,-5,3)$. (أ) أوجد V_{AB} . (ب) أوجد V_C إذا كان $V_B = 0$ (جـ) أوجد V_C إذا كان $V_A = 20$V .

١٤ - أوجد V عند $P\ (0,0,z)$ لكل من هذه التوزيعات الشحنية فى المستوى $z = 0$ فى فضاء حر : (أ) ρ_S منتظمة على القرص $0 \leqslant \rho \leqslant a$ ، (ب)ρ_s منتظمة على حلقة مستوية ، $a \leqslant \rho \leqslant b$ ، (جـ) ρ_s منتظمة على القطاع ، $0 \leqslant \rho \leqslant a\ ,\ \alpha \leqslant \phi \leqslant$.

١٥ - الجزء الخطى $0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ y = 2\ ,\ z = 3$ ، يحتوى كل كثافة الشحنة الخطية $\rho_L = 20\,x$ nC/m فى فضاء حر . (أ) عين V عند نقطة الأصل . (ب) ماذا ستكون الاجابة اذا وزعت نفس الشحنة الكلية بانتظام على الجزء الخطى ؟ (جـ) ماذا ستكون النتيجة إذا ركزت نفس الشحنة الكلية كشحنة نقطية عند مركز الجزء الخطى ؟ .

١٦ - وزعت شحنة بدون انتظام على محور y السالب فى فضاء حر بالصورة : $\rho_L = 1/\ (y^2 + 1)$ n C/m — بفرض $V = 0$ عند مالانهاية ، أوجد V عند : (أ)$(0,1,0)$ ، (ب) $(1,0,0)$.

١٧ - يبين شكل ٤ - ١١ ثلاثة توزيعات شحنة منفصلة فى فضاء حر . (أ) أوجد الشحنة الكلية لكل توزيع . (ب) أوجد الجهد عند $P\ (0,0,5)$ بسبب تأثير كل من توزيعات الشحنة الثلاثة بمفردها . (جـ) أوجد V_p .



شكل ٤ - ١١ انظر مسألة ١٧

١٨ ـ (أ) كثافة شحنة سطحية $\rho_s = 100\pi\ \epsilon_0 x\ C/m^2$ ، موضوعة على السطح المربع ، $z = 0\ , -1 \leqslant y \leqslant 1\ , -1 \leqslant x \leqslant 1$ ، فى فضاء حر . أوجد V عند $(0,0,1)$.
(ب) أعد لـ $\rho_S = 100\pi\epsilon_0\ |x|\ C/m^2$.

١٩ ـ بمعرفة أن $V = 2x^2y + 20z - 4\ln(x^2 + y^2) V$ فى فضاء حر ، عين قيما عند P $(6, -2.5,3)$ لـ : (أ) V ، (ب) E ، (جـ) D ، (د) ρ .

٢٠ ـ إذا أعطيت مجال الجهد فى فضاء حر وإحداثيات كروية ، $V = 100r^3 \sin\theta$ v ، أوجد E وρ .

٢١ ـ فى داخل مكعب وحدى $|x|$, $|y|$ و $|z| \geqslant 0.5$ ، يعطى الجهد بـ $V = 80x - 60y + 45z + 130yz + 50zx + 80(x^2 - y^2) + 115 + 300\ln(y^2 - 4y + z^2 + 6z + 13)$ V . أوجد : (أ) $V\ (0,0,0)$ ، (ب) E $(0,0,0)$ ، (جـ) $\rho\ (x,y,z)$ ، (د) الشحنة الكلية داخل المكعب الوحدى .

٢٢ ـ فى الاحداثيات الاسطوانية ، مجال الجهد فى فضاء حر معطى بـ $V = -100\rho^5 V$ لـ $0 \leqslant \rho \leqslant 1m$ و $V = -100 - 100\ln\rho V$ لـ $\rho \geqslant 1$. للمسافة $0 \leqslant \rho \leqslant 4$ ، ارسم تخطيطيا : (أ) $V(\rho)$ ، (ب) $E_\rho\ (\rho)$ ، (جـ) $\rho_v(\rho)$.

٢٣ ـ السطح المعرف بالمعادلة $x^3 + y^2 + z = 1,000$ حيث y,x و z موجبة ، هو سطح متساوى ـ الجهد عليه الجهد يساوى $200V$ فاذا كان $|E| = 50V/m$ عند النقطة $P\ (7,25,\ 32)$ على السطح ، أوجد E هناك .

٢٤ ـ ثنائى قطب عزمه $p = 2a_x + 5a_y - 3a_z$ nC.m ، موضوع عند $P(1,1,1)$ فى فضاء حر . (أ) أحصل على تعبير للجهد $V\ (x,\ y,\ z)$ عند $A(x,y,z)$ وقدر قيمته عند $(5,2,\ -1)$ ، (ب) أوجد E_x عند $(5,2,\ -1)$.

٢٥ ـ ثنائى قطب ، $p_1 = 20a_z$nC.m ، عند نقطة الأصل فى فضاء حر ، وثنائى قطب ثانى ، $p_2 = -50a_z$ nC.m ، عند $(0,0,10)$. أوجد V و E عند نقطة منتصف المسافة بين ثنائى القطب .

٢٦ ـ ثنائى قطب فى فضاء حر مكون من شحنة $+1\mu C$ عند $(0,0,10^{-3})$ و $-1\mu C$ عند $(0,0,\ -10^{-3})$. (أ) ارسم تخطيطيا تقاطع المستوى $x = 0$ والسطح متساوى ـ الجهد المار بالنقطة $(0,1,1)$. (ب) ارسم تخطيطيا خط الانسياب فى المستوى $x = 0$ المار بالنقطة $(0,1,1)$.

٢٧ ـ ثنائى قطب له $p = 10\ \epsilon_0 a_z C.m$ موضوع عند نقطة الأصل . ما هى معادلة السطح الذى عليه $E_z = 0$ ولكن $|E| = 0$ ؟

٢٨ ـ إذا أعطيت ثلاثة ثنائيات قطب عند نقطة الأصل فى فضاء حر لها عزوم $400\pi\epsilon_0 a_x C.m$ و $400\pi\epsilon_0 a_y$ C.m ، و $400\pi\epsilon_0 a_z$ C.m أوجد V عند : (أ) $(0,0,1)$ ، (ب) $(1,0,0)$ ، (جـ) $(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$ ، (د) $(1,2,3)$.

٢٩ ـ أوجد طاقة الوضع المختزنة فى كل من هذه التشكيلات الشحنية فى فضاء حر : (أ) شحنة Q عند كل ركن لمثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه d ، (ب) شحنة Q عند كل ركن لمربع طول ضلعه d .

٣٠ ـ مجال جهد كهروستاتيكى معطى بـ $V = 1,000 \sqrt{r}$ V . ما مقدار الطاقة المختزنة داخل كرة نصف قطرها الوحدة ممركزة عند نقطة الأصل فى فضاء حر ؟

٣١ ـ مجال جهد فى فضاء حر معطى بـ $V = 50/r$ لـ $a \leqslant r \leqslant b$. (أ) بين أن $\rho = 0$ لـ $a > r > b$. (ب) أوجد الطاقة المختزنة فى المنطقة $a < r \hbar b$.

٣٢ ـ كثافة شحنة فى فضاء حر معطاة كدالة لنصف القطر بالصورة : $\rho_v = o$ لـ $0.1 \leqslant \rho \leqslant 0$, $= 10^{-8}/\rho$ لـ $0.1 < \rho < 0.2$ و $\rho_v = 0$ لـ $\rho > 0.2$ ، حيث استخدمت وحدات SI . أوجد : (أ) $D_\rho\ (\rho)$ (ب) $E_\rho\ (\rho)$ ، (جـ) $V(\rho)$ ، إذا كان $V\ (0.2) = 0$. أوجد الطاقة الكهروستاتيكية المختزنة لكل وحدة طول فى المنطقة : (د) $0 \leqslant \rho < 0.1$ ، (هـ) $0.1 < \rho < 0.2$ ، (و) $\rho > 0.2$.

٣٣ ـ توجد كثافة شحنة حجمية فى المنطقة الاسطوانية $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ mm بالكثافة $\rho_v = 2\rho^{1.6}$ ، حيث ρ بالمتر ، و $\rho_v = 0$ فى أى مكان آخر . (أ) استخدم قانون « جاوس » لتوجد D_ρ لـ $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ mm . (ب) أعد لـ $\rho \geqslant 1$ mm . (جـ) دع $V = 0$ عند $\rho = 1$ mm وأوجد V عند $\rho = 0$ و $\rho = 1$ m .

الفصل الخامس

الموصلات ، العوازل ، والسعة

نعتزم فى هذا الفصل النظر فى تطبيق قوانين وطرق الفصول السابقة على بعض المواد التى يجب على المهندس أن يعمل بها . بعد تعريف التيار ، وكثافة التيار ، واستنتاج معادلة الاستمرارية الأساسية ، سنعتبر الموصل ونقدم قانون « أوم » فى كل من صورتيه : الميكروسكوبية والماكروسكوبية . وبواسطة هذه النتائج يمكننا حساب قيم المقاومة لقليل من الأشكال الهندسية البسيطة التى قد تتخذها المقاومات . والشروط التى يجب تحقيقها عند حدود الموصل محصول عليها ، وهذه المعرفة تُمكننا من تقديم استخدام الصور .

وبعد اعتبار مختصر لشبه موصل عام ، سنبحث استقطاب المواد العازلة ونُعرف السماحية النسبية ، أو ثابت العازل ، وهو بارامتر هندسى هام . بوجود كلا الموصلات والعوازل لدينا ، يمكننا حينئذ أن نضعهم معا لنكُون مكثفات . ومعظم محتويات الفصول السابقة سيُحتاج اليها لتعيين سعة العديد من المكثفات التى سننشئها .

ومبادىء الكهرومغناطيسية الأساسية التى تعتمد عليها المقاومات والمكثفات هى فى الحقيقة موضوع هذا الفصل ، وسوف لايقدم عضو الحث ، حتى الفصل التاسع .

٥ ـ ١ التيار وكثافة التيار :

تكون الشحنات الكهربية المتحركة تيارا . ووحدة التيار هى الأمبير (ampere A) معرف بأنه معدل تحرك شحنة مارة بنقطة اسناد معطاة (أو عابرة بمستوى اسناد معطى بقدر كولوم واحد لكل ثانية . ويرمز للتيار بـ I ، ولذلك

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (١)$$

وعلى ذلك يعرف التيار بأنه « حركة الشحنات الموجبة » مع أن التوصيل فى المعادن يحدث عن طريق حركة الالكترونيات ، كما سنرى بعد قليل .

وفى نظرية المجال نهتم عادة بالاحداث التى تحدث عند نقطة أكثر منها خلال منطقة كبيرة ، وسنجد مفهوم **كثافة التيار** ، مقاسا بالامبير لكل متر مربع (A/m^2) ، أكثر فائدة . وكثافة التيار متجه[١] يمثل بـ J .

---

(١) التيار ليس متجها ، لأنه من السهل ان تتصور مسألة فيها تيار كلى I فى موصل مقطعه غير منتظم (مثل كرة) يمكن أن يكون له اتجاه مختلف عند كل نقطة لمقطع مُعطى . والتيار فى سلك زائد الرفع ، أو تيار فتيلى ، يعرف أحيانا كمتجه ، ولكننا عادة نفضل أن نكون غير متناقضين ونعطى الاتجاه للفتيلة ، أو المسار ، وليس للتيار .

وعنصر تزايدى للتيار ΔI العابر لعنصر تزايدى للسطح ΔS عموديا على كثافة التيار هو

$$\Delta I = J_n \, \Delta S$$

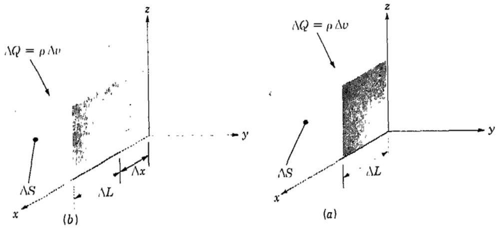
وفى الحالة التى فيها لاتتعامد كثافة التيار على السطح ،

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

ويحصل على التيار الكلى بتكامل ،

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \qquad (٢)$$

ويمكن أن تُربط كثافة التيار مع سرعة كثافة شحنة حجمية عند نقطة . أعتبر عنصر الشحنة $\Delta Q = \rho \, \Delta v = \rho \, \Delta S . \, \Delta L$ ، كما هو مبين فى شكل ٥ ـ ١أ . ولتبسيط الشرح ، دعنا نفرض أن عنصر الشحنة موجه وأحرفه موازية للمحاور الاحداثية ، وأن له مركبة x فقط للسرعة . وفى فترة الزمن Δt ، قد تحرك عنصر الشحنة مسافة Δx ، كما هو مبين فى شكل ٥ ـ ١ب .



شكل ٥ ـ ١ عنصر تزايدى للشحنة ، $\Delta Q = \rho \Delta S \Delta L$ ، التى تتحرك مسافة Δx فى زمن Δt تنتج فى النهاية مركبة لكثافة التيار مقدارها $J_x = \rho v_x$

بذلك قد حركنا شحنة $\Delta Q = \rho \Delta S \Delta x$. خلال مستوى اسناد عمودى على اتجاه الحركة فى تزايد زمنى Δt ، والتيار المحصل هو

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \, \Delta S \, \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

وعندما نأخذ النهاية بالنسبة للزمن ، نحصل على

$$\Delta I = \rho \, \Delta S \, v_x$$

حيث تمثل v_x المركبة فى اتجاه x للسرعة V[1] . وبدلالة كثافة التيار ، نجد

$$J_x = \rho v_x$$

وعامة

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}} \quad (٣)$$

وهذه النتيجة الأخيرة تبين بوضوح جدا أن شحنة فى حالة حركة تكون تيارا . ونسمى هذا النوع من التيار « تيار حمل » ، وتكون ρV كثافة تيار الحمل . لاحظ أن كثافة تيار الحمل مرتبطة خطيا مع كثافة الشحنة وكذلك أيضا مع السرعة . المعدل الكتلى لتدفق السيارات (سيارات لكل قدم مربع لكل ثانية) فى نفق هولاندا يمكن أن يزاد اما بالذهاب لسرعات أعلى أو برفع كثافة السيارات لكل قدم مكعب ، فقط اذا كان السائقون قادرين على عمل ذلك .

ت ٥ ـ ١ دع $\mathbf{J} = 10y^2z\mathbf{a}_x - 2x^2y\,\mathbf{a}_y + 2x^2z\mathbf{a}_z$ A/m^2 وأوجد (أ) التيار الكلى العابر للسطح $x = 3$ ، $2 \leqslant y \leqslant 3$ ، $3.8 \leqslant z \leqslant 5.2$. فى اتجاه $\mathbf{a}_x$ ، (ب) مقدار كثافة التيار عند مركز هذه المساحة ؛ (جـ) القيمة المتوسطة لـ J_x على السطح

الاجابة : 399A ; 296 A/m^2 ; 285 A/m^2 .

٥ ـ ٢ استمرارية التيار

مع افتراض اننا نقوم بدراسة مجالات استاتيكية فى هذا الوقت ، فان ادخال مفهوم التيار يُتبع منطقيا بمناقشة حفظ الشحنة ومعادلة الاستمرارية . ومبدأ حفظ الشحنة ينص ببساطة على أن الشحنات لايمكن أن تُخلق أوتُدمر ، مع أن كميات متساوية من الشحنات الموجبة والسالبة يمكن خلقها **فى نفس اللحظة** ، محصول عليها بالانفصال ، تُدمر ، أوتُفقد باعادة الاتحاد .

وتتبع معادلة الاستمرارية من هذا المبدأ عندما نعتبر أى منطقة محددة بسطح مغلق . والتيار خلال السطح المغلق هو

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

(١) الحرف الصغير v مستخدم لكلا الحجم والسرعة . ومع ذلك لاحظ أن السرعة دائما تظهر كمتجه V ، أومركبة v_x ، أومقدار |V| ، بينما يظهر الحجم فقط فى صورة تفاضلية كـ dv أو Δv

وهذا السريان الخارج للشحنة الموجبة يجب أن يعادل بنقص للشحنة الموجبة (أو ربما زيادة فى الشحنة السالبة) داخل السطح المغلق . اذا رمز للشحنة داخل السطح المغلق بـ Q_i ، فيكون معدل النقص هو dQ_i / dt — ويتطلب مبدأ احتفاظ الشحنة

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \qquad (٤)$$

ربما يستحسن أن نجيب هنا عن سؤال يسأل كثيرا ، « أليس هناك خطأ فى الاشارة ؟ ظننت أن $I = dQ/dt$. » وأن وجود أو غياب اشارة سالبة يعتمد على أى تيار أو شحنة نعتبرها . ففى نظرية الدوائر عادة نقرن سريان التيار فى طرف مكثف مع المعدل الزمنى لزيادة الشحنة على هذا اللوح . والتيار فى (٤) تيار سريانه للخارج .

المعادلة (٤) هى الصورة التكاملية لمعادلة الاستمرارية ، والصورة التفاضلية ، أو النقطية ، يحصل عليها بتغيير التكامل السطحى الى تكامل حجمى بواسطة نظرية الانفراج ،

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dv$$

ويتمثيل الشحنة المحصورة Q_i بالتكامل الحجمى لكثافة الشحنة ،

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dv = -\frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \rho\, dv$$

اذا اتفقنا على أن نبقى السطح ثابتا ، تصبح المشتقة مشتقة جزئية ويمكن أن تظهر داخل التكامل ،

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dv = \int_{\text{vol}} -\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

لأن التعبير صحيح لأى حجم ، مهما صغر ، فانه صحيح لعنصر حجم تزايدى ،

$$(\nabla \cdot \mathbf{J})\, \Delta v = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\, \Delta v$$

ومنها نحصل على صورتنا النقطية لمعادلة الاستمرارية ،

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \qquad (٥)$$

ويتذكر التفسير الفيزيائى للانفراج ، تبين هذه المعادلة ان التيار ، أو الشحنة لكل ثانية المنفرجة من حجم صغير لكل وحدة حجوم يساوى المعدل الزمنى لتناقص الشحنة لكل وحدة حجوم عند كل نقطة .

سيكون أول استخدام لنا لهذا المبدأ فى القسم ٥ ـ ٨ عندما ننظر بايجاز الى سريان الشحنة من الداخل الى سطح الموصلات والعوازل .

ت ٥ ـ ٢ فى منطقة بقرب نقطة الأصل ، تكون كثافة التيار فى الاتجاه نصف القطرى (للخارج) بقيمة $10r^{-1.5}$ A/m^2 (أ) ماقدر التيار العابر للسطح الكروى $r = 1$ mm ؟ (ب) أعد لـ $r = 2$ mm . (جـ) بأى معدل تزيد ρ عند نقطة عندها $r = 1$mm ؟ (د) بأى معدل تزيد الشحنة الكلية داخل الكرة $r = 1$ mm ؟

الاجابة : 3.97A , 5.62A, -1.581×10^8 C/m^3.S, -3.97C/S .

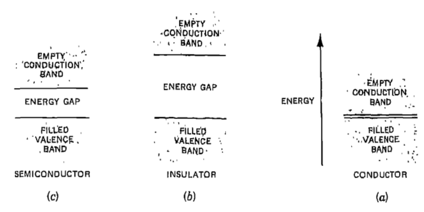
٥ ـ ٣ الموصلات المعدنية :

يصف الفيزيائيون اليوم سلوك الالكترونات المحيطة بالنواة الذرية الموجبة بدلالة الطاقة الكلية للالكترون بالنسبة الى مستوى اسناد صفرى لالكترون على بعد لانهائى من النواة . والطاقة الكلية هى مجموع طاقتى الحركة والجهد ، ولأن الطاقة يجب أن تعطى لالكترون لكى يُسحب بعيدا عن النواة ، فان طاقة كل الكترون فى الذرة هى كمية سالبة . ومع ان الصورة فيها بعض القصور ، فانه لمن المناسب أن نقرن قيم الطاقة هذه بمدارات محيطة بالنواة ، والطاقات الأكثر سالبية مناظرة للمدارات التى لها نصف قطر أقل . وتبعا لنظرية الكم ، ففى ذرة معطاة مسموح فقط بمستويات طاقة خاصة منفصلة ، أو حالات طاقة ، ولذلك يجب أن يمتص الالكترون أو يطلق كميات منفصلة من الطاقة أو كمات ، بمروره من مستوى الى آخر . وذرة عادية عند درجة حرارة الصفر المطلق لها الكترون محتل كل من طبقات الطاقة السفلى ، مبتدئا من النواة للخارج ومستمرا الى أن ينفذ امداد الالكترونات .

وفى مادة صلبة بللورية ، مثل معدن أوماسة ، تجمع الذرات معا متقاربة ، وتوجد الكترونات عديدة أكثر ، ويتوافر عديد من مستويات الطاقة المسموح بها بسبب قوى الفعل المتبادل بين الذرات المتجاورة . ونجد أن الطاقات التى يمكن أن تحوزها الالكترونات تجمع فى أمدية عريضة ، أو نطاقات "bands" ، وكل نطاق يتكون من مستويات منفصلة عديدة جدا ومتقاربة . عند درجة حرارة الصفر المطلق ، فان المادة الصلبة العادية فيه جميع المستويات مشغولة بالترتيب ، ابتداء من الأقل ، ومتقدما الى أن توضع جميع الالكترونات . والالكترونات التى لها أعلى (الأقل سالبية) مستويات للطاقة الكترونات التكافؤ ، موضوعة فى **نطاق التكافؤ** . اذا كان هناك مستويات طاقة أعلى مسموح بها فى نطاق التكافؤ ، أو اذا اندمج نطاق التكافؤ بنعومة فى **نطاق توصيل** حينئذ يمكن أن تعطى طاقة حركة اضافية لالكترونات التكافؤ بواسطة مجال خارجى مُنتجةً سريانا الكترونيا . والمادة الصلبة تسمى **موصل معدنى** نطاق التكافؤ المملوء ، ونطاق التوصيل غير المملوء للموصل عند OK مبينتان فى شكل ٥ ـ ٢ أ .

على أنه اذا شغل الالكترون الذى له أعلى طاقة مستوى القمة فى نطاق التكافؤ ، وحدثت فجوة بين نطاق التكافؤ ونطاق التوصيل ، فحينئذ لايستطيع الالكترون تقبل طاقة اضافية بكميات صغيرة ، وتكون المادة عازلة . وبنيان النطاق هذا مبين فى شكل ٥ ـ ٢ب . لاحظ انه اذا أمكن نقل كمية طاقة كبيرة جدا الى الالكترون ، فقد يمكن أن يثار بالقدر الكافى لتقفز الفجوة الى النطاق التالى حيث يمكن أن يحدث التوصيل بسهولة . وهنا ينهار العازل .

وحالة متوسطة تحدث عندما يفصل النطاقين « منطقة محرمة » صغيرة فقط ، كما هو مبين فى شكل ٥ ـ ٢ جـ . وكميات قليلة من الطاقة فى صورة حرارة ، ضوء ، أومجال كهربى قد ترفع طاقة الالكترونات عند قمة النطاق المملوء وتمد اساس التوصيل . وهذه المواد عوازل والتى تظهر كثيرا من خواص الموصلات وتسمى اشباه موصلات *Semiconductors* دعنا أولا نعتبر الموصل .



شكل ٥ ـ ٢ بنيان نطاق ـ الطاقة فى ثلاثة أنواع للمواد عند OK . (أ) لايظهر الموصل فجوة للطاقة بين نطاقى التكافؤ والتوصيل . (ب) يظهر العازل فجوة كبيرة للطاقة . (جـ) شبه الموصل له فجوة طاقة صغيرة فقط .

هنا تتحرك الكترونات التكافؤ ، أو الكترونات التوصيل أو الحرة ، تحت تأثير مجال كهربى . فان الكترونا له شحنة Q تساوى e — مع مجال E ، سوف يلاقى قوة

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} \qquad ٥$$

فى فضاء حر يعجل الالكترون وتزيد سرعته (طاقته) باستمرار ، فى المادة البللورية يُعاق تقدم الالكترون بالتصادم المستمر مع هيكل شبكية البلورة المثار حراريا ، وسريعا يبلغ سرعة متوسطة ثابتة . وهذه السرعة V_d تُدعى **سرعة الانسياق** ، وهى ترتبط خطيا مع شدة المجال الكهربى بواسطة حركية الالكترون فى المادة المعطاة ، ونرمز للحركية بالرمز (mu) μ ، و

(٦) $\mathbf{v}_d = -\mu_e \mathbf{E}$

حيث μ_e هى حركية الكترون وهى موجبة بالتعريف . معادلة (٦) تبين أن الحركية تقاس فى وحدات المتر المربع لكل فولت ـ ثانية ، وقيم نموذجية[1] هى 0.0012 للالومنيوم ، 0.0032 للنحاس ، و 0.0056 للفضة .

ولهذه الموصلات الجيدة ، سرعة انسياق مقدارها بضع بوصات لكل ثانية تكفى لتنتج ارتفاعا ملحوظا فى درجة الحرارة ويمكن أن تسبب أنصهار السلك اذا لم يمكن ازالة الحرارة بسرعة بواسطة التوصيل الحرارى أو الاشعاع .

بتعويض (٦) فى معادلة (٣) لقسم ٥ ـ ١ ، نحصل على

(٧) $\mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}$

حيث ρ_e هى كثافة شحنة الالكترونات الحرة ، وهى قيمة سالبة . وكثافة الشحنة الكلية صفر ، لأن شحنة موجبة وسالبة متساوية توجد فى المواد المتعادلة .

ومع ذلك العلاقة بين J و E لموصل معدنى تحدد أيضا بواسطة الموصليَّة σ(sigma) .

(٨) $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

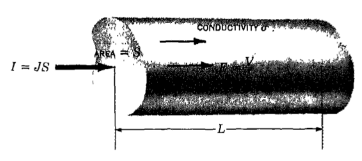
حيث تقاس σ بالمهو لكل متر (℧ /m) . والمهو mho هو واحد أمبير لكل فولت ، وهو (والأوم ohm) يُكرم جورج سيمون أوم ، وهو فيزيائى المانى وأول من وصف علاقة التيار والفولت المتضمنة فى (٨) . ونسمى هذه المعادلة **الصورة النقطية لقانون أوم** ، وسننظر الى الصورة الأكثر شيوعا لقانون أوم بعد قليل .

ولكن ، أولا من زيادة المعلومات أن نلاحظ موصلية عدة موصلات معدنية ، كقيم نموذجية (بالمهو لكل متر) 3.82×10^7 للألمنيوم ، 5.80×10^7 للنحاس و 6.17×10^7 للفضة . بيانات لموصلات أخرى توجد فى الملحق جـ . بمجرد رؤية بيانات مثل تلك ، يكون من الطبيعى أن نفرض أنه قد قدم لنا قيما ثابتة ، وهذا صحيح أساسا . فالموصلات المعدنية تخضع لقانون أوم بصدق كبير ، وهى علاقة خطية ، فالموصلية ثابتة على امدية واسعة لكثافة التيار وشدة المجال الكهربى . وأيضا يوصف قانون أوم والموصلات المعدنية بأنها **موحدة الخواص** *(isotropic)* أو أن لها نفس الخواص فى كل

(١) P.238 , Wert and Thomson المدرج فى المراجع المقترحة عند نهاية هذا الفصل .

اتجاه والمادة التى ليست من هذا النوع تسمى غير موحدة الخواص *(anisotropic)* وسنذكر مثل هذه المادة بعد صفحات قليلة من الان .

على أن الموصلية دالة فى درجة الحرارة . وتتغير المقاومية ، التى هى مقلوب الموصلية ، تقريبا خطيا مع درجة الحرارة فى مدى درجة حرارة الغرفة ، وبالنسبة للالومنيوم ، النحاس ، والفضة فهى تزيد 0.4 فى المائة تقريبا لكل 1 K ارتفاع فى درجة الحرارة(١) . ولمعادن عديدة تنحدر المقاومية بشدة الى الصفر عند درجة حرارة قدرها قليل من الكلفن ، وتسمى هذه الخاصية فرط الموصلية . والنحاس والفضة ليسا موصلات فائقة التوصيل مع أن الالومنيوم فائق التوصيل (لدرجات حرارة تحت 1.14 K) .٩



شكل ٥ ـ ٣ كثافة تيار منتظمة J وشدة مجال كهربى E فى حيز اسطوانى طوله L ومساحة مقطعة العرضى S . هنا $V = IR$ ، حيث $R = L/\sigma S$.

واذا ضممنا (٧) و (٨) الان ، يمكن أن يعبر عن الموصلية بدلالة كثافة الشحنة وحركية الالكترون ،

$$\boxed{\sigma = -\rho_e \mu_e} \qquad (٩)$$

ومن تعريف الحركية (٦) ، فانه من المقنع الان أن تلاحظ أن درجة حرارة أعلى تدل على ذبذبات أعظم للشبكية البللورية ، وتقدم الكترونى معاق أكثر عند شدة مجال كهربى معينة ، وسرعة انسياق أقل ، وحركية أقل ، وموصلية أقل من (٩) ، ومقاومية أعلى كما ذكر .

وتطبيق قانون أوم فى صورة نقطية لحيز ماكروسكوبى (يمكن رؤيته بالعين المجردة) يؤدى الى صورة مألوفة أكثر . مبدئيا ، دعنا نفرض أن J و E منتظمين ، كما هى فى الحيز الاسطوانى المبين فى شكل ٥ ـ ٣ . وحيث انهما منتظمتان ،

(١) نتائج حرارية غزيرة للمواد الموصلة متاحة فى "Standard Hand book for Electircal Engineers", المدرج بين المراجع المقترحة عند نهاية هذا الفصل .

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS \qquad (١٠)$$

و

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \int_b^a d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ba} \qquad (١١)$$

$$= \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab}$$

أو

$$V = EL$$

وعلى ذلك

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

أو

$$V = \frac{L}{\sigma S} I$$

ولكن نسبة فرق الجهد بين طرفى الاسطوانة الى التيار الداخل للنهاية الموجبة أكثر ، معروفة من نظرية الدوائر الأولية على انها مقاومة الاسطوانة ، ولذلك

$$\boxed{V = IR} \qquad (١٢)$$

حيث

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}} \qquad (١٣)$$

معادلة (١٢) هى ، بالطبع ، معروفة بأنها قانون « أوم » و (١٣) تمكننا من حساب المقاومة R ، مقاسة بالأوم (مختصر Ω) ، للأجسام الموصلة التى لها مجالات منتظمة . اذا كانت المجالات غير منتظمة ، يمكن أن تظل المقاومة معرفة على انها نسبة V الى I ، حيث V هى فرق الجهد بين سطحين متساوى ـ الجهد معينين فى المادة و I هو التيار الكلى العابر للسطح الموجب أكثر الى داخل المادة . ومن العلاقتين التكامليتين العامتين فى (١٠) و (١١) ، ومن قانون أوم (٨) ، يمكن أن نكتب هذا التعبير العام للمقاومة عندما تكون المجالات غير منتظمة ،

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \qquad (١٤)$$

والتكامل الخطى مأخوذ بين سطحين متساوى ـ الجهد فى الموصل ، والتكامل السطحى مقدر على متساوى ـ الجهد الموجب الأكثر من متساويى الجهد هذين . ولانستطيع حاليا

حل هذه المسائل غير المنتظمة ، ولكننا يجب أن نستطيع حل عديد منها بعد تصفح الفصلين السادس والسابع بامعان .

وكمثال على تعيين مقاومة اسطوانة ، اعتبر سلك نحاس رقم (١٦) (16 #) ، الذى له قطر 0.0508 in ، أو 1.291×10^{-3} m . وعلى ذلك فمساحة المقطع العرضى هى 1.308×10^{-6} m^2 ، ومقاومة سلك طوله 1 mi (1,609 m) هى :

$$R = \frac{1,609}{(5.80 \times 10^7)(1.308 \times 10^{-6})} = 21.2\ \Omega$$

ويستطيع السلك بأمان أن يحمل حوالى 10A ، مناظرا لكثافة تيار 7.65×10^6 A/m^2 أو 7.65 A/mm^2 . وبهذا التيار يكون فرق الجهد بين طرفى السلك هو 212 V ، وشدة المجال الكهربى هى 0.132 V/m ، وسرعة الانسياق 0.000422m/s ، أو أكثر قليلا من الفيرلونج[1] فى الأسبوع ، وكثافة شحنة الالكترون ـ الحر هى :
-1.81×10^{10} C/m^3 ، أوتقريبا الكترون فى مكعب طول ضلعه اثنان من الانجستروم .

ت ٥ ـ ٣ أوجد مقدار كثافة التيار داخل عينة من الالومينوم اذا كانت : (أ) شدة المجال الكهربى 70mV/m ، (ب) سرعة انسياق الالكترون ـ الحر 10^{-4} m/S (جـ) فى صورة مكعب ، ضلعه 1 mm ، يحمل تيارا كليا مقداره 2.5A ، (د) فى صورة مكعب ، ضلعه 1 mm ، مع فرق جهد 75μV بين وجهين متقابلين .

الاجابة : 2.67 MA/m^2 . 3.18 MA/m^2 , 2.50MA/m^2 , 2.86 MA/m^2 .

ت ٥ ـ ٤ ماهى الفولتية بين طرفى موصل نحاسى : (أ) اذا كان له مقطع عرضى دائرى قطره 0.007 in وطوله 100 ft ، ويحمل تيارا مقداره 8 mA ، (ب) اذا كان اسطوانة دائرية مجوفة ، نصف قطرها الداخلى 2 mm ، ونصف قطره الخارجى 3 mm ، طوله 200 mm وله تيار كلى مقداره 20A ؟

الاجابة : 0.1693V , 4.39V .

٥ ـ ٤ خواص الموصل وشروط الحدود :

مرة أخرى ، يجب علينا مؤقتا أن نحيد عن شروط الاستاتيكية المفروضة ونسمح بتغير زمنى لقليل من الميكروثانية لنرى مايحدث عندما يختل اتزان توزيع الشحنة فجأة داخل مادة موصلة . دعنا نفرض ، من أجل المناقشة ، انه ظهر هناك فجأة عدد من الالكترونات داخل موصل . المجالات الكهربية الناتجة بواسطة هذه الالكترونات لاتُعادل

(١) الفيرلونج : مقياس للطول يساوى ٢٢٠ ياردة أوثمن ميل (المترجم) .

بأى شحنات موجبة ، ولذلك تبدأ الالكترونات فى التعجيل بعيدا عن بعضها . ويستمر هذا حتى تصل الالكترونات الى سطح الموصل ، أوحتى يصل للسطح عدد من الالكترونات يساوى العدد المُدخل .

وهنا يُوقف تقدم الالكترونات الى الخارج ، لأن المادة المحيطة بالموصل هى عازل وليس لها نطاق توصيل مناسب . لايمكن أن تبقى شحنة داخل الموصل . فاذا فعلت ، فسوف يدفع المجال الكهربى الناتج الشحنات الى السطح .

لهذا فالنتيجة النهائية فى داخل موصل هى كثافة شحنة صفرية ، وكثافة شحنة سطحية مقيمة على السطح الخارجى . وهذه واحدة من خاصيتين للموصل الجيد .

الخاصية الأخرى ، مصاغة للحالات الاستاتيكية التى لاينساب فيها تيار ، تتبع مباشرة من قانون أوم : تكون شدة المجال الكهربى داخل موصل صفرا . فيزيائيا ، نرى أنه اذا وجد مجال كهربى ، فلسوف تتحرك الكترونات التوصيل وتنتج تيارا ، مؤدية هكذا الى حالة غير استاتيكية .

وملخصين للكهروستاتيكية ، لايمكن أن توجد شحنة ولامجال كهربى عند أى نقطة داخل مادة موصلة . ومع ذلك قد تظهر الشحنة على السطح ككثافة شحنة سطحية ، وبحثنا التالى يخص المجالات خارج الموصل .

ونود أن نربط هذه المجالات الخارجية بالشحنة على سطح الموصل . وهى مسألة بسيطة ، ويمكننا أن نبين طريقنا للحل بقليل من الرياضيات .

إذا حُللت شدة المجال الكهربى الخارجى الى مركبتين ، احداهما مماسة ، والأخرى عمودية على سطح الموصل ، فيُرى أن المركبة المماسة تكون صفرا . فاذا لم تكن صفرا ، ستؤثر قوة مماسة على عناصر الشحنة السطحية ، مسببة تحركها وحالات غير استاتيكية . ولأن الحالات الاستاتيكية مفروضة فان شدة المجال الكهربى وكثافة التدفق الكهربى المماستين تكونا أصفارا .

ويُجيب قانون « جاوس » على أسئلتنا الخاصة بالمركبة العمودية . التدفق الكهربى التارك لعنصر تزايدى صغير من السطح ، يجب أن يساوى الشحنة الواقعة على ذلك العنصر التزايدى للسطح . ولايستطيع التدفق أن يترك الشحنة فى الاتجاه المماس ، لأن هذه المركبة تساوى صفرا ، ولايستطيع أن ينفذ الى داخل الموصل ، لأن المجال الكلى هناك يساوى صفرا . فحينئذ يجب عليها أن تترك السطح عموديا . من الناحية الكمية يمكن أن تقول ان كثافة التدفق الكهربى بالكولوم لكل متر مربع التاركة للسطح عموديا تساوى كثافة الشحنة السطحية بالكولوم لكل متر مربع ، أو $D_n = \rho_s$.

واذا استخدمنا بعضا من نتائجنا المستنتجة سابقا فى عمل تحليل أكثر عناية (ومصادفة نُقدم طريقة عامة التى يجب أن نستخدمها فيها بعد) ، فيجب أن نُنشىء حداً لموصل مع فضاء حر (شكل ٥ ـ ٤) مبينا المركبات المماسة والعمودية لـ D و E على جانب الفضاء ـ الحر للحد . وكلا المجالين صفر فى الموصل . ويمكن تعيين المجال المماسى بتطبيق القسم ٤ ـ ٥ ، المعادلة (٢١) ،

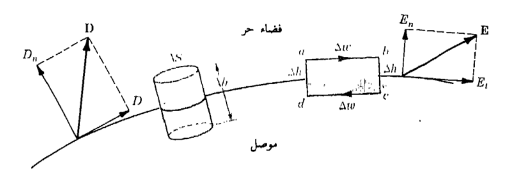
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

حول مسار صغير مغلق $abcda$. ويجب أن يقسم التكامل الى أربعة أجزاء .

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

وبتذكر أن $\mathbf{E} = 0$ داخل الموصل ، ندع الطول من a الى b أو c الى d يكون ΔW ومن b الى c أو d الى a يكون Δh ونحصل على

$$E_t\, \Delta w - E_{n,\,at\,b}\tfrac{1}{2}\,\Delta h + E_{n,\,at\,a}\tfrac{1}{2}\,\Delta h = 0$$



شكل ٥ ـ ٤ مسار مغلق مناسب وسطح جاوسى ، مستخدمان لتعيين شروط الحدود عند حد موصل ـ فضاء حر ، $E_t = 0$ و $D_n = \rho_S$.

وبينما نسمح لـ Δh أن تقترب من الصفر ، مع ابقاء Δw صغيرة ولكن محدودة ، فلايؤثر اذا ما كانت المجالات العمودية متساوية عند a و b أم لا ، لأن Δh تتسبب فى أن تصبح هذه الحدود صغيرة لدرجة اهمالها . وعلى ذلك

$$E_t\, \Delta w = 0$$

ولذلك

$$E_t = 0$$

ويوجد الشرط على المجال العمودى بأقصى مباشرة باعتبار D_n أفضل من E_n واختيار اسطوانة صغيرة كسطح جاوسى . دع الارتفاع يكون Δh ومساحة وجهى القمة والقاع تكون ΔS . ومرة أخرى سندع Δh تقترب من الصفر . باستخدام قانون جاوس ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

ونكامل فوق الأسطح الثلاثة المتميزة

$$\int_{top} + \int_{bottom} + \int_{sides} = Q$$

ونجد أن الأخيرين أصفارا (لأسباب مختلفة) . عندئذ

$$D_n \, \Delta S = Q = \rho_S \, \Delta S$$

or

أو

$$D_n = \rho_S$$

وهذه هى شروط الحدود المرغوبة لحد الموصل ـ الفضاء الحر فى الكهروستاتيكية

$$\boxed{D_t = E_t = 0} \quad (١٥)$$

$$\boxed{D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S} \quad (١٦)$$

يترك التدفق الكهربى الموصل فى اتجاه عمودى على السطح ، وقيمة كثافة التدفق الكهربى تساوى عدديا كثافة الشحنة السطحية .

ونتيجة مباشرة وهامة لصفرية شدة المجال الكهربى المماسة هى الحقيقة أن سطح الموصل هو سطح متساوى ـ الجهد . وتقدير قيمة فرق الجهد بين أى نقطتين على السطح بواسطة التكامل الخطى تؤدى الى نتيجة صفرية ، لأن المسار يمكن أن يختار على السطح نفسه حيث $\mathbf{E}.d\mathbf{L} = 0$.

ولكى نلخص المبادىء التى تطبق على الموصلات فى المجالات الكهروستاتيكية ، يمكننا أن نذكر أن :

١ ـ شدة المجال الكهربى الاستاتيكية داخل موصل تساوى صفرا .

٢ ـ شدة المجال الكهربى الاستاتيكية عند سطح موصل موجهة فى كل مكان عمودية على ذلك السطح .

٣ ـ سطح الموصل هو سطح متساوى ـ الجهد

ت ٥ ـ ٥ تقع النقطة P $(-2,4,1)$ على سطح موصل ، و : $E = 400\,a_x - 290a_y + 310a_z$ V/m هناك . أفرض أن الموصل فى فضاء حر وأوجد مقدار : (أ) E_n عند P ، (ب) E_t عند P ، (جـ) ρ_s عند P .

الاجابة : 583 V/m ; 0 ; 5.16nC/m ^{2} .

٥ ـ ٥ طريقة الصور

خاصية هامة لمجال ثنائى القطب التى أبرزناها فى الفصل السابق هى المستوى اللانهائى عند جهد صفرى الذى يوجد فى منتصف المسافة بين الشحنتين . ومثل هذا المستوى يمكن أن يُمثل بمستوى موصل رفيع حتى يكاد يتلاشى وامتداده لانهائى . والموصل هو سطح متساوى ـ الجهد عند جهد $V = 0$ ، ولذلك تكون شدة المجال الكهربى عمودية على السطح . فهكذا ، إذا استبدلنا بتشكيل ثنائى القطب المُبين فى شكل (٥ ـ ٥أ) شحنة واحدة ومستوى موصل المبينين فى شكل ٥ ـ ٥ب ، فإن المجالات فى النصف العلوى لكلا الشكلين تكون واحدة . كل المجالات أصفارا أسفل المستوى الموصل لأنه لم نُمد بأى شحنات فى تلك المنطقة . وطبعا ، يمكننا أيضا أن نستبدل شحنة سالبة واحدة تحت مستوى موصل بتنظيم ثنائى القطب ونحصل على تكافؤ للمجالات فى النصف السفلى لكل منطقة .

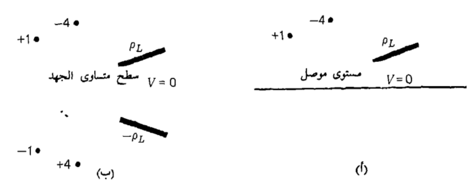


شكل ٥ ـ ٥ (أ) شحنتان متساويتان ولكن متضادتان يمكن أن يستبدلا بـ (ب) شحنة واحدة ومستوى موصل بدون التأثير على المجالات فوق الأسطح $V = 0$.

وإذا حاولنا هذا التكافؤ من وجهة النظر العكسية ، نبدأ بشحنة واحدة فوق مستوى موصل تام ، وعندئذ نرى أننا يمكننا أن نُبقى على نفس المجالات فوق السطح ، بابعاد

المستوى ووضع شحنة سالبة عند موضع متماثل تحت المستوى . وهذه الشحنة تسمى صورة الشحنة الأصلية ، وهى السالب لتلك القيمة .

واذا استطعنا عمل ذلك مرة ، فان الخطية تسمح لنا أن نعملها مرة بعد أخرى ، وعلى هذا فأى تشكيل شحنة فوق مستوى أرضى لانهائى يمكن أن يُستبدل بتنظيم مكون من تشكيل الشحنة المعطى ، وصورته ، وبدون المستوى الموصل . وهذا ما يوحى به التوضيحان فى شكل (٥ - ٦) . وفى أحوال كثيرة ، يكون إيجاد مجال الجهد للنظام الجديد أسهل بكثير لأنها لاتحتوى المستوى الموصل مع توزيع شحنته السطحية المجهولة .



شكل ٥ - ٦ : (أ) تشكيل شحنة معطى فوق مستوى موصل لانهائى ، يمكن أن يستبدل بـ (ب) تشكيل الشحنة المعطى بالاضافة إلى تشكيل الصورة بدون المستوى الموصل .

وكمثال على استخدام الصور ، دعنا نجد كثافة الشحنة السطحية عند $P\,(2,5,0)$ على المستوى الموصل $z = 0$ إذا كان هناك خط شحنة ذى 30 nC/m موضوع عند : $x = 0\ ;\ z = 3$ كما هو مبين فى شكل (٥ - ٧أ) . نزيل المستوى ونضع صورة خط شحنة ذى 30nC/m — عند $x = 0\ ,\ z = -3$ ، كما هو موضح فى شكل (٥ - ٧ب) . ويمكن الحصول الآن على المجال عند P بتراكب المجالات المعروفة لخطى الشحنة . والمتجه نصف القطرى من خط الشحنة الموجب الى P هو $\mathbf{R}_+ = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z$ بينما : $\mathbf{R}_- = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$. وعلى هذا ، فالمجالات المفردة هى

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R_+}\mathbf{a}_{R+} = \frac{30\times10^{-9}}{2\pi\epsilon_0\sqrt{13}}\,\frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

و

$$\mathbf{E}_- = \frac{-30\times10^{-9}}{2\pi\epsilon_0\sqrt{13}}\,\frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

وبجمع هذه النتائج ، نحصل على

$$\mathbf{E} = \frac{-180\times10^{-9}\mathbf{a}_z}{2\pi\epsilon_0(13)} = -249\mathbf{a}_z \qquad \text{V/m}$$

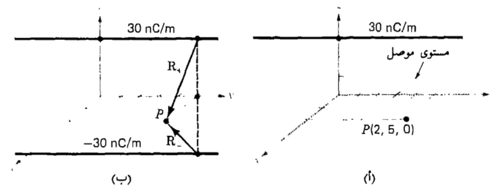
هذا إذن هو المجال عند (أو مباشرة فوق) P في كل من التشكيلين فى شكل ٥ ـ ٧ ، وانه من المرضى حقا أن نلاحظ أن المجال عمودى على المستوى الموصل ، كما يجب أن يكون . وعلى هذا ، $D = \epsilon_0 E = -2.20a_z\ nC/m^2$ ، ولأنها موجهة نحو المستوى الموصل ، فإن ρ_s تكون سالبة وقيمتها $2.20\ nC/m^2$ — عند P .

ت ـ ٥ ـ ٦ شحنة نقطية مقدارها $18\mu C$ موضوعة على المحور z على بعد $0.4m$ من مستوى موصل عند $z = 0$ (أ) أوجد كثافة الشحنة السطحية عند $(0.3,0.4,0)$. (ب) أوجد $|D|$ عند $(0,0.2,0.2)$.

الإجابة : $19.77\mu\ C/m^2 ;\ 4.36\ \mu\ C/m^2$.

٥ ـ ٦ أشباه الموصلات :

إذا حولنا انتباهنا الآن الى مادة شبه موصلة ذاتية ، مثل الجرمانيوم النقى أو السيليكون النقى ، فان نوعين من حاملات التيار يكونان موجودين : الالكترونات **والفجوات** . والالكترونات هى تلك التى من قمة نطاق التكافؤ المملوء التى تلقت طاقة كافية (عادة حرارية) لتعبر النطاق المحرم الصغير نسبيا الى نطاق التوصيل . وفجوة الطاقة للنطاق المحرم فى أشباه موصلات نموذجية فى حدود الكترون فولت واحد . والخلوات المتروكة بهذه الالكترونات تمثل حالات طاقة غير مملوءة فى نطاق التكافؤ التى قد تتحرك أيضا من ذرة الى ذرة فى البلورة . ويسمى الخلو **فجوة** *hole* وكثير من خواص اشباه الموصلات يمكن أن توصف بمعاملة الفجوة كما لو كان لها شحنة موجبة e ، وحركية μ_h وكتلة فعالة مقارنة لتلك التى للالكترون .



شكل ٥ ـ ٧ : (أ) خط شحنة فوق مستوى موصل . (ب) أزيل الموصل ، واضيفت صورة خط شحنة .

يتحرك كلا الحاملين فى مجال كهربى ، ويتحركان فى اتجاهين متضادين ، وعلى ذلك فكل يساهم بمركبة للتيار الكلى فى نفس الاتجاه ، كالذى ينتج بالأخرى . والموصلية هى على ذلك دالة لكلا تركيزى الفجوة والالكترون ، وحركتيهما ،

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \qquad (١٧)$$

وبالنسبة للجرمانيوم النقى ، أو الذاتى ، فان حركيتى الالكترون والفجوة هما 0.36 و 0.17 ، بالترتيب ، بينما للسيليكون ، فالحركيتين هما بالترتيب 0.12 و 0.025 . وهذه القيم معطاة بالمتر المربع لكل فولت ـ ثانية ، وتتراوح بين 10 و 100 مرة أكبر من تلك التى للالومنيوم ، النحاس ، الفضة ، والموصلات المعدنية الأخرى(١) . والحركيات المدرجة آنفا معطاة عند درجة حرارة 300K .

وتعتمد تركيزات الالكترون والفجوة بشدة على درجة الحرارة عند 300K ، كلا كثافتى الشحنة الحجمية للالكترون ، والفجوة يساوى $4.0 C/m^3$ فى المقدار فى الجرمانيوم الذاتى و $0.011 C/m^3$: فى السيليكون الذاتى . وهذه القيم تؤدى الى موصليات 2.1 ℧/m فى الجرمانيوم 0.0016 ℧/m^3 فى السيليكون . وكلما زادت درجة الحرارة ، تقل الحركيات ، ولكن تزداد كثافات الشحنة بسرعة جدا . ونتيجة لذلك ، تزيد موصلية الجرمانيوم بعامل قدره 10 عندما تزداد درجة الحرارة من 300 الى 360K تقريبا وتقل بعامل قدره10 عندما تقل درجة الحرارة من 300 الى 255K . لاحظ أن موصلية أشباه الموصلات الذاتية تزداد مع درجة الحرارة ، بينما تلك للموصلات المعدنية تقل مع درجة الحرارة ، وهذه إحدى الاختلافات المميزة بين الموصلات المعدنية ، وأشبات الموصلات الذاتية .

وتحقق أشباه الموصلات الذاتية أيضا الصورة النقطية لقانون « أوم » ، أى أن ، الموصلية ثابتة بدرجة معقولة مع كثافة التيار ومع اتجاه كثافة التيار .

ويمكن أن تزداد بصورة فائقة عدد حاملات الشحنة والموصلية بإضافة كميات قليلة جدا من الشوائب . وتزود المواد **المعطية** بالكترونات إضافية وتكون نوعا سالبا *n — type* من أشباه الموصلات ، بينما تجهز **المتقبلات** فجوات إضافية وتكون نوعا موجبا *p — type* من المواد . وتعرف العملية بالتطعيم ، وتركيز المعطيات منخفض فى السيليكون حتى كجزء واحد من 10^7 يسبب زيادة فى الموصلية بعامل قدره 10^5 .

ومدى قيم الموصلية يمتد بين الاقصيين حينما تذهب من أحسن المواد عزلا الى أشباه الموصلات ، ثم أفضل الموصلات . بالمهو لكل متر ، تتراوح **σ** من 10^{-17} للكوارتز المنصهر ، 10^{-7} للعوازل البلاستيك الرديئة ، وتقريبا الوحدة لأشباه الموصلات الى 10^8 تقريبا للموصلات المعدنية عند درجة حرارة الغرفة . وتغطى هذه القيم المدى العظيم الاتساع فى حدود حوالى خمسة وعشرين لرتبة عظم المقدار .

(١) قيم الحركية لاشباه الموصلات معطاة فى المراجع 7,4,2 المدرجة عند نهاية هذا الفصل .

ت ٥ ـ ٧ عند درجة حرارة 290K كلا كثافة الشحنة الحجمية للالكترون والفجوة فى جرمانيوم ذاتى هما $2.35 C/m^3$ فى المقدار ، بينما هما $4.85\ mC/m^3$ للسيليكون الذاتى . فاذا فرض أن قيم الحركية المعطاة فى قسم ٥ ـ ٦ عند 300K تطبق عند 290K أيضا ، احسب الموصلية عند درجة الحرارة هذه للـ : (أ) جرمانيوم ، (ب) سيليكون .

الاجابة : 1.25 ℧ /m ، 0.70 m ℧ /m .

٥ ـ ٧ طبيعة المواد العازلة :

مع اننا قد ذكرنا العوازل والمواد العازلة ، فليس لدينا بعد أى علاقات كمية تتضمنهم . على أننا سنرى حالا أن عازلا فى مجال كهربى يمكن أن ينظر اليه كتنظيم فضاء حر من ثنائيات ـ قطب كهربية ميكروسكوبية مكونة من شحنات موجبة وسالبة مراكزها لاتنطبق تماما .

وهذه ليست شحنات حرة ، ولايمكنها أن تساهم فى عملية التوصيل . بل هى مقيدة فى أماكنها بقوى ذرية وجزيئية ويمكنها فقط إزاحة مواضعها قليلا استجابة للمجالات الخارجية . وهى تسمى شحنات مقيدة ، على نقيض الشحنات الحرة التى تعين الموصلية ويمكن معاملة الشحنات المقيدة كأى منابع أخرى للمجال الكهروستاتيكى . ولذلك ، اذا لم نرغب ، فسوف لانحتاج الى تقديم ثابت العازل كبارامتر جديد أو أن نتعامل مع سماحية مختلفة عن سماحية الفضاء الحر ، على أن البديل يمكن أن يكون أن نعتبر **كل شحنة داخل قطعة من مادة عازلة** . وهذا ثمن باهظ جدا يدفع لاستخدام كل معادلاتنا السابقة فى صورة غير معدلة ، ولذلك سنقضى بعض الوقت لنضع دراسة نظرية عن العوازل بطريقة نوعية ، مقدمين الاستقطاب P ، السماحية ϵ ، السماحية النسبية ϵ_R ، ومستنتجين لبعض العلاقات الكمية المتضمنة هذه الكميات الجديدة .

والخاصية التى يشترك فيها جميع المواد العازلة ، سواء كانت مواد صلبة ، سائلة ، أو غازية ، وسواء كانت ذات طبيعة بللورية أم لا ، هى قابليتها لاختزان الطاقة الكهربية . ويحدث هذا الاختزان بواسطة ازاحة فى المواضع النسبية للشحنات الموجبة والسالبة الداخلية المقيدة ضد القوى الجزيئية والذرية العادية .

وهذه الازاحة ضد قوة مقيدة تشبه رفع ثقل أو مط زنبرك ، وتمثل طاقة جهد . ومصدر الطاقة هو المجال الخارجى ، حركة شحنات الازاحة ربما تنتج تيارا عارضا خلال البطارية التى تنتج المجال .

والآلية الفعلية لازاحة الشحنة تختلف فى المواد العازلة المختلفة . بعض الجزيئات ، تسمى جزيئات **قطبية** ، لها ازاحة دائمة موجودة بين مركزى ثقل الشحنات الموجبة والسالبة ، ويتصرف كل زوج من الشحنات كثنائى قطب . عادة توجه ثنائيات القطب بطريقة عشوائية فى كل أنحاء داخل المادة ، وفعل المجال الخارجى هو أن يصف هذه الجزيئات ، الى حد ما ، فى نفس الاتجاه . ومجال كافى القوة يمكنه أيضا إحداث ازاحة اضافية بين الشحنات الموجبة والسالبة .

والجزىء **غير القطبى** ليس له تنظيم ثنائى القطب هذا الا بعد تسليط مجال . تُزاح الشحنات السالبة والموجبة فى اتجاهات متضادة ضد قوة التجاذب المتبادلة وتُنتج ثنائى قطب الذى يتحاذى مع المجال الكهربى .

وكلا النوعين من ثنائى القطب يمكن أن يوصف بعزم ثنائى قطبه $\mathbf{p}$ ، كما أُظهر فى قسم ٤ ـ ٧ ، معادلة (٣٧) ،

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \qquad (١٨)$$

حيث Q هى الموجبة من الشحنتين المقيدتين المكونتين لثنائى القطب ، و $\mathbf{d}$ هو المتجه من الشحنة السالبة الى الموجبة .

اذا كان هناك n ثنائى قطب لوحدة الحجوم ويتعامل مع حجم Δv ، فحينئذ يكون هناك $n\Delta v$ ثنائى قطب ، وعزم ثنائى القطب الكلى يُحصل عليه بالمجموع المتجه ،

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_i$$

حيث كلا من $\mathbf{p}_i$ يمكن أن تكون مختلفة . والآن نُعرف الانستقطاب $\mathbf{P}$ على أنه **عزم ثنائى القطب لكل وحدة حجوم** :

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_i \qquad (١٩)$$

بوحدات الكولوم لكل متر مربع .

سنعامل $\mathbf{P}$ على أنه مجال مستمر نموذجى ، مع أنه واضح ، أنه أساسا غير معرف عند النقط داخل الذرة أو الجزىء . وبدلا من ذلك ، يجب أن نفكر فى قيمتها عند أى نقطة كقيمة متوسطة مأخوذة على عينة حجم Δv كبيرة بالقدر الكافى لأن تحوى عديدا من الجزيئات (عددهم $n\Delta v$) ، ولكن ايضا صغيرة بما يكفى اعتبارها عنصرا فى المفهوم .

وهدفنا الحالى هو أن نُبين أن كثافة الشحنة الحجمية المقيدة تتصرف مثل كثافة الشحنة الحجمية الحرة فى انتاج مجال خارجى ، وسنحصل على نتيجة مشابهة لقانون « جاوس » .

لنكون محددين ، دعنا نفرض أن لدينا عازلا محتويا على جزيئات غير قطبية . لايوجد جزىء له عزم ثنائى قطب ، و P= 0 خلال كل المادة . وفى مكان ما داخل العازل نختار عنصر سطح تزايدى ΔS ، كما هو مبين فى شكل ٥ ـ ٨أ ، نُسلط مجالا كهربيا E . ينتج المجال الكهربى عزما p = Qd فى كل جزىء ، بحيث أن يعمل p و d زاوية θ مع ΔS ، كما هو موضح فى شكل ٥ ـ ٨ب .

والآن دعنا نفحص تحرك الشحنات المقيدةعبر ΔS . كل من الشحنات المقترنة بخلق ثنائى قطب ، يجب أن تكون قد تحركت مسافة $\frac{1}{2} d \cos\theta$ فى الاتجاه العمودى على ΔS . وعلى ذلك ، أى شحنة موجبة واقعة ابتدائيا تحت السطح ΔS وفى مدى المسافة$\frac{1}{2} d \cos\theta$ من السطح يجب أن تكون قد عبرت ΔS ذاهبة الى أعلى . أيضا ، وأى شحنة سالبة واقعة ابتدائيا فوق السطح وفى مدى تلك المسافة $(\frac{1}{2} d \cos\theta)$ من ΔS يجب أن تكون قد عبرت ΔS ذاهبة الى أسفل . لذلك ، ولأن هناك : n molecule / m^3 ، فصافى الشحنة الكلية التى تعبر السطح العنصرى فى اتجاه الى أعلى هو $nQd \cos\theta\ \Delta S$ ، أو

$$\Delta Q_b = nQ\mathbf{d} \cdot \Delta\mathbf{S}$$

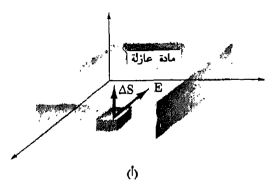
حيث يذكرنا الرمز السفلى على Q_b اننا نتعامل مع شحنة مقيدة وليست شحنة حرة . وبدلالة الاستقطاب ، لدينا

$$\Delta Q_b = \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{S}$$

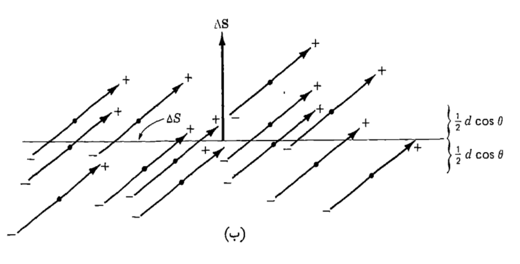
إذا فسرنا ΔS على أنه عنصر لسطح مغلق داخل المادة العازلة ، فإن اتجاه ΔS يكون خارجا ، ويحصل على صافى الزيادة فى الشحنة المقيدة داخل السطح المغلق من خلال التكامل

$$Q_b = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \qquad (٢٠)$$

وهذه العلاقة الأخيرة لها بعض الشبه مع قانون « جاوس » ، ويمكننا الآن أن نعمم تعريفنا لشدة التدفق الكهربى لكى يطبق لأوساط غير الفضاء الحر .



(أ)



شكل ٥ ـ ٨ : (أ) عنصر سطح تزايدى ΔS مبين بداخل عازل يوجد فيه مجال كهربى E . (ب) تكون الجزيئات غير القطبية عزوم ثنائى قطب p واستقطاب p . هناك صافى انتقال للشحنة المقيدة عبر ΔS .

نكتب أولا قانون « جاوس » بدلالة ϵ_0 E و Q_T ، الشحنة المحصورة الكلية مقيدة وحرة :

$$Q_T = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \qquad (٢١)$$

حيث

$$Q_T = Q_b + Q$$

و Q هى الشحنة الحرة الكلية المحتواة داخل السطح S . لاحظ أن الشحنة الحرة تظهر بدون رمز سفلى لأنها نوع الشحنة الأعظم أهمية وستظهر فى معادلات ماكسويل .

وبضم هذه المعادلات الثلاث الأخيرة ، نحصل على تعبير للشحنة الحرة المحصورة ،

$$Q = Q_T - Q_b = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \qquad (٢٢)$$

ويمكننا الان أن نُعرف D بصورة أكثر تعميما عما فعلنا فى الفصل الثالث ،

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \qquad (٢٣)$$

وهكذا هناك حد مضاف لـ D والذى يظهر عندما توجد مادة قابلة للاستقطاب . وعلى ذلك ،

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \qquad (٢٤)$$

حيث Q هى الشحنة الحرة المحصورة .

وباستخدام كثافات الشحنة الحجمية المتعددة ، نحصل على :

$$Q_b = \int_v \rho_b \, dv$$

$$Q = \int_v \rho \, dv$$

$$Q_T = \int_v \rho_T \, dv$$

وبمساعدة نظرية الانفراج ، يمكننا لذلك تحويل (٢٠) ، (٢١) و (٢٤) الى علاقات الانفراج المكافئة ،

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_T$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho} \quad (٢٥)$$

وسنؤكد فقط على (٢٤) و (٢٥) ، التعبيران المحتويان على شحنة حرة ، فى العمل التالى .

ولكى نعمل أى استخدام حقيقى لهذه المفاهيم الجديدة ، يكون من الضرورى أن نعرف العلاقة بين شدة المجال الكهربى E والاستقطاب P الذى ينتج .

وهذه العلاقة سوف تكون ، بالطبع ، دالة لنوع المادة ، وسنحصر مناقشتنا أساسا لهذه المواد موحدة الخواص التى فيها E و P مرتبطان خطيا .

فى مادة موحدة الخواص يكون المتجهان E و P دائما متوازيين ، بغض النظر عن توجيه المجال . ومع أن معظم العوازل الهندسية خطية لشدة المجال المتوسطة والى العالية وهى ايضا موحدة الخواص ، فان البللورات الأحادية قد تكون غير موحدة الخواص . وتتسبب الطبيعة الدورية للمواد البللورية فى تكون عزوم ثنائى قطب فى موازاة محاور البللورة بأكبر سهولة ، وليس بالضرورة فى اتجاه المجال المسلط .

والعلاقة بين P و E فى المواد العازلة عفوية الاستقطاب (فروكهربية) ليست فقط غير - خطية ، بل ايضا تظهر تأثيرات تخلفية ، أى أن ، الاستقطاب الناتج عن شدة مجال كهربى معطى يعتمد على التاريخ السابق للعينة . وأمثلة هامة لمثل هذا النوع من العازل هى تيتانات الباريوم وملح روشيل .

والعلاقة الخطية بين P و E هى

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}} \quad (٢٦)$$

حيث χ_e (chi) هى **قابلية التأثر الكهربية** للمادة .

وبدلالة البارامترات المستخدمة فى التطبيقات الهندسية ، فإن ثابت التناسب لايكتب بمثل هذه البساطة ،

$$\mathbf{P} = (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$$

ولكن يمكننا استخدام (٢٣) لنكتب

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$$

أو

$$(٢٧) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_R \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

حيث

$$(٢٨) \quad \boxed{\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0}$$

و ϵ **هى السماحية** و ϵ_R **هى السماحية النسبية ، أو ثابت العازل** للمادة وثوابت العازل معطاة لبعض المواد الممثلة فى الملحق جـ .

ولايمكن وصف المواد العازلة غير موحدة الخواص بدلالة بارامتر قابلية التأثر أو السماحية البسيط . وبدلا من ذلك ، نجد أن كل مركبة من D يمكن أن تكون دالة فى كل مركبة لـ E ، وتُستبدل العلاقة البسيطة (٢٧) بالمعادلات الثلاث .

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z$$
$$D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z$$
$$D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z$$

وتسمى ϵ_{ij} التسع مجمعة كمية ممتدة . و D و E (و P) ليست بعد متوازيات ، ومع أن $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ تبقى معادلة صحيحة للمواد غير موحدة الخواص ، فيمكننا أن نستمر فى استخدام $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ فقط بتفسير ϵ ككمية ممتدة . وسنركز انتباهنا على المواد الخطية موحدة الخواص ونبقى الحالة العامة لكتاب أكثر تقدما .

بالاختصار ، فلدينا بذلك الآن علاقة بين D و E تعتمد على المادة العازلة الموجودة ،

$$(٢٩) \quad \boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}}$$

حيث

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0} \qquad (٣٠)$$

وكثافة التدفق الكهربى مازالت مرتبطة بالشحنة الحرة سواء بالصيغة النقطية أو التكاملية لقانون « جاوس » .

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho} \qquad (٢٥)$$

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q} \qquad (٣١)$$

واستخدام السماحية النسبية ، كما هو مبين بـ (٣٠) انفا ، يجعل اعتبار الاستقطاب ، عزوم ثنائى القطب ، والشحنة المقيدة غير ضرورى . غير أن ، عندما يجب اعتبار مواد غير موحدة الخواص أو غير خطية ، فان السماحية النسبية فى الصورة المقياسية البسيطة التى ناقشناها غير قابلة للتطبيق بعد .

دعنا الآن نوضح هذه المفاهيم الجديدة بمناقشة مثال فيه شريحة من التفلون فى المنطقة $0 \leqslant x \leqslant a$ ، وفضاء حر حيث $x < 0$ و $x > a$. خارج التفلون يوجد هناك مجال منتظم $\mathbf{E}_{out} = E_0 \mathbf{a}_x$ V/m . ثابت العازل للتفلون هو 2.1 وعلى هذا فقابلية التأثر الكهربى هى 1.1 .

وخارج الشريحة ، لدينا مباشرة $\mathbf{D}_{out} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$. وأيضا ، لأنه لايوجد هناك مادة عازلة فان $\mathbf{P}_{out} = 0$. والان ، أى من المعادلات الأربع أو الخمس الأخيرة ستمكننا أن نربط المجالات المتعددة داخل المادة ببعضها . هكذا

$$\mathbf{D}_{in} = 2.1\epsilon_0 \mathbf{E}_{in} \quad (0 \le x \le a)$$
$$\mathbf{P}_{in} = 1.1\epsilon_0 \mathbf{E}_{in} \quad (0 \le x \le a)$$

حالما نوجد قيمة لأى من هذه المجالات الثلاثة داخل العازل ، يمكن ايجاد الاخرين فى الحال . وتكمن الصعوبة فى العبور عبر الحد من المجالات المعروفة خارج العازل الى غير المعروفة داخله . ولعمل هذا نحتاج شرط حدود ، وهذا هو موضوع القسم الهام التالى . وحينئذ سنكمل هذا المثال .

وفى بقية هذا الكتاب سنصف المواد القابلة للاستقطاب بدلالة D و ϵ مفضلا عن P و χ_e . وسنقصر مناقشتنا على المواد موحدة الخواص .

ت ٥ ـ ٨ أوجد الاستقطاب داخل مادة التى : (أ) لها كثافة تدفق كهربى مقداره : 1.5 μ C/m^2 فى شدة مجال كهربى مقداره 15 KV/m ، (ب) لها $D = 2.8\mu\text{C/m}^2$

و $\chi_e = 1.7$ ، (جـ) لها 10^{20} molecules / m^3 ، كل له عزم ثنائى قطب 1.5×10^{-26} C.m عندما $E = 10^5$ V/m ، (د) لها $E =$ 50KV/m ، والسماحية النسبية هى 4.4 ،

الاجابة : 1.367μC/m^2 ؛ $1.763\mu C/m^2$ ، $1.500\mu C/m^2$ ، 1.505μC/m^2 .

٥ ـ ٨ شروط الحدود لمواد عازلة مثالية :

كيف نعالج مسألة فيها عازلان مختلفان ، أو عازل وموصل ؟ . هذا مثال آخر لشرط حدود ، مثل الشرط عند سطح الموصل ، والذى عليه المجالات المماسة أصفار ، وكثافة التدفق الكهربى العمودية تساوى كثافة الشحنة السطحية على الموصل . والآن نأخذ الخطوة الأولى فى حل مسألة عازلين ، أومسألة عازل ـ موصل ، بتعيين تصرف المجالات عند سطح العازل البينى .

دعنا نعتبر أولا السطح البينى بين عازلين لهما السماحيتان ϵ_1 و ϵ_2 ويشغلان المنطقتين 1 و 2 ، كماهو مبين فى شكل (٥ ـ ٩) . نفحص أولا المركبات المماسة باستخدام

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

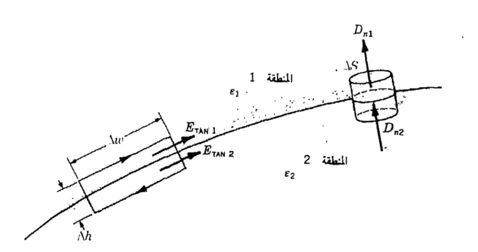
حول المسار المغلق الصغير الى اليسار ، حاصلين على

$$E_{\tan 1}\,\Delta w - E_{\tan 2}\,\Delta w = 0$$

والمساهمة الصغيرة للتكامل الخطى بواسطة المركبة العمودية لـ E على طول الأقسام التى طولها Δh تصبح مهملة كلما صغرت Δh ولاصق المسار المغلق السطح . واذن ، فى الحال ،

$$\boxed{E_{\tan 1} = E_{\tan 2}} \qquad (٣٢)$$

وقد نشعر أن قانون الجهد لكيرشوف مازال يمكن تطبيقه على هذه الحالة .
وبالتأكيد لقد أوضحنا أن فرق الجهد بين أى نقطتين على الحدود والمتباعدتين بمسافة Δw هى نفسها فوق أوتحت الحدود مباشرة .



شكل ٥ ـ ٩ الحدود بين عازلين مثاليين لهما سماحيتان ϵ_1 و ϵ_2 استمرارية D_n مبينة بالسطح الجاوسى الى اليمين ، استمرارية E_{tan} بالتكامل الخطى حول مسار مغلق الى اليسار .

اذا كانت شدة المجال الكهربى المماسى مستمرا عبر الحدود ، فتكون D المماسة غير مستمرة ، لأن

$$\frac{D_{\tan 1}}{\epsilon_1} = E_{\tan 1} = E_{\tan 2} = \frac{D_{\tan 2}}{\epsilon_2}$$

أو

$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \qquad (٣٣)$$

وتوجد شروط الحدود على المركبات العمودية بتطبيق قانون جاوس على « علبة الحبوب » الصغيرة المبينة على اليمين فى شكل ٥ ـ ٩ . والجوانب ، مرة أخرى قصيرة جدا ، والتدفق التارك لسطحى القمة والقاع هو الفرق

$$D_{n1}\,\Delta S - D_{n2}\,\Delta S = \Delta Q = \rho_S\,\Delta S$$

ومنها

$$\boxed{D_{n1} - D_{n2} = \rho_S} \qquad (٣٤)$$

ماهى كثافة الشحنة السطحية هذه ؟ . انها لايمكن أن تكون كثافة شحنة سطحية مقيدة ، لأننا نأخذ استقطاب العازل فى الاعتبار باستخدام ثابت عازل مختلف عن الوحدة ، أى أنه ، بدلا من اعتبار شحنات مقيدة فى فضاء حر ، نستخدم سماحية مزادة . أيضا ، أنه غير محتمل للغاية أن تكون أى شحنة حرة على السطح البينى ، لأن الشحنات

الحرة غير متاحة فى العوازل المثالية التى نعتبرها . واذن فهذه الشحنة يجب أن تكون قد وضعت هناك بتعمد ، وبذلك ملغية توازن الشحنة الكلية فى وعلى هذا الجسم العازل .
فيما عدا هذه الحالة الخاصة يمكننا أن نفرض ρ_S صفرا على السطح البينى و

$$\boxed{D_{n1} = D_{n2}} \qquad (٣٥)$$

أو أن المركبة العمودية لـ D مستمرة . ويتبع أن

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \qquad (٣٦)$$

والمركبة العمودية لـ E غير مستمرة .

وهذه الشروط يمكن أن تُضم لتظهر التغير فى المتجهات D و E عند السطح . دع D_1 (و E_1) يعمل زاوية θ_1 مع عمودى على السطح (شكل ٥ ـ ١٠) . لأن المركبات العمودية لـ D مستمرة ،

$$D_{n1} = D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2 = D_{n2} \qquad (٣٧)$$

النسبة بين المركبات المماسة معطاة بـ (٣٣) بالصورة

$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

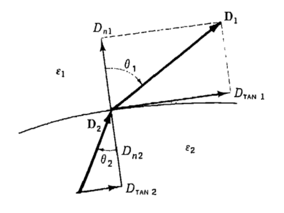
أو

$$\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1 = \epsilon_1 D_2 \sin\theta_2 \qquad (٣٨)$$

وقسمة هذه المعادلة على (٣٧) يعطى

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \qquad (٣٩)$$

فى شكل ٥ ـ ١٠ قد افترضنا أن $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ، ولذلك $\theta_1 > \theta_2$.



شكل ٥ ـ ١٠ انكسار D عند سطح بينى لعازلين . للحالة المبينة ، $\epsilon_1 > \epsilon_2$, E_1 و E_2 موجهتين على D_1 و D_2 ، مع $D_1 > D_2$ و $E_1 < E_2$.

اتجاه E على كل جانب من الحدود مطابق لاتجاه E ، لأن $D = \epsilon E$ ومقدار D وفى المنطقة ٢ يمكن أن يوجد من (٣٧) و (٣٨) ،

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (٤٠)$$

ومقدار E_2 هو

$$E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2 \theta_1} \quad (٤١)$$

ويظهر فحص هذه المعادلات أن D أكبر فى المنطقة ذات السماحية الأعلى (الا اذا كان $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ، حيث لايتغير المقدار) وأن E أكبر فى المنطقة ذات السماحية الأقل (إلا إذا كان $\theta_1 = \theta_2 = 90°$ ، حيث لايتغير المقدار) .

وشروط الحدود هذه (٣٢) ، (٣٣) ، (٣٥) و (٣٦) ، أو علاقات المقدار والاتجاه المستنتجة منها ، (٣٩) الى (٤١) ، تسمح لنا أن نجد بسرعة المجال على جانب من الحدود اذا عرفنا المجال على الجانب الأخر . وكانت هذه هى الحالة فى المثال الذى بدأناه عند نهاية القسم السابق . والان دعنا ننهى تلك المسألة . تذكر أنه كان لدينا شريحة من التفلون ممتدة من $x = 0$ الى $x = a$ ، كما هو مبين فى شكل ٥ ـ ١١ ، مع فضاء حر على جانبيها ومجال خارجى $\mathbf{E}_{out} = E_0 \, \mathbf{a}_x$. ولدينا أيضا $\mathbf{D}_{out} = \epsilon_0 E_0 \, \mathbf{a}_x$ و $\mathbf{P}_{out} = 0$.

وبالداخل ، استمرارية D_n عند الحدود تسمح لنا أن نجد أن : $D_{in} = \mathbf{D}_{out} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$ وهذه تعطينا $\mathbf{E}_{in} = \mathbf{D}_{in}/\epsilon = \epsilon_0 E_0 \, \mathbf{a}_x / (\epsilon_R \epsilon_0) = 0.476 E_0 \mathbf{a}_x$.

تيفلون
$\epsilon_R = 2.1$
$\chi_e = 1.1$

$E = E_0$	$E = 0.476E_0$	$E = E_0$
$D = \epsilon_0 E_0$	$D = \epsilon_0 E_0$	$D = \epsilon_0 E_0$
$P = 0$	$P = 0.524\epsilon_0 E_0$	$P = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $x = a$

شكل ٥ ـ ١١ معرفة المجال الكهربى خارج العازل تمكننا من أن نجد باقى المجالات الخارجية أولا ، ثم أن نستخدم استمرارية D العمودية لنبدأ ايجاد المجالات الداخلية .

لنحصل على مجال الاستقطاب فى العازل ، نستخدم $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ ونحصل على

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{D}_{in} - \epsilon_0 \mathbf{E}_{in} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x - 0.476\epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x = 0.524\epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D}_{in} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$

$$\mathbf{E}_{in} = 0.476 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$

$$\mathbf{P}_{in} = 0.524\epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$

وفى الغالب لاتمدنا مسألة عملية بمعرفة مباشرة للمجال على أى من جانبى الحدود . ويجب أن نستخدم شروط الحدود لتساعدنا على تعيين المجالات على جانبى الحدود من المعلومات الأخرى المعطاة . ومسألة بسيطة من هذا النوع سوف تعتبر فى قسم ٥ ـ ١٠ .

وشروط الحدود الموجودة عند السطح البينى بين موصل وعازل أبسط بكثير من تلك السابقة . أولا ، نعرف أن D و E كلاهما صفر داخل الموصل . ثانيا ، المركبات المماسة للمجال E و D يجب أن يكون كلاهما صفرا ليحقق

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

و

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$$

وأخيرا ، تطبيق قانون جاوس ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

يبين مرة أخرى أن كلا من D و E عمودى على سطح الموصل وأن $D_n = \rho_S$ و $E_n = \rho_S/\epsilon$. عندئذ ، نرى أن شروط الحدود التى استنتجناها من قبل لحدود الموصل ـ الفضاء الحر صحيحة لحدود الموصل ـ العازل اذا استبدلنا ϵ_0 بـ ϵ . وعلى هذا

$$D_t = E_t = 0 \qquad (٤٢)$$

$$D_n = \epsilon E_n = \rho_S \qquad (٤٣)$$

ومن المُجدى أن تقضى لحظة لاكتشاف كيف تصل أى شحنة اُدْخلت فى مادة موصلة الى السطح كشحنة سطحية . ويجب أن نفهمْ أن ذلك ليس حدثا عاما ، ولكنه يعطينا بعض التبصر الاضافى فى خواص الموصل .

اذا أعطينا قانون أوم

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

ومعادلة الاستمرارية

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

التى فيها كلا J و ρ يتضمن شحنات حرة فقط ، نحصل على

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

أو

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

اذا فرضنا أن الوسط متجانس ، بحيث لا يكون σ و ϵ دوال فى الموضع ،

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

والان يمكننا أن نستخدم معادلة ماكسويل الأولى لنحصل على

$$\rho = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

دعنا الان نعمل الفرض المبسط أن σ ليست دالة فى ρ . ربما لايكون هذا فرضا جيدا جدا ، لأننا وجدنا فى قسم ٥ ـ ٣ ، معادلة (٩) ، أن σ تعتمد على كل من ρ والحركية ، ولكنه يؤدى الى حل سهل ، والذى يسمح لنا على الأقل أن نقارن موصلات مختلفة وببساطة نُعيد التوزيع ونكامل مباشرة ، حاصلين على

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t}$$

حيث ρ_0 = كثافة الشحنة عند $t = 0$ وهذا يوضح تناقص أسى لكثافة الشحنة عند كلّ نقطة مع ثابت زمن مقداره ϵ/σ . ثابت الزمن هذا ، غالبا يسمى زمن التراخى ، يمكن أن يحسب لموصل ضعيف نسبيا ، مثل الماء المقطر ، من البيانات فى الملحق حـ ، معطيا

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80 \times 8.854 \times 10^{-12}}{2 \times 10^{-4}} = 3.54\ \mu s$$

فأى شحنة نضعها بداخل جسم من الماء المقطر تتناقص الى حوالى 37 فى المائة من قيمتها الابتدائية فى 3.54 μS . وهذا التناقص السريع من خواص الموصلات الجيدة ، ونرى أنه فيما عدا لفترات عارضة متناهية فى القصر ، يمكننا بأمان أن نعتبر كثافة الشحنة صفرا بداخل موصل جيد .

ومع المواد الفيزيائية التى يجب أن نعمل بها ، لايوجد مادة عازلة بدون بعض الكترونات حرة قليلة ، وجميعها لها موصلية مختلفة عن الصفر ، وأى شحنة تدخل داخليا فى أى منها ستصل اخيرا الى السطح .

وبالمعرفة التى لدينا الان عن المواد الموصلة ، المواد العازلة ، وشروط الحدود الضرورية ، فنحن مستعدون أن نعرف ونناقش السعة .

ت ـ ٥ ـ ٩ تحتوى المنطقة $z < 0$ مادة عازلة لها $\epsilon_{R1} = 2.5$ ، بينما تختص المنطقة $z > 0$ بـ $\epsilon_{R2} = 4$. دع $\mathbf{E}_1 = -30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y + 70\mathbf{a}_z$ V/m ، أوجد (أ) E_{n1} ، (ب) $\mathbf{E}_{t1}$ ، (جـ) E_{t1} ، (د) E_1 ، (هـ) θ_1 .

الاجابة : 70.0 V/m , $-30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y$ V/m , 58.3 V/m , 91.1 V/m , 39.8 .

ت ٥ ـ ١٠ أكمل المسألة ت ٥ ـ ٩ بايجاد : (أ) D_{n2} ، (ب) D_{t2} ، (جـ) $\mathbf{D}_2$ ، (د) $\mathbf{P}_2$ ، (هـ) θ_2 .

الاجابة : 1.549 nc/m^2 , 2.07 nc/m^2 , $-1.062\mathbf{a}_x + 1.771\mathbf{a}_y + 1.549\mathbf{a}_z$ nc/m^2 و $-0.797\mathbf{a}_x + 1.328\mathbf{a}_y + 1.162\mathbf{a}_z$ nc/m^2 , $53.1°$.



شكل ٥ ـ ١٢ موصلان متضادا الشحنة m_1 و M_2 ، محاطان بعازل منتظم . نسبة مقدار الشحنة على أى من الموصلين الى مقدار فرق الجهد بينهما هى السعة C .

٥ ـ ٩ السعة :

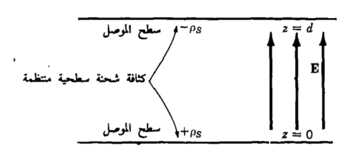
والان دعنا نعتبر موصلين مغمورين فى عازل متجانس (شكل ٥ ـ ١٢) . يحمل الموصل M_2 شحنة موجبة كلية Q ، ويحمل M_1 شحنة سالبة مساوية . ولاتوجد شحنات أخرى ، والشحنة الكلية للنظام صفر .

ونعرف الان أن الشحنة محمولة على السطح ككثافة شحنة سطحية ، وأيضا أن المجال الكهربى عمودى على سطح الموصل . وعلاوة على ذلك فان كل موصل سطح متساوى ـ الجهد . ولأن M_2 يحمل الشحنة الموجبة فان التدفق الكهربى موجه من M_2 الى M_1 و M_2 عند الجهد الموجب أكثر . وبتعبير اخر فان شغلا يجب أن يبذل لحمل شحنة موجبة من M_1 الى M_2 .

دعنا نرمز لفرق الجهد بين M_2 و M_1 بـ V_0 . نستطيع الان أن نُعرف سعة نظام الموصلين هذا بأنه نسبة مقدار الشحنة الكلية على أى موصل الى فرق الجهد بين الموصلين .

$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{٤٤}$$

وبتعبيرات عامة ، نعين Q بتكامل سطحى على الموصل الموجب، ونجد V_0 بحمل وحدة شحنة موجبة من السطح السالب الى الموجب ،



شكل ٥ ـ ١٣ : مسألة المكثف ذى اللوحين المتوازيين . السعة لكل متر مربع من مساحة السطح هى ϵ/d .

$$C = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \tag{٤٥}$$

والسعة لاتعتمد على الجهد والشحنة الكلية ، لأن نسبتهما ثابتة . اذا أزيدت كثافة الشحنة بعامل N ، فإن قانون جاوس يُبين أن كثافة التدفق الكهربى أو شدة المجال الكهربى

تزيد أيضا بـ N ، كما يفعل فرق الجهد . والسعة دالة فقط للأبعاد الفيزيائية لنظام الموصلات ولسماحية العازل المتجانس .

وتقاس السعة بالفاراد (*farad* F) ، حيث يُعرف الفاراد بأنه واحد كولوم لكل فولت . والقيم الشائعة للسعة تميل الى أن تكون أجزاء صغيرة من الفاراد ، وبالتبعية يكون المايكروفاراد (μ F) والبيكوفاراد (pF) وحدات عملية أكثر .

ونستطيع أن نطبق تعريف السعة لنظام موصلين بسيط فيه الموصلان متماثلان ، مستويان لانهائيان متوازيان بفاصل d (شكل ٥ ـ ١٣) . باختيار مستوى الموصل السفلى عند $z = 0$ والعلوى عند $z = d$ ، فان لوحا منتظما من شحنة سطحية $\pm \rho_S$ على كل موصل يؤدى الى المجال المنتظم (قسم ٢ ـ ٦ ، معادلة (٢١))

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon} \mathbf{a}_z$$

حيث سماحية العازل المتجانس هى ϵ ، و

$$\mathbf{D} = \rho_S \mathbf{a}_z$$

اذن يجب أن تكون الشحنة على المستوى السفلى موجبة ، لأن D موجهة الى أعلى ، والقيمة العمودية لـ D ،

$$D_n = D_z = \rho_S$$

تساوى كثافة الشحنة السطحية هناك . وعلى المستوى العلوى ،

$$D_n = -D_z$$

والشحنة السطحية هناك هى سالب تلك على السطح السفلى .

وفرق الجهد بين المستويين السفلى والعلوى هو

$$V_0 = -\int_{\text{upper}}^{\text{lower}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_d^0 \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S}{\epsilon} d$$

لأن الشحنة الكلية على أى من المستويين لانهائية ، فان السعة لانهائية . ويُحصل على اجابة عملية أكثر باعتبار مستويين ، كل له مساحة S ، وأبعاده الخطية أكبر بكثير من فاصلهما d . وحينئذ يكون المجال الكهربى وتوزيع الشحنة منتظمين تقريبا عند كل النقط غير المجاورة للأحرف ، وهذه المنطقة الأخيرة تساهم فقط بنسبة مئوية صغيرة من السعة الكلية ، مما يسمح لنا أن نكتب النتيجة المألوفة

$$Q = \rho_S S$$

$$V_0 = \frac{\rho_S}{\epsilon} d$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d} \qquad (٤٦)$$

وبدقة صارمة أكثر ، يمكن أن نعتبر (٤٦) كسعة جزء من تنظيم المستوى اللانهائى له مساحة سطحية S . ويجب أن تُؤجل طرق حساب تأثير التوزيع المجهول وغير المنتظم قرب الأحرف الى أن نصبح قادرين على حل مسائل جهد أكثر تعقيدا .

وكمثال : اعتبر مكثفا له عازل من الميكا ، $\epsilon_R = 6$ ، ومساحة لوح 10 in^2 وفاصل 0.01 in . السعة هى 1,350pF . المساحة الكبيرة للوح يحصل عليها فى مكثفات لها أبعاد فيزيائية صغيرة برص الواح أصغر فى سندوتشات ذات 50 أو 100 لوح ، أو بلف ألواح من الرقائق المعدنية مفصولة بعازل قابل للانثناء .

ويبين جدول (حـ ـ ١) فى الملحق (حـ) ايضا أنه يوجد مواد لها ثوابت عازلة أكبر من 1,000 .

اذا استخدم أكثر من موصلين ، فيجب أن تُعرف السعات الجزئية بين كل زوج من الموصلات . وهذا مُناقش بطريقة شيقة فى أعمال ماكسويل(١) .

وأخيرا ، فالطاقة الكلية المختزنة فى المكثف هى

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \epsilon E^2\, dv = \frac{1}{2}\int_0^S \int_0^d \frac{\epsilon \rho_S^2}{\epsilon^2}\, dz\, dS = \frac{1}{2}\frac{\rho_S^2}{\epsilon} Sd = \frac{1}{2}\frac{\epsilon S}{d}\frac{\rho_S^2 d^2}{\epsilon^2}$$

أو

$$W_E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (٤٧)$$

وجميعها تعبيرات مألوفة . المعادلة (٤٧) تبين أيضا أن الطاقة المختزنة فى مكثف بفرق جهد ثابت عبره تزيد كلما زاد ثابت العازل للوسط .

ت ٥ ـ ١١ : أوجد سعة مكثف متوازى ـ الألواح له : (أ) ألواح مفصولة بمسافة 8mm ، وكل بمساحة 2m^2 ، وعازل له $\epsilon_R = 250$ ، (ب) $d = 0.08\text{mm}$, $S = 2\text{m}^2$ تدرج فولتى

(١) انظر المراجع فى نهاية الفصل .

داخلى مقداره $10^5 V/m$ ، وكثافة شحنة على أحد الألواح $2\mu C/m^2$ (جـ) طاقة مختزنة مقدارها $5\mu J$ مع فولتية مقدارها $4V$ بين الألواح .

الاجابة : $0.553\mu F$, $0.500\mu F$, $0.625\mu F$.

٥ - ١٠ امثلة سعة عديدة :

كمثال أول مختصر ، نختار كبلا محوريا ، أو مكثفا محوريا نصف قطره الداخلى a ، نصف قطره الخارجى b ، وطوله L . الامر لايتطلب كفاحا استنتاجيا كبيرا ، لان فرق **الجهد معطى كمعادلة (١١) فى قسم ٤ - ٣ ، وهذه ببساطة تقسم على الشحنة الكلية $\rho_L L$ فى الطول L . وعلى هذا**

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln (b/a)} \qquad (٤٨)$$

ثم نعتبر مكثفا كرويا مكونا من قشرتين كرويتين موصلتين متحدى المركز نصف قطريهما a و b , $b > a$. وتعبير المجال الكهربى حُصل عليه سابقا باستخدام قانون « جاوس » ،

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

حيث المنطقة بين الكرتين هى عازل بسماحية ϵ .

وتعبير فرق الجهد وجد من هذا بواسطة التكامل الخطى . وعلى ذلك ،

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

هنا تمثل Q الشحنة الكلية على الكرة الداخلية ، وتصبح السعة

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}} \qquad (٤٩)$$

اذا سمحنا للكرة الخارجية أن تصبح كبيرة لانهائيا ، نحصل على سعة كرة موصلة منفردة ،

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon a} \qquad (٥٠)$$

ولقطر مقداره 1 cm أوكرة فى حجم بلية تقريبا ،

$C = 0.556$ pF فى فضاء حر .

وبتغطية هذه الكرة بطبقة عازل مختلف له $\epsilon = \epsilon_1$ ممتدا من $r = a$ الى $r = r_1$ ،

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

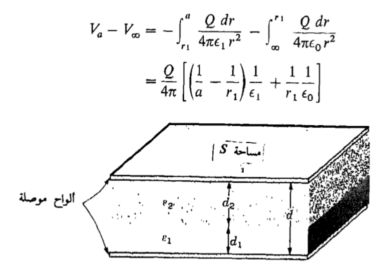
$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \qquad (a < r < r_1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r_1 < r)$$

ويكون فرق الجهد

$$V_a - V_\infty = -\int_{r_1}^{a} \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right)\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{r_1}\frac{1}{\epsilon_0}\right]$$



شكل ٥ - ١٤ : مكثف متوازى - الألواح يحتوى عازلين مع سطح العازل البينى موازى للألواح الموصلة ؛ $C = 1/[(d_1/\epsilon_1 s) + (d_2/\epsilon_2 s)]$.

ولذلك ،

$$C = \frac{4\pi}{(1/a - 1/r_1)/\epsilon_1 + (1/r_1)/\epsilon_0} \qquad (٥١)$$

ولكى ننظر فى مسائل العوازل المتعددة بشمول أكثر قليلا ، دعنا نعتبر مكثفا متوازى - الألواح مساحته S وبتباعد d ، مع الفرض المعتاد أن d صغيرة بالنسبة للأبعاد الطولية للألواح . السعة هى $\epsilon_1 S/d$ مستخدمين عازلا سماحيته ϵ_1 . والآن دعنا نستبدل جزءا من هذا العازل بآخر سماحيته ϵ_2 ، واضعين الحد بين العازلين ، موازيا للألواح (شكل ٥ - ١٤) .

وبعضنا قد يظن فى الحال أن هذه المجموعة ، من حيث الفاعلية ، هى عبارة عن مكثفين على التوالى ، مُنتجة سعه كلية مقدارها .

$$C = \frac{1}{(1/C_1) + (1/C_2)}$$

حيث $C_1 = \epsilon_1 S/d_1$ ، و $C_2 = \epsilon_2 S/d_2$. وهذه هي النتيجة الصحيحة ، ولكننا نستطيع الحصول عليها باستخدام بداهة أقل وطريقة أكثر أساسية .

ولأن تعريف سعتنا ، $C = Q/V$ يتضمن شحنة وفولتية ، فيمكننا أن نفرض أيهما ، ونجد الاخر بدلالتها . والسعة ليست دالة لأيهما ، ولكن للعوازل وهندسة النظام . افترض اننا فرضنا فرق جهد V_0 بين اللوحتين . شدة المجال الكهربي فى المنطقتين E_2 و E_1 كلاهما منتظم ، و $V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$. عند سطح العازل البينى ، E عمودية و $D_{n1} = D_{n2}$ أو $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. وبحذف E_2 فى علاقة V_0 ، نحصل على

$$E_1 = \frac{V_0}{d_1 + (\epsilon_1/\epsilon_2)\, d_2}$$

ولذلك كثافة الشحنة السطحية مقدارها

$$\rho_{S1} = D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2}$$

ولأن $D_1 = D_2$ فان مقدار الشحنة السطحية هى نفسها على كلا اللوحين . وعندئذ تكون السعة

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_S S}{V_0} = \frac{1}{d_1/\epsilon_1 S + d_2/\epsilon_2 S} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}$$

وكحل بديل (وأبسط قليلا) ، يمكننا أن نفرض شحنة Q على أحد اللوحين ، مؤدية الى كثافة شحنة Q/S وقيمة لـ D التى هى أيضا Q/S . وهذا صحيح فى كلا المنطقتين ، لأن $D_{n1} = D_{n2}$ و D عمودية . عندئذ :

$E_2 = D/\epsilon_2 = Q/\epsilon_2 S$, $E_1 = D/\epsilon_1 = Q/\epsilon_1 S$ وفروق الجهد عبر المناطق هى $V_1 = E_1 d_1 = Q d_1/\epsilon_1 S$ و $V_2 = E_2 d_2 = Q d/\epsilon_2 S$ السعة تكون

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{d_1/\epsilon_1 S + d_2/\epsilon_2 S} \qquad (٥٢)$$

كيف يمكن أن تتغير طريقة الحل ، أو الاجابة اذا كان هناك مستوى موصل ثالث على السطح البينى ؟ . يمكننا الان أن نتوقع أن نجد شحنة سطحية على كل من جانبى هذا الموصل ، ومقادير هذه الشحنات يجب أن تكون متساوية . وبتعبير اخر : نفكر فى الخطوط الكهربية ليست على أنها تمر مباشرة من لوح خارجى الى الاخر ، ولكن على أنها تنتهى على أحد جانبى هذا المستوى الداخلى ، وبعد ذلك مستمرة على الجانب الاخر . والسعة

لاتتغير ، على شرط ، بالطبع ، أن الموصل المضاف ذو سمك مهمل . واضافة لوح موصل سميك سيزيد السعة اذا بقى الانفصال بين الألواح الخارجية ثابتا ، وهذا مثال لنظرية أكثر عمومية ، والتى تقرر أن استبدال أى جزء من العازل بجسم موصل سيسبب زيادة فى السعة .

اذا وضعت حدود العازل عمودية على اللوحين الموصلين وشغل العازلين مساحات S_1 و S_2 ، فان فرق جهد V_0 مفترض سينتج شدتى مجال $E_1 = E_2 = V_0/d$ وهذه مجالات مماسة عند السطح البينى ، ويجب أن يكونا متساويين . اذن يمكننا أن نجد بالتتابع D_1 ، D_2 ، ρ_{s1} ، ρ_{s2} و Q ، حاصلين على سعة

$$C = \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2 \qquad (٥٣)$$

كما يجب أن نتوقع .

فى الوقت الحالى نستطيع أن نتعامل قليلا جدا مع مكثف مستخدم عازلين فيه بحيث أن يكون السطح البينى ليس عموديا أو موازيا للمجالات فى كل مكان . بالتأكيد نعرف شروط الحدود عند كل موصل وعند سطح العازل البينى ، ومع ذلك لانعرف المجالات التى تطبق عليها شروط الحدود . ويجب أن نترك جانبا مثل هذه المسألة حتى تزيد معرفتنا بنظرية المجال ، ونكون راغبين وقادرين على استخدام أساليب تقنية رياضية أكثر تقدما .

ت ٥ ـ ١٢ أوجد السعة لـ : (أ) 100ft من كابل محورى 58 C/U له موصل داخلى قطره 0.0295 in ، وموصل خارجى قطره الداخلى 0.116 in ، وعازل بوليثيلين ، (ب) كرة موصلة نصف قطرها 1cm ، مغطاة بطبقة بوليثيلين سمكها 1cm ، ومحاطة بكرة موصلة متحدة المركز نصف قطرها 2cm ، (جـ) كرة موصلة نصف قطرها 1cm ، مغطاة بطبقة من البوليثيلين سمكها 1cm ، ومحاطة بكرة موصلة متحدة المركز قطرها 3cm .

الاجابة : 2.87pF , 5.03pF , 2,800pF

ت ٥ ـ ١٣ فى شكل ٥ ـ ١٤ ، دع $\epsilon_{R1} = 4$, $\epsilon_{R2} = 6$, $d_1 = 3$mm , $d_2 = 2$mm و $S = 12$ cm^2 ، ودع ρ_s على السطح العلوى للوح السفلى 240nC/m^2 أوجد E فى كل منطقة والفولتية بين اللوحتين .

الاجابة : 6,780V/m , 4,520V/m , 29.4V .

٥ ـ ١١ سعة خط ذى سلكين :

نختتم هذا الفصل بمسألة الخط ذى السلكين . وستتكون الهيئة النهائية من اسطوانتين موصلتين متوازيتين ، كل منهما له مقطع دائرى ، وسنستطيع أن نجد معلومات

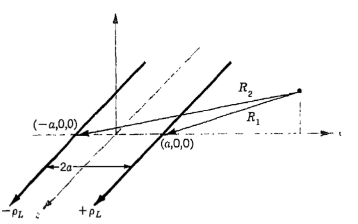
كاملة عن شدة المجال الكهربى ، مجال الجهد ، توزيع كثافة الشحنة السطحية ، والسعة . وهذا التنظيم هو نوع هام لخط النقل ، كما هو الكابل المحورى الذى قد ناقشناه عدة مرات من قبل .

ونبدأ بفحص مجال الجهد لخطى شحنة لانهائيين . ويبين شكل ٥ ـ ١٥ : خط شحنة موجب فى المستوى xz عند $x = a$ وخط شحنة سالب عند $x = -a$. وجهد خط شحنة مفرد مع مرجع صفرى عند r_0 هو

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

والان نكتب تعبير مجال الجهد المتضام بدلالة المسافات نصف القطرية من الخطين الموجب والسالب ، R_1 و R_2 ، بالترتيب ،

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2}\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_{10} R_2}{R_{20} R_1}$$



شكل ٥ ـ ١٥ خطا شحنة لانهائيان متوازيان يحملان شحنة مضادة . والخط الموجب عند $x = a$, $y = 0$ والخط السالب عند $x = -a$, $y = 0$ ونقطة عامة فى المستوى xy تبعد نصف قطرياً R_1 و R_2 من الخطين الموجب والسالب ، بالترتيب . والأسطح متساوية ـ الجهد اسطوانات دائرية .

نختار $R_{10} = R_{20}$ واضعين هكذا المرجع الصفرى عند مسافات متساوية من كل خط . وهذا السطح هو المستوى $x = 0$. وبالتعبير عن R_1 و R_2 بدلالة x و y ،

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \qquad (٥٤)$$

ولكى نتعرف على الأسطح المتساوية ـ الجهد ، ونفهم المسألة التى سوف نحلها فهما وافيا ، فان بعض التصريفات الجبرية ضرورية . وباختيار سطح متساوى الجهد $V = V_1$ ، دع

$$K_1 = e^{4\pi\epsilon V_1/\rho_L}$$

وبذلك

$$K_1 = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

وبعد الضرب وتجميع الحدود المتساوية القوى ، نحصل على

$$x^2 - 2ax\frac{K_1+1}{K_1-1} + y^2 + a^2 = 0$$

ويمكننا اكمال المربع ،

$$\left(x - a\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2$$

مبينة أن السطح متساوى ـ الجهد $V = V_1$ لايعتمد على z (أى انه اسطوانه) ويقطع المستوى xy فى دائرة نصف قطرها b ،

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$$

التى تتمركز عند h = x , 0 = y ، حيث

$$h = a\frac{K_1+1}{K_1-1}$$

والآن يمكننا تحديد مسألة فيزيائية بالسؤال عن السعة بين اسطوانة موصلة نصف قطرها b ومستوى على مسافة h من الاسطوانة . والموصلات أسطح متساوية ـ الجهد ، ونفى بشروطنا بحل المعادلتين الأخيرتين فى a ، موضع خط الشحنة المكافىء ، وفى K_1 ، بارامتر تبسيط الذى هو دالة فى الجهد V_1 ، بدلالة h وb ،

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

و

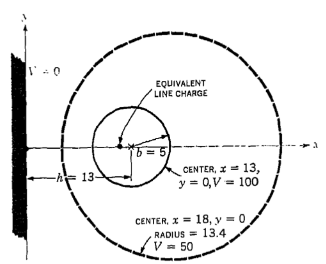
$$\sqrt{K_1} = e^{2\pi\epsilon V_1/\rho_L} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

ولأن المستوى عند جهد صفرى والاسطوانة الدائرية عند جهد V_1 ، فان فرق الجهد يكون V_1 ، أو

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

ومقدار الشحنة على الاسطوانة ، على المستوى ، أو على خط الشحنة المكافىء هو ρ_L من قانون « جاوس » ، والسعة بين الاسطوانة والمستوى لطول L هى لذلك

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln [(h + \sqrt{h^2 - b^2})/b]} = \frac{2\pi\epsilon L}{\cosh^{-1} (h/b)} \quad (٥٥)$$



شكل ٥ ـ ١٦ مثال عددى للسعة ، كثافة الشحنة الخطية ، موضع خط شحنة مكافىء ، وخصائص السطح متساوى الجهد النصفى لموصل اسطوانى نصف قطره 5m عند جهد 100V مواز لـ وعلى بعد *13m* من مستوى موصل عند جهد صفر .

يبين شكل ٥ ـ ١٦ : اسطوانة نصف قطرها 5m عند جهد 100V ، بعيدة 13m فى فضاء حر عن مستوى عند جهد صفر . والقيم العددية أوجدت ـ للشحنة الكلية ـ لكل وحدة طول على الاسطوانة ، والسعة بين الاسطوانة والمستوى، وموضع سطح متساوى الجهد جهده 50V ، وموضع خط الشحنة الفتيلى الذى أمكنه أن يُنتج اسطحا متساوية ـ الجهد مطابقة .

شدة المجال الكهربى يمكن ايجادها بأخذ تدرج مجال الجهد (٥٤) ، و D تكون اذن ϵE . وبتعيين قيمة D عند السطح الاسطوانى ، يمكن إيجاد توزيع الشحنة السطحية . وللمثال السابق ، نجد أن

$$\rho_{S,\,\max} = 2.25\ \rho_{S,\,\min}$$

ولموصل نصف قطره صغير موضوع بعيدا عن المستوى ، نجد أن

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\,(2h/b)} \qquad (b \ll h) \qquad (٥٦)$$

والسعة بين موصلين دائريين منفصلين بمسافة $2h$ هى نصف السعة المعطاة بـ (٥٥) و (٥٦) .

وهذه الاجابات الأخيرة ذات أهمية لأنها تعطينا تعبيرا للسعة لقسم من خط نقل ذى سلكين ، وهو واحد من أنماط خطوط النقل المدروسة فى الفصل الثانى عشر .

ت ٥ - ١٤ : أوجد السعة بين اسطوانة دائرية موصلة فى الهواء ، نصف قطرها 2.5mm و : (أ) مستوى موصل على بعد 1cm من محور الاسطوانة ، باستخدام معادلة (٥٥) ، قسم ٥ - ١١ ؛ (ب) مستوى موصل على بعد 1cm من محور الاسطوانة ، باستخدام معادلة (٥٦) ، قسم ٥ - ١١ ، (جـ) اسطوانة مماثلة ، والمحاور منفصلة بمسافة 1cm

الاجابة : 26.96pF/m , 26.75pF/m , 21.12pF/m .

مراجع مقترحة :

1 - Adler. R.B., A.C. Smith, and R.L. Longini : "Introduction to Semiconductor physics", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

نظرية اشباه الموصلات معالجة على مستوى دراسات مرحلة البكالوريوس .

2 - Dekker, A.J : "Electrical Engineering Materials", Prentice- Hall, Inc., Englewood fliffs, N.J., 1959.

هذا الكتاب الصغير الرائع يغطى العوازل ، الموصلات ، اشباه الموصلات ، والمواد المغناطيسية .

3 - Fano. R.M., L.J. Chu, and R.B. Ader: "Electromagnetic Fields, Energy, and Forces", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

يناقش الاستقطاب فى العوازل فى الجزء الأول من الفصل الخامس . هذا كتاب للصف قبل الأخير يفترض مقرر فيزياء فى الكهربية والمغناطيسية لفصل دراسى كامل

سابق ، ولهذا فهو متقدم فى المستوى . ويجب أن تقرأ المقدمة التى تبدأ على صفحة 1 .

4 - **Fink,D.G., and H.W. Beaty : "Standard Handbook for Electrical Engineers", 11th ed., McGraw- Hill Book Company, New York, 1978.**

5 - Matsch, L.W., "Capacitors, Magnetic Circuits, and Transformers", Prentice - Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1964;

عديد من النواحى العملية للمكثفات مناقشة فى الفصل الثانى .

6 - Maxwell, J.C.: "A Treatise on Electricity and Magnetism", 3rd ed., Oxford University press, New York, 1904.

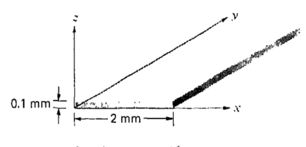
أو بطبعة رخيصة ورقية الغلاف Dover Publications, Inc., New York, 1954 .

7 - Wert, C.A. and R.M. Thomson: "Physics of Solids", 2nd ed., Mc. Graw - Hill Book Company, New York, 1970.

هذا كتاب متقدم فى مستوى مرحلة البكالوريوس وهو يغطى المعادن ، اشباه الموصلات والعوازل .

مسائل :

١ ـ كثافة تيار معينة فى الاحداثيات الاسطوانية بـ $J = 100e^{-2z}(\rho a_\rho + a_z)$ A/m² أوجد التيار الكلى المار خلال كل من هذه الأسطح (أ) $0 \leq \rho \leq 1$, $z = 0$ ، فى اتجاه a_z ، (ب) $0 \leq \rho \leq 1$, $z = 1$ فى اتجاه a_z ، (جـ) الأسطوانة المغلقة المعرفة بـ $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ ، فى اتجاه نحو الخارج .



شكل ٥ ـ ١٧ انظر مسألة ٢ .

٢ ـ موصل شريطى مبين فى شكل ٥ ـ ١٧ . يسرى التيار فى اتجاه a_y بكثافة : 12,000 Cos 10^{10}t. A/m² عند السطحين العلوى والسفلى ، ولكن التأثير السطحى يسبب نقصا فى الاتساع ، وتأخرا فى زاوية الطور عند النقط الداخلية . هكذا

$J = 12{,}000e^{-10^6 z}\cos(10^{10}t - 10^6 z)a_y\ A/m^2$. بالقرب من السطح السفلى ،
ومع تأثير مماثل عند السطح العلوى . افترض عدم التغير مع x . (أ) ماهو التيار الكلى $I(t)$ الذى تحمله الشريحة ؟ (ب) مامقدار التيار الذى كانت ستحمله اذا كانت لـ J قيمتها العظمى عند كل النقط الداخلية ؟

٣ ـ سطح عند $z = 0$ عبارة عن كاثود تنبعث منه الكترونات بسرعة ابتدائية صفرية . ويُؤثر عليها عندئذ بمجال كهربى $E = -2 \times 10^6 a_z\ V/m$ وبمعرفة أن للالكترون $m = 9.11 \times 10^{-31}kg$ و $e = 1.602 \times 10^{-16}\ C$: (أ) أوجد $v(t)$ ، لالكترون منبعث عند $t = o$؛ (ب) أوجد $z(t)$؛ (جـ) أوجد : $v(z)$؛ (د) اذا كانت الالكترونات تترك الكاثود باستمرار كحزمة لها مقطع عرضى $10^{-7}m^2$ وتيار كلى $100\mu A$ ، أوجد كثافة التيار وكثافة الشحنة الحجمية كدوال فى z .

٤ ـ فى المنطقة $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، $0 \leqslant y \leqslant 1$ ، $0 \leqslant z \leqslant 1$ ، يعطى الجهد بـ $V = 120x^{4/3}V$ (أ) أوجد D,E ، و ρ اذا كانت كثافة الشحنة لها سرعة فى اتجاه a_x هى : $6.5 \times 10^6\ x^{2/3}\ m/s$ ، أوجد التيار الكلى العابر لمساحة $1m^2$ فى المستوى ، (ب) $x = 0$ (جـ) $x = 1$.

٥ ـ المركبة z لكثافة التيار هى $Jo e^{-az} / [(x^2+1)(y^2+1)]$. عين التيار فى اتجاه a_z العابر للسطح : (أ) $z = 0$ ، $|x| \leqslant 1$ ، $|y| \leqslant 1$ ، (ب) $z = 0$.

٦ ـ كثافة التيار فى منطقة معينة يمكن أن تقرب بالدالة $J = (0.1e^{-10^6 t}/r)a_r\ A/m^2$ فى الاحداثيات الكروية . (أ) ماكمية التيار العابر للسطح $r = 5$ عند $t = 1\mu S$ ؟ (ب) أعد لـ $r = 6$. (جـ) استخدم معادلة الاستمرارية لايجاد $\rho(r,t)$. (د) أوجد تعبيرا لسرعة كثافة الشحنة .

٧ ـ بالقرب من النقطة $P(5,7,-5)$ ، يمكن تمثيل كثافة التيار بالتعبير الاتجاهى $J = 2x^3ya_x - 5x^2z^2a_y + 4x^2yza_z\ A/m^2$. (أ) ماكمية التيار التارك لمكعب ، ضلعه 1m ، وحوافه موازية للمحاور الاحداثية ، متمركزا عند P ؟ (ب) بأى معدل تزيد كثافة الشحنة الحجمية عند P ؟

٨ ـ يمكن كتابة معادلة استمرارية للكتلة مثلما للشحنة ، بفرض أن ليس هناك تحول بين الكتلة والطاقة . (أ) ما هى الكميات المناظرة لـ J و ρ ؟ (ب) تبين قياسات عملت على مكعب ضلعه 1 cm ان المعدلات التى تمر بها الكتلة خارجة خلال كل وجه عند لحظة معينة من الزمن هى 9.7mg/s,10.2 mg/s — و 1.8 mg/s و 2.1 mg/s — و 4.1. g/s — و 4.4 mg/s بفرض أن هذا المكعب يمكن أن يفترض انه عنصر حجم تزايدى ، قرب المعدل الزمنى لتغير الكثافة عند مركزه .

٩ ـ قطعة من مادة موصلة لها $\sigma = 5M\ \mho/m$ على هيئة أسفين مبتور : $0< z <, 0< \phi < 0.2\pi,\ 4 < \rho < 10$ Cm خلال هذه المادة $E= 2a_\phi/\rho mV/m$ (أ) ماهو التيار الكلى المار خلال الجسم ؟ (ب) ماهى مقاومته ؟

١٠ ـ فى المسألة ٩ ، دع $E= 2a_\rho/\rho$ mv/m وأوجد التيار الكلى والمقاومة .

١١ ـ (أ) باستخدام البيانات المتوافرة فى الملحق (جـ) ، احسب مقاومة سلك 1mi من الحديد المغلف بالألومنيوم اذا كان قطر القلب الحديد 0.25 in ، بينما القطر الخارجى هو 0.5 in . (ب) اذا كان الموصل حاملا لتيار مستمر كلى مقداره 50A ، أوجد القدرة المتبددة لكل بوصة مربعة من سطح الموصل الخارجى .

١٢ ـ عنصر تسخين من محمصة خبز كهربائية يتكون من 1.5 m من صنف خاص من شريط نيكرومى ، مقطعه العرضى 0.05mm فى 0.8mm ، مع مقاومية مقدارها $1.1 \times 10^{-4}\Omega cm$. أوجد التيار الذى يسرى عندما يوصل 120 V.dc بين طرفى العنصر ، وأوجد ايضا القدرة الناتجة .

١٣ ـ عين $|J|$ فى موصل له : (أ) الحركية $4.1 \times 10^{-3}\ m^2/V.s$ ، كثافة الشحنة الحجمية $-3.6 \times 10^9\ C/m^3$ ، وشدة المجال الكهربى 0.085 V/m ، (ب) سرعة الانسياق 0.04mm/s وهناك يوجد 6×10^{28} الكترون توصيل لكل متر مكعب ، (جـ) المقاومية $3 \times 10^{-8}\Omega m$ وشدة المجال الكهربى 48mV/m .

١٤ ـ يمكن مقارنة القيم المحسوبة عند نهاية قسم ٥ ـ ٣ لسلك نحاسى مع تلك لموصل من الألومنيوم . سلك ألومنيوم رقمه 16 # له أيضا قطر يساوى 0.0508 in ، ولكن موصليته $3.82 \times 10^7\ \mho/m$ (أ) أوجد مقاومة طول مقداره ميل . (ب) اذا كانت مقدرة حمل التيار هى 7A ، عين كثافة التيار والفولتية بين طرفى السلك . (جـ) احسب E , v_d و ρ_e اذا كان $\mu_e = 0.0014\, m^2/V \cdot s$،

١٥ ـ $V = 1{,}1000\rho^2$ فى الاحداثيات الاسطوانية . (أ) فاذا كان الحيز $0.1< \rho < 0.3m$ فراغا بينما الاسطح $\rho = 0.39\rho = 0.1$ موصلات ، عين كثافة الشحنة السطحية على كل موصل . (ب) ماهى الشحنة الكلية فى طول 1 m من الحيز المفرغ ، $0.1 < \rho < 0.3$ ؟ (جـ) ماهى الشحنة الكلية فى طول 1 m ، مشتملا كلا الشحنتين السطحيتين ؟

١٦ ـ مجال جهد معطى بالصورة $V = X^4 + y^4 - 1$ V . (أ) ارسم تخطيطا للسطحين متساويى الجهد ، $V = 0$, $V = 100V$. هذان سطحان موصلان . (ب) أوجد كثافة الشحنة الحجمية عند النقطة $P(2,1,3)$ فى فضاء حر بين الأسطح . (جـ) أوجد كثافة الشحنة السطحية عند النقطة $C(1,0,0)$ على أحد الموصلين .

١٧ ـ كثافة الشحنة السطحية عند النقطة $P(-2, 5, -4)$ على سطح الموصل الكروى $x^2 + y^2 + z^2 = 45$ هى $75\ nc/m^2$. فاذا كان الموصل معزولا فى فضاء حر ، أوجد E مباشرة داخل ومباشرة خارج سطح الموصل عند P .

١٨ ـ السطح $x + 2y^2 + 4z^3 = 100$ هو الحد لجسم موصل يقع فى فضاء حر . تقع نقطة الأصل بداخل الموصل وتقع النقطة $A(18, -5, 2)$ على السطح . اذا كانت $|E| = 50\ V/m$ وموجهة للخارج عند النقطة A ، أوجد E , D و ρ_s هناك .

١٩ ـ مجال جهد معطى بـ $V = 100\ ln\ \{[(x+1)^2 + y^2] / [(x-1)^2 + y^2]\} V$. معلوم أن نقطة $P\ (2, 1, 1)$ على سطح موصل ، وأن الموصل يقع فى فضاء حر . أوجد وحدة متجه عند P عموديا على السطح وأيضا قيمة كثافة الشحنة السطحية على الموصل .

٢٠ ـ شحنة نقطية Q موضوعة على مسافة h من مستوى موصل . عين المحل الهندسى للنقط فى المستوى التى عندها مقدار كثافة الشحنة السطحية $0.1Q/h^2$.

٢١ ـ شحنتان نقطيتان قيمة كل منهما $100\pi\ \mu c$ — موضوعتان عند $(2, -1, 0)$ و $(2, 1, 0)$ ، السطح $x = 0$ هو مستوى موصل . (أ) عين كثافة الشحنة السطحية عند نقطة الأصل . (ب) عين ρ_S عند $P\ (0, h, 0)$.

٢٢ ـ الجزء الخطى $x = 0\ ,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\ ,\ z = 1$ يحمل كثافة شحنة خطية : $\rho_L = \pi|y|\ \mu C/m$ دع $z = 0$ يكون مستوى موصل وعين كثافة الشحنة السطحية عند : (أ) $(0,0,0)$ ، (ب) $(0,1,0)$.

٢٣ ـ عند درجة حرارة معينة ، تعطى حركيتى الالكترون والفجوة فى جرمانيوم ذاتى بـ $0.43\ m^2/V.s$ و $0.21\ m^2/V.s$ ، بالترتيب اذا كان كل من تركيزى الالكترون والفجوة هو $2.3 \times 10^{19}\ m^{-3}$ ، أوجد الموصلية عند درجة الحرارة هذه .

٢٤ ـ فى عينه سيليكون معينة التى أضيف لها قليل من ذرات الفسفور ، هناك 2.0×10^{17} الكترونات توصيل لكل متر مكعب و 2.24×10^{16} فجوات لكل متر مكعب . فاذا كان $\mu_e = 0.12\ m^2/V.s$ و $\mu_h = 0.025\ m^2/V.s$ ، عين الموصلية والمقاومية للعينة .

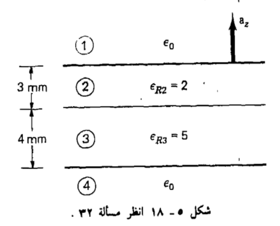
٢٥ ـ عينة شبه موصل لها مقطع مستطيل $1.5mm \times 2mm$ وطول $1.1\ cm$. والمادة لها كثافتا الكترون وفجوة $1.8 \times 10^{18}\ m^{-3}$ و $3 \times 10^{15}\ m^{-3}$ بالترتيب . اذا كان $\mu_e = 0.082 m^2/V.s$ و $\mu_h = 0.5521 m^2/V.s$ أوجد المقاومة المبداة بين وجهى النهاية للعينة .

٢٦ ـ مجال الجهد فى لوح من مادة عازلة لها $\epsilon_R = 1.6$ معطى بـ $V = -5{,}000x$. (أ) أوجد E , D و P فى المادة . (ب) عين قيم ρ , ρ_b و ρ_t فى المادة .

٢٧ - شدة المجال الكهربى عند نقطة معينة داخل زجاج بيركس معطاة بـ :
$E = -50a_x + 220a_y - 85a_z$ V/m (أ) عين قيما لـ ϵ_R و χ_e لهذه المادة .
(ب) احسب P و D عند النقطة المعينة .

٢٨ - مادة خاصة عازلة خطية ، متجانسة وموحدة الخواص تعطى المجال :
$P = 18a_x - 30a_y + 5a_z$nC/m^2 مع $D_x = 20.5$ nc/m^2 عند نقطة معطاة . عين مقدار تدرج الفولتية وكثافة الطاقة عند تلك النقطة .

٢٩ - يحتوى الهيدروجين الذرى 5.42×10^{25} atoms/m^3 عند درجة حرارة وضغط معينين . اذا سلط مجال كهربى 2,500 V/m ، فان ثنائى القطب المكون من الالكترون والنواة الموجبة له طول فعال d مقداره 6.7×10^{-9}m . عين ثابت العازل لستة أرقام عشرية .



شكل ٥ - ١٨ انظر مسألة ٣٢ .

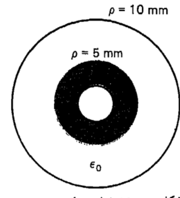
٣٠ - المنطقة $1(x \geqslant 0)$ هى عازل له $\epsilon_{R1} = 2$ ، بينما المنطقة $2(x < 0)$ لها $\epsilon_{R2} = 5$. دع $E_1 = 20a_x - 10a_y + 50a_z$V/m . (أ) أوجد كثافة الطاقة فى كلتا المنطقتين .

٣١ - اذا أعطيت $\epsilon_{R1} = 1$, $\epsilon_{R2} = 2$, $E_1 = 30a_x - 15a_y + 45a_z$ V/m ، دع سطح الحدود يحتوى على نقطة الأصل ، ودع المتجه $A = -2a_x + 5a_y + 14a_z$ يكون عموديا على السطح هناك ودعه يشير من المنطقة 1 الى المنطقة 2 . عين الزاوية (بين $0°$ و $90°$) بين A و : (أ) E_1 ، (ب) D_1 ، (جـ) E_2 ، (د) D_2 .

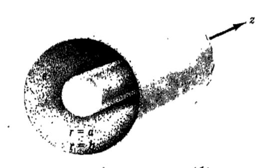
٣٢ - لوحان عازلان لانهائيان موضوعان فى فضاء حر كما هو مبين فى شكل ٥ - ١٨ . دع a_z يكون موجها الى أعلى . اذا كان $E_1 = 10a_x - 20a_y + 30a_z V/m$ فى المنطقة 1 ، أوجد الزاوية بين E و a_z فى المنطقة : (أ) 1 ، (ب) 2 ، (جـ) 3 ، (د) 4 .

٣٣ - بالنسبة للكابل المحورى المحتوى على عازلين مختلفين ، والمبين فى شكل ٥ - ١٩ ، دع ρ_s تكون 20 nc/m^2 على الموصل الداخلى . ما هى الفولتية بين الموصلين الداخلى والخارجى ؟

٣٤ ـ بالنسبة للكرتين الموصلتين المتحدتى المركز المفصولتين بواسطة عازلين مختلفين ، والتى يوحى بها شكل ٥ ـ ١٩ فى مقطع محتو على مركزها ، دع ρ_S تكون $20\ nC/m^2$ على الكرة الداخلية . ماهى الفولتية بين الموصلين الداخلى والخارجى ؟



شكل ٥ ـ ١٩ انظر مسألة ٣٣ و ٣٤ .



شكل ٥ ـ ٢٠ انظر مسألة ٣٦ .

٣٥ ـ مكثف متوازى ـ اللوح له انفصال بين اللوحين 4mm ومساحة $64Cm^2$. والعازل من نوع له $\epsilon_R = 5$. (أ) احسب C . أحدثت الان فولتية 20V بين اللوحين ، (ب) عين Q , D , E والطاقة المختزنة فى المكثف . والان ازيل مصدر الفولتية بدون تغيير الفولتية عبر المكثف . ثم سحب العازل بعناية للخارج من بين اللوحين ، (جـ) ماهى Q الان ؟ (د) أوجد ثانية قيم D و E و W_E . (هـ) ماهى V_0 الان ؟

٣٦ ـ بينت المناقشة فى الفصل الثانى أن شدة المجال الكهربى فى مكثف محورى ، مثل ذلك المبين فى شكل ٥ ـ ٢٠ ، هو $E = \rho_L a_\rho / (2\pi\epsilon\rho)$ ، حيث ρ_L هى الشحنة لكل وحدة طول على الاسطوانة الداخلية . استخدم هذا المجال لتعيين قيمة C باستخدام معادلة (٤٥) ، قسم ٥ ـ ٩ ، لطول L على سطح الاسطوانة الداخلية ، ولمسار نصف قطرى من الاسطوانة الخارجية الى الداخلية .

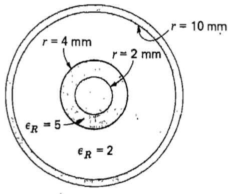
٣٧ ـ تميل المكثفات الى أن تكون مكلفة أكثر كلما زادت سعتها C وفولتيتها القصوى V_{max} . ويعتمد الفولت V_{max} على شدة المجال الذى ينهار عنده العازل ، E_{BD} . أى من هذه العوازل سيعطى أعلى حاصل ضرب $C.V_{max}$: (أ) ميكا : $E_{BD} = 3 \times 10^6$ V/m , $\epsilon_R = 5.4$ ، (ب) تيتانات الباريوم , $E_{BD} = 10^8$V/m , $\epsilon_R = 1,200$ ، (جـ) مطاط نيوبرين: $E_{BD} = 1.2 \times 10^6$ V/m , $\epsilon_R = 6.6$ ، (د) هواء : $E_{BD} = 3 \times 10^6$ V/m , $\epsilon_R = 1$.

٣٨ ـ مكثف متوازى الألواح له مساحة $S = 0.8\text{m}^2$ ، وانفصال $d = 10^{-4}$m ، وعازل له $\epsilon_R = 1,000$ ، ومجال 10^6 V/m فى العازل . (أ) احسب C و V_0 . (ب) كم عدد المكثفات اللازمة لاختزان الطاقة الكهربية التى يمكن استردادها ، حوالى 5,000J ، فى خلية اضاءة واحدة ؟

٣٩ ـ كابل محورى مبين مقطعه العرضى فى شكل ٥ ـ ٢١ . (أ) أوجد السعة لكل متر طولى . (ب) اذا كان هناك 100V بين الموصلين ، احسب |E| فى كل مكان وارسمها كدالة فى ρ .

٤٠ ـ كرة موصلة قطرها 5cm لها شحنة كلية مقدارها 1 μC . الكرة محاطة بقشرة عازلة غير متجانسة $5 \leqslant r \leqslant 10$cm ، فيها تتغير السماحية النسبية مع نصف القطر بالصورة $\epsilon_R(r) = 0.1/r$. وكره موصلة ثانية عند $r = 10$ cm . احسب السعة وفرق الجهد بين الموصلين .

٤١ ـ للمكثف متوازى ـ الألواح ذى العوازل المتعددة المبين فى شكل ٥ ـ ٢٢ ، احسب d_1 , d_2 و d_3 اذا كانت : (أ) الطاقة المختزنة (لكل وحدة مساحة لوح) فى كل منطقة هى نفسها ، (ب) فرق الجهد عبر كل منطقة هو نفسه ، (جـ) أوجد السعة لكل وحدة مساحات اذا كان $d_1 = 3$mm , $d_2 = 2$ mm, و $d_3 = 5$mm .



شكل ٥ ـ ٢١ انظر مسألة ٣٩ .

٤٢ ـ فى المكثف المبين فى شكل ٥ ـ ١٤ ، شدة المجال الكهربى تساوى 30KV/m مباشرة فوق السطح البينى للعازل و 75KV/mg مباشرة تحته دع . $V_0 = 90V$ ودع

اللوحين على بعد 2mm من بعضهم وبمساحة $10cm^2$. أوجد السعة اذا كان : $\epsilon_{RI} = 1.5$.

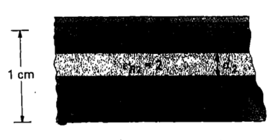
٤٣ - لوحان موصلان متوازيان لكل مساحة سطحية $2m^2$. وانفصالهما 1.25mm فى فضاء حر . وصلت بطارية 100V عبرهما ثم أبعدت . (أ) اعط مقادير Q , ρ_s , D , E , V_0 و W_E و C . (ب) أزلق الأن بحرص بين اللوحين لوحا من عازل سمكه 1mm وله نفس الشكل والمساحة كاللوحين . اذا كان $\epsilon_r = 5$ للعازل ، فاعط مقادير V_0 , ρ_s , Q , W_E و C ، وأيضا E و D فى المادة العازلة .

٤٤ - مكثف ينشأ من لوحين معدنيين ، كل مساحته $2m^2$ ، مفصولين بـ 2mm . اذا اعطيت $1.5 \times 10^{-3}\ m^3$ من مادة عازلة لها $\epsilon_R = 4$ ، كيف يجب أن يستخدم العازل للحصول على النهاية العظمى للسعة بين اللوحين ، وما هى C_{max} ؟

٤٥ - موصل نصف قطره 7mm ومحوره يوازى وعلى بعد 25 mm من مستوى موصل . جهد الموصل 2,000V وذلك للمستوى هو 0 V ، بفرض حالات فضاء حر ، أوجد : (أ) السعة لكل وحدة طول ، (ب) الشحنة لكل وحدة طول على الاسطوانة ، (جـ) شدة المجال الكهربى عند النقطة على الاسطوانة الأكثر من المستوى .

٤٦ - موصلان نحاس رقمهما 16 # (قطر 1.29 mm) متوازيان بفاصل d بين المحورين . عين d لكى تكون السعة بين السلكين فى الهواء 30pF/m

٤٧ - للمثال المبين فى شكل ٥ - ١٦ ، عين الفاصل (الأقل) بين الموصل الاسطوانى والسطح متساوى - الجهد ذى 75-V .



شكل ٥ - ٢٢ انظر مسألة ٤١ .

الفصل السادس

طرق التخطيط التجريبية

لقد رأينا فى الفصول القليلة الأخيرة أن الجهد هو المدخل لأى معلومات نودها عن المجال الكهروستاتيكى عند نقطة . والمسار مباشر ، والسير عليه سهل فى أى اتجاه نرغب اتباعه ، ويمكن أن توجد شدة المجال الكهربى من الجهد بواسطة اجراء التدرج ، التى هى تفاضل ، ويمكن عندئذ ان يستخدم شدة المجال الكهربى لايجاد كثافة التدفق الكهربى بالضرب فى السماحية . وانفراج كثافة التدفق ، وهو مرة أخرى تفاضل يعطى كثافة الشحنة الحجمية ، وكثافة الشحنة السطحية على أى موصلات فى المجال توجد بسرعة بواسطة تقدير كثافة التدفق عند السطح . وتبين شروط الحدود أنها يجب أن تكون عمودية على مثل هذا السطح .

ولايزال التكامل مطلوبا اذا احتجنا الى معلومات أكثر من قيمة مجال أو كثافة شحنة عند نقطة . فايجاد الشحنة الكلية على موصل . والطاقة الكلية المختزنة فى مجال كهروستاتيكى ، أو قيمة سعة أو مقاومة هى أمثلة لمثل هذه المسائل ، فكل منها يتطلب تكاملا . وهذه التكاملات لايمكن عامة أن تتجنب ، مهما تكن سعة معرفتنا بنظرية المجال ، وفى الحقيقة ، سوف نجد أنه كلما أصبحت هذه المعرفة أكبر ، زادت التكاملات التى سوف نرغب فى ايجاد قيمها . والجهد يمكن أن يؤدى شيئا مهما لنا ، وهو أن يمدنا بسرعة ويسر بالكمية التى يجب ان نكاملها .

ومهمتنا ، عندئذ ، أن نوجد الجهد أولا . وهذا لايمكن أن يُعمل بدلالة تشكيل شحنة فى مسألة عملية ، لأنه لايوجد أحد يستطيع أن يخبرنا بالضبط كيف توزع الشحنة ، بدلا من ذلك ، فعادة نعطى عدة أجسام موصلة أو حدود موصلة وفرق الجهد بينها ، مالم يحدث تعرفنا بأن أسطح الحدود تخص مسألة سهلة قد فرغنا منها بالفعل ، فاننا نستطيع أن نفعل القليل الآن ، ويجب أن ننتظر حتى تناقش معادلة « لابلاس » فى الفصل القادم .

ومع اننا بذلك نؤجل الحل الرياضى لهذا النوع الهام من المسائل العملية ، فيمكننا أن نلم بالطرق التجريبية العديدة لايجاد مجال الجهد . وبعض من هذه الطرق يشتمل على معدات خاصة مثل الحوض الالكتروليتى ، جهاز انسياب مائع ، ورق مقاومة ومعده القنطرة المرتبطة به ، أو ألواح مطاط ، والبعض الآخر يستخدم فقط قلما ، وورقة وامدادا جيدا من الممحات . والجهد المضبوط لايمكن ابدا تعينه ، ولكن عادة يمكن

الوصول الى دقة كافية للأغراض الهندسية . وطريقة أخرى ، تسمى طريقة التكرار تسمح لنا أن نحقق أى دقة مرغوبة للجهد ، ولكن عدد الحسابات المطلوبة يزيد بسرعة جدا كلما زادت الدقة المرغوبة .

وعديد من الطرق التجريبية التى ستوصف بعد مبنية على تناظر مع المجال الكهروستاتيكى ، بدلا من قياسات مباشرة على هذا المجال نفسه .

وأخيرا ، لانستطيع تقديم هذا الموضوع عن الطرق التجريبية لايجاد مجالات الجهد بدون تأكيد الحقيقة أن عديدا من المسائل العملية لها هندسة معقدة لدرجة أنه غير ممكن أو محتمل ايجاد طريقة مضبوطة لايجاد هذا المجال . والطرق التقنية التجريبية هى الوحيدة التى يمكن استخدامها .

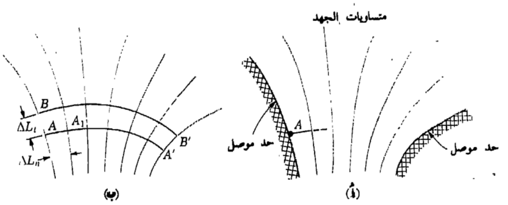
٦ ـ ١ المربعات المنحنية الخطوط

طريقتنا الأولى هى طريقة تخطيطية ، متطلبة فقط قلما وورقة . وبجانب كونها اقتصادية ، فهى أيضا قادرة على تقديم دقة جيدة اذا استخدمت بمهارة وصبر . يمكن الحصول على دقة مناسبة (خمسة الى عشرة فى المائة فى تقدير سعة) بواسطة مبتدىء والذى لايفعل أكثر من تتبع القواعد القليلة والتلميحات للأصول الفنية .

والطريقة التى سوف توصف يمكن تطبيقها فقط لمجالات لايوجد فيها تغيير فى الاتجاه العمودى على مستوى الرسم التخطيطى . والطريقة مبنية على عدة حقائق قد أوضحناها فعلا :

١ ـ حد موصل هو سطح متساوى الجهد .

٢ ـ كل من شدة المجال الكهربى وكثافة التدفق الكهربى عموديان على الأسطح المتساوية الجهد .



شكل ٦ ـ ١(أ) رسم تخطيطى للأسطح المتساوية الجهد بين موصلين . تزايد الجهد بين كل من المتساويى الجهد المتجاورين هو نفسه . (ب) خط تدفق واحد قد رسم من A الى A' وآخر من B الى B'

٣ ـ E و D هما لذلك عموديان على حدود الموصل ولهما قيم مماسة صفرية .

٤ ـ خطوط التدفق الكهربى ، أوخطوط الانسياب ، تبدأ وتنتهى على شحنة ، وعلى ذلك ، فى عازل متجانس خالى الشحنة ، تبدأ وتنتهى على حدود الموصل فقط .

دعنا نعتبر مضمون معنى هذه النصوص برسم خطوط الانسياب على رسم تخطيطى مبين فيه الأسطح متساوية الجهد . فى شكل ٦ ـ ١أ مبين حدود موصلين ، وقد رسمت متساويات ـ الجهد مع فرق جهد ثابت بين الخطوط . يجب أن نتذكر أن هذه الخطوط هى مجرد مقاطع الأسطح متساوية الجهد ، التى هى اسطوانات (وأن كانت غير دائرية) ، لأنه غير مسموح بتغير فى الاتجاه العمودى على سطح الورقة . ونختار تبعا للعرف أن نبدأ خط انسياب ، أوخط تدفق ، عند A على سطح الموصل الموجب أكثر . الخط يترك السطح عموديا ويجب أن يتقاطع بزوايا متعامدة مع الأسطح متساوية الجهد غير المرسومة ، ولكنها حقيقية جدا ، بين الموصل وأول سطح مبين . ويمد الخط الى الموصل الاخر خاضعا للقاعدة الوحيدة ، ان التقاطع مع كل متساوى جهد يجب أن يكون متعامدا . وبادارة الورقة من جانب الى جانب ، بينما يتقدم الخط يمكننا أن نحافظ على التعامد بدقة أكثر . وقد أكمل الخط فى شكل ٦ ـ ١ب .

وبطريقة مماثلة ، يمكننا ان نبدأ عند B ونرسم تخطيطيا خط انسياب آخر منتهيا عند B' . وقبل المواصلة ، دعنا نفسر معنى هذا الزوج من خطوط الانسياب . خط الانسياب ، بالتعريف ، مماس فى كل مكان لشدة المجال الكهربى أولكثافة التدفق الكهربى . ولأن خط الانسياب مماس لكثافة التدفق الكهربى ، فكثافة التدفق مماسة لخط الانسياب ، ولايمكن لتدفق كهربى أن يقطع أى خط انسياب . وبتعبير آخر ، اذا كان هناك شحنة مقدارها $5\mu C$ على السطح بين A و B (وممتده 1 m الى داخل الورقة) ، عندئذ يبدأ $5\ \mu C$ من التدفق فى هذه المنطقة وكلها يجب أن تنتهى بين A' و B' .

مثل هذا الزوج من الخطوط يسمى أحيانا أنبوبة تدفق ، لأنها فيزيائيا تبدو أنها تحمل تدفقا من نقطة لأخرى بدون أى فقد .

ونرغب الان أن ننشىء خط انسياب ثالث ، وكلا من التفسيرات الرياضية والبصرية التى يمكن أن نعملها من الرسم التخطيطى سوف تبسط بشدة اذا رسمنا هذا الخط ابتداء من نقطة ما C مختارة بحيث تحمل نفس كمية التدفق فى الانبوبة BC مثل تلك المحتواة فى AB . كيف نختار موضع C ؟

شدة المجال الكهربى عند منتصف الخط الذى يصل A مع B يمكن أن توجد تقريبا بفرض قيمة للتدفق فى الانبوبة AB ، مثلا $\Delta\Psi$ ، التى تسمح لنا أن نعبر عن كثافة

التدفق الكهربى بـ $\Delta\Psi / \Delta L_t$ ، حيث عمق الانبوبة هو $1\ \mathrm{m}$ و ΔL_t هو طول الخط الذى يصل A مع B . ومقدار E عندئذ هو

$$E = \frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t}$$

ومع ذلك ، يمكننا أيضا أن نجد مقدار شدة المجال الكهربى بقسمة فرق الجهد بين النقط A و A_1 ، الواقعتين على سطحين متساويى ـ الجهد متجاورين ، على المسافة بين A الى A_1 . اذا رمز لهذه المسافة بـ ΔL_n وفرض تزايد للجهد بمقدار ΔV بين متساويات ـ الجهد ، فان

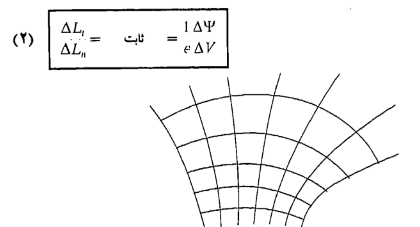
$$E = \frac{\Delta V}{\Delta L_n}$$

هذه القيمة تنطبق بأعلى دقة على النقطة عند منتصف جزء الخط من A الى A_1 ، بينما كانت القيمة السابقة أدق ماتكون عند منتصف جزء الخط من A الى B . على أنه اذا كانت متساويات ـ الجهد متقاربة مع بعضها (ΔV صغيرة) وخطا الانسياب متقاربان مع بعضهما ($\Delta\Psi$ صغيرة) ، فان القيمتين المعينتين لشدة المجال الكهربى يجب أن تكونا متساويتين تقريبا ،

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t} = \frac{\Delta V}{\Delta L_n} \qquad (١)$$

وفى رسمنا التخطيطى كله قد فرضنا وسطا متجانسا (ϵ ثابتة) ، تزايد جهد ثابت بين متساويات الجهد (ΔV ثابتة) ، ومقدار تدفق ثابت لكل أنبوبة ($\Delta\Psi$ ثابتة) . ولكى تتحقق كل هذه الشروط ، يظهر من (١) أن

$$\boxed{\frac{\Delta L_t}{\Delta L_n} = \text{ثابت} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta V}} \qquad (٢)$$



شكل ٦ ـ ٢ باقى خطوط الانسياب قد أضيفت لشكل ٦ ـ ١ب ببدء كل خط جديد عموديا على الموصل والابقاء على مربعات منحنية الخطوط فى الرسم التخطيطى كله .

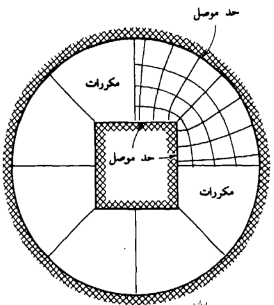
ويمكن عمل مناقشة مشابهة عند أى نقطة فى رسمنا التخطيطى ، ولذلك نقاد الى النتيجة أنه يجب المحافظة على نسبة ثابتة بين المسافة بين خطوط الانسياب كما تقاس

على طول متساوى جهد ، والمسافة بين متساويات الجهد كما تقاس على طول خط انسياب . وأن هذه النسبة هى التى يجب أن يكون لها نفس القيمة عند كل نقطة ، وليست الأطوال المفردة . ويجب أن يقل كل طول فى المناطق ذات قوة مجال أعلى لأن ΔV ثابتة .

وأبسط نسبة يمكن أن نستخدمها هى الوحدة ، وخط الانسياب من B الى B' الموضح فى شكل ٦ ـ ١ب بدىء عند نقطة لها $\Delta L_t = \Delta L_n$. ولأن النسبة بين هذه المسافات محفوظة عند الوحدة ، تقسم خطوط الانسياب ومتساويات الجهد المنطقة المحتوية على المجال الى مربعات منحنية الخطوط ، وهو تعبير يدل على شكل هندسى مستوى يختلف عن مربع حقيقى فى أن له جوانب منحنية قليلا وغير متساوية قليلا وتقترب من مربع كلما صغرت أبعاده . تلك العناصر السطحية التزايدية فى نظم احداثياتنا الثلاث التى تكون مستوية يمكن أيضا أن ترسم كمربعات منحنية الخطوط .

والآن يمكننا بسرعة أن نرسم تخطيطيا فى باقى خطوط الانسياب بحفظ كل صندوق صغير مربعا ما أمكن . والرسم التخطيطى الكامل مبين فى شكل ٦ ـ ٢ .

والفرق الوحيد بين هذا المثال وانتاج تخطيط مجال باستخدام طريقة المربعات منحنية الخطوط هو أن أسطح الجهد البينية تكون غير معطاة . وخطوط الانسياب ومتساويات ـ الجهد يجب أن يرسموا على رسم تخطيطى أصلى يظهر حدود الموصل فقط . وحل واحد فقط هو الممكن ، كما سنثبت فيما بعد باستخدام نظرية الوحدانية لمعادلة « لابلاس » ، والقواعد التى أوجزناها آنفا كافية . يبدأ بخط انسياب ، ثم يرسم



شكل ٦ ـ ٣ . مثال لتخطيط المجال بالمربع منحنى الخطوط . جانب المربع يساوى ثلثى نصف قطر الدائرة . $N_V = 4$ و $N_Q = 8 \times 3.25 = 26$ ولذلك $C = \epsilon_0 N_Q / N_V = 57.6 \text{pF/m}$

بالتقريب خط متساوى ـ جهد فى الشكل ، ويضاف خط انسياب اخر ، مكونا مربعا منحنى الخطوط ، وتدريجيا يمد التخطيط خلال كل المنطقة المرغوبة . ولأن لاأحد منا يستطيع أبدا أن يتوقع أن يكون كاملا فى تحقيق هذا ، سنجد بعد قليل أننا لم نعد نستطيع عمل مربعات مع المحافظة على أركان قائمة الزوايا .

ويتراكم خطأ فى الرسم ، ومتاعبنا الحالية يجب أن تبين طبيعة التصحيح الذى يعمل على بعض العمل السابق . وعادة أنه من الأفضل أن نبدأ ثانية رسما جديدا ، مع وجود الشكل القديم كمرشد .

وانشاء تخطيط مفيد للمجال هو فن ، والعلم يوفر القواعد فقط . ويتطلب الحذق فى أى فن مرانا . ومسألة جيدة للمبتدئين هى الكابل المحورى أو المكثف المحورى ، لأن جميع متساويات ـ الجهد دوائر ، والرسم التخطيطى التالى الذى نشرع فيه يجب أن يكون لموصلين دائريين متوازيين ، حيث متساويات ـ الجهد دوائر مرة أخرى ، ولكن ذوات مراكز مختلفة . وكل من هذه معطى كمسألة عند نهاية الفصل ، ودقة الرسم التخطيطى يمكن أن تختبر بواسطة حساب السعة كما هو موجز فيما يلى :

يبين شكل ٦ ـ ٣ تخطيطا مكتملا لكابل يحتوى موصل داخلى مربع محاط بموصل دائرى . وتوجد السعة من $C = Q / V_0$ باستبدال Q بـ $N_Q \, \Delta Q = N_Q \, \Delta\Psi$ ، حيث N_Q هو عدد أنابيب التدفق التى تربط الموصلين ، وبأن ندع $V_0 = N_V \, \Delta V$ حيث N_V هو عدد تزايدات الجهد بين الموصلين ،

$$C = \frac{N_Q \, \Delta Q}{N_V \, \Delta V}$$

ثم باستخدام (٢) ،

$$C = \frac{N_Q}{N_V} \epsilon \frac{\Delta L_t}{\Delta L_n} = \epsilon \frac{N_Q}{N_V} \qquad (٣)$$

لأن $\Delta L_t / \Delta L_n = 1$. تعيين السعة من رسم تدفق يشمل فقط عد المربعات فى اتجاهين ، بين الموصلات وحول أى من الموصلين . ونحصل من شكل ٦ ـ ٣ على

$$C = \epsilon_0 \frac{8 \times 3.25}{4} = 57.6 \text{ pF/m}$$

رامو ، هوينرى ، وفان دوزر لهم مناقشة ممتازة مع أمثلة لتكوين تخطيطات المجال بالمربعات منحنية الخطوط . ويقدمون المقترحات التالية[1] :

١ ـ خطط لعمل عدد من رسوم تخطيطية تقريبية ، كل منها يأخذ حوالى دقيقة ، قبل بدء أى رسم يعمل بعناية . واستخدام ورق شفاف فوق الحدود الرئيسية يعجل بهذا الرسم التخطيطى الأولى .

٢ ـ قسم فرق الجهد المعروف بين الأقطاب الكهربية الى عدد متساو من التقسيمات ، مثلا أربعة أو ثمانية كبداية .

٣ ـ ابدأ رسم متساويات ـ الجهد التخطيطى فى المنطقة المعروف فيها المجال أكثر ما يمكن ، على سبيل المثال مثل منطقة ما حيث يقترب من مجال منتظم . مد متساويات الجهد طبقا لأحسن تخمين خلال كل الرسم . لاحظ انها يجب أن تميل الى الاحاطة بالزوايا الحادة للحدود الموصلة وتتباعد بالقرب من الزوايا المنفرجة للحدود .

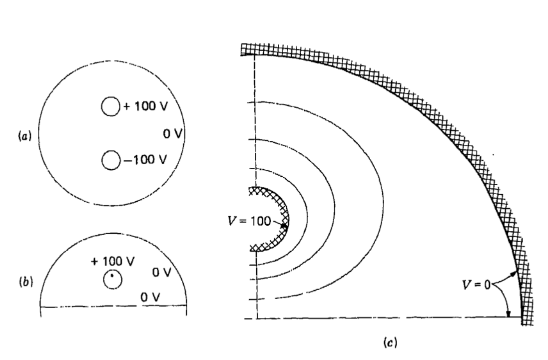
٤ ـ ارسم مجموعة خطوط المجال المتعامدة . منذ البدء فى رسمها يجب أن تكون مربعات منحنية الخطوط ، ولكن ، وهى تمد ، يجب أن يبقى شرط التعامد قائما ، حتى ولو تسبب هذا فى بعض المستطيلات بنسب غير الوحدة .

٥ ـ انظر المناطق التى لها نسب جوانب غير سليمة وحاول أن ترى ماذا كان خطأ فى التخمين الأول لمتساويات ـ الجهد . صححها وأعد الطريقة حتى توجد مربعات منحنية الخطوط معقولة خلال الرسم كله .

٦ ـ فى المناطق التى لها شدة مجال ضعيف ، سيكون هناك أشكال كبيرة ، غالبا ما تكون لها خمسة أو ستة جوانب . ولكى تحكم على صحة الرسم فى هذه المنطقة ، يجب أن تقسم هذه الوحدات الكبيرة الى اقسام صغيرة . والتقسيمات الصغيرة يجب العودة لبدئها ، وكل مرة تقسم انبوبة تدفق الى نصفين ، ويجب أن تقسم أقسام الجهد فى هذه المنطقة بنفس العامل .

---

(١) بتصريح من S. Ramo, J.R. Whinnery, amd T.Van Duzer, "Fields and Waves in Communication Electronics", Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1965, PP. 160 - 161.



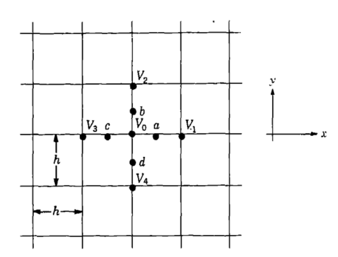
شكل ٦ ـ ٤ انظر مسألة ت٦ ـ ١

ت ٦ ـ ١ : يبين شكل ٦ ـ ٤أ المقطع العرضى لخط نقل ذى سلكين مدرع . دع الدرع الخارجية تكون عند 0V والموصل العلوى عند 100 V والسفلى 100 V — . بالتماثل ، المستوى المركزى الأفقى أيضا عند 0 V ، وتبسط المسألة لتلك التى فى شكل ٦ ـ ٤ب . ومرة أخرى نستخدم التماثل لتحديد موضع خطى تدفق رأسيين فى مركز الشكل . ولذلك يبين شكل ٦ ـ ٩جـ ربع خط النقل المعطى . ومبين متساويات الجهد 25V , 50V و 75V . نصف القطر الداخلى للموصل الخارجى هو 8mm فى الخط الفعلى . جهز تخطيط مربع ـ منحنى الخطوط على شكل ٦ ـ ٤جـ واستخدمه لايجاد قيم مناسبة لـ: (أ) السعة لكل متر طول للخط فى شكل ٦ ـ ٤أ إذا كان $\epsilon_R = 2.4$ ؛ (ب) E عند السطح الداخلى للدرع عند أعلى نقطة ؛ (جـ) كثافة الشحنة السطحية عند أسفل الموصل ذو الـ 100 V .

الاجابة : 45pF/m ; 20kV/m ; $1.4\mu C/m^2$.

٦ ـ ٢ طريقة التكرار

فى مسائل الجهد حيث يحدد الجهد كلية على حدود منطقة معطاة ، خاصة المسائل التى فيها لايتغير الجهد فى اتجاه واحد ، أى أن توزيعات الجهد ذات بعدين ، توجد هناك طريقة تكرارية تستخدم قلما وورقة ، قادرة على إعطاء أى دقة مرغوبة .



شكل ٦ ـ ٥ جزء من منطقة تحتوى على مجال جهد ذى بعدين ، مقسمة الى مربعات ضلعها h . والجهد V_0 يساوى تقريبا متوسط الجهود عند النقط الأربع المجاورة .

ويجب أن تستخدم الحاسبات الرقمية عندما تطلب قيمة الجهد بدقة عالية ، وإلا ، فإن الزمن المطلوب يكون مانعا فيما عدا أبسط المسائل . وطريقة التكرار ، التى ستوصف فيما يلى ، تناسب جيدا الحساب بأى حاسبة رقمية .

دعنا نفرض مسألة ذات بعدين لايتغير فيها الجهد مع الاحداثى z ونقسم داخل المقطع العرضى للمنطقة حيث يرغب الجهد الى مربعات طول جانبها h . وجزء من هذه المنطقة مبينة فى شكل ٦ ـ ٥ . والقيم المجهولة للجهد عند خمس نقط متجاورة يرمز لها بـ V_0 , V_1 , V_2 , V_3 و V_4 . اذا كانت المنطقة خالية ـ الشحنة وتحتوى على عازل متجانس ، فإن $\nabla . D = 0$ و $\nabla . E = 0$ ومنها ، فى بعدين ، نحصل على .

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

ولكن عملية التدرج تعطى $E_x = -\partial V/\partial x$ و $E_y = -\partial/\partial y$ ، ومنها نحصل على[1]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ويمكن الحصول على قيم تقريبية لهذه المشتقات الجزئية بدلالة الجهود المفروضة لأن

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

(١) هذه هى معادلة لابلاس فى بعدين . وستستنتج صيغة الأبعاد ـ الثلاثة فى الفصل القادم .

و

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ومنها

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

وبالمثل

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$

وبالضم نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

أو

$$V_0 \doteq \tfrac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \qquad (٤)$$

ويصبح التعبير مضبوطا كلما تقترب h من الصفر ، وسنكتبه بدون علامة التقريب . وهو صحيح بديهيا ، يخبرنا أن الجهد هو متوسط الجهد عند النقاط الأربع المجاورة . وطريقة التكرار تستخدم (٤) فحسب لتعيين الجهد عند ركن كل مربع تقسيم جزئى بالدور ، ثم تكرر العملية على كل المنطقة عدة مرات حسبا يلزم الى أن لا تتغير القيم بعد . وأحسن توضيح للطريقة بالتفصيل يكون بمثال .

للتبسيط ، اعتبر منطقة مربعة لها حدود موصلة (شكل ٦ ـ ٦) . جهد الحد العلوى هو 100V وذلك للجوانب والقاعدة هو صفر . والمسألة ذات بعدين ، والرسم التخطيطى مقطع عرضى للتشكيل الفزيائى . والمنطقة مقسمة أولا الى ١٦ مربعا ، ويجب الآن عمل تقدير ما للجهد عند كل ركن قبل تطبيق طريقة التكرار .

$V = 100$

	43.8	53.2	43.8
	18.8	25.0	18.8
	6.2	9.4	6.2

ثغرة متناهية الصغر — ثغرة متناهية الصغر — $V = 0$ — $V = 0$ — $V = 0$

شكل ٦ ـ ٦ مقطع عرضى لحوض مربع جوانبه وقاعه عند جهد صفرى والحد العلوى عند 100V . وقد قسم المقطع الى ١٦ مربعا ، مع جهد مقدر عند كل ركن . ويمكن تعيين قيم اكثر دقة باستخدام طريقة التكرار .

وكلما كان التقدير أحسن ، قصر الحل ، مع أن النتيجة النهائية لاتعتمد على هذه التقديرات الابتدائية . وعندما يستخدم الحاسب للتكرار ، عادة توضع الجهود الابتدائية تساوى صفرا لتبسيط البرنامج . ويمكن الحصول على قيم معقولة الدقة من تخطيط تقريبى لمربعات منحنية الخطوط ، أو يمكننا تطبيق (٤) على المربعات الكبيرة . وعلى ذلك يكون تقدير الجهد عند مركز الشكل $1/4\ (100 + 0 + 0 + 0) = 25.0$.

والان يمكن تقدير الجهد عند مراكز المربعات الأربعة ذات الأطوال المضاعفة بأخذ متوسط الجهود عند الأركان الأربعة بتطبيق (٤) على مجموعة محاور قطرية . واستخدام هذا « المتوسط القطرى » يُعمل فقط فى تحضير تقديرات ابتدائية . وللمربعين العلويين المضاعفين ، نختار جهدا يساوى 50V للثغرة (متوسط 100,0) ، وعندئذ : $V = 1/4\ (50 + 100 + 25 + 0) = 43.8$ (لأقرب عشر للفولت[1]) ، وللسفليات ،

$$V = \tfrac{1}{4}(0 + 25 + 0 + 0) = 6.2$$

والجهد عند النقط الأربع الباقية يمكن أن نحصل عليه الان بتطبيق (٤) مباشرة . والمجموعة الكاملة للقيم المقدرة مبينة فى شكل ٦ ـ ٦ .

(١) عندما نقرب جزءا عشريا منتهيا بخمسة بالضبط ، يجب أن يعمل الرقم السابق زوجيا ، فمثلا ، 42.75 تصبح 42.8 و 6.25 تصبح 6.2 . وعامة يضمن ذلك طريقة عشوائية تؤدى الى دقة أفضل مما قد يحصل عليها بزيادة الرقم السابق دائما بواحد .

$V = 100$

$V = 0$ (يسار) — $V = 0$ (يمين) — $V = 0$ (أسفل)

	43.0 42.6 42.8 42.8	52.8 52.5 52.6 52.6	43.0 42.6 42.8 42.8
	18.6 18.6 18.7 18.7	24.8 24.8 25.0 25.0	18.6 18.6 18.7 18.7
	7.0 7.1 7.1 7.1	9.7 9.8 9.8 9.8	7.0 7.1 7.1 7.1

شكل ٦ ـ ٧ نتائج كل من الخطوات الأربع الضرورية لمسألة شكل ٦ ـ ٦ مبينة بالترتيب فى الأعمدة . القيم النهائية ، لم تتغير فى الخطوة الأخيرة ، عند أسفل كل عمود .

والخطوة الأولى تعمل الان للحصول على مجموعة مصححة للجهود ، ابتداء بالركن العلوى ليسار (بالقيمة *43.8* ، وليس بالحد حيث الجهد معروف وثابت) ، وبالعمل عبر الصف الى اليمين ، ثم النزول الى أسفل الى الصف الثانى والتقدم من اليسار الى اليمين مرة أخرى . وعلى ذلك فالقيمة *43.8* تتغير الى :

$1/4\ (100 + 53.2 + 18.8 + 0) = 430$ ودائما تستخدم الجهود الأحسن ، أو الاحدث عند تطبيق (٤) ، ولذلك نجد كلا النقطتين المعلمتين *43.8* تغيرت الى *43.0* ، بسبب التماثل الواضح ، والقيمة *53.2* تصبح :

$1/4\ (100 + 43.0 + 25.0 + 43.0) = 52.8$.

وبسبب التماثل ، فان قليلا قد يكتسب بالاستمرار عبر الخط العلوى . كل نقطة على هذا الخط قد تحسنت الان مرة واحدة . والنزول الى أسفل الى الخط التالى ، فان القيمة *18.8* تصبح

$$\tfrac{1}{4}(43.0 + 25.0 + 6.2 + 0) = 18.6\ .$$

ويستمر الخطو على هذا النحو . والقيم عند نهاية هذه الخطوة مبينة بالعدد العلوى فى كل عمود فى شكل ٦ ـ ٧ .

$V = 100$

ثغرة

خط تماثل

$V = 0$

	48.2 48.2	66.2 66 2 66.0 66.0 66.0 66.0 66.0 66.0 66.1 66.1	73.8 73.0 72.8 72.9 73.0 73.0	75.0 74.6 74.7 74.8 74.8 74.9 74.9	73 8 73.0 72.8 72.9 73 0 73.0
	26.6 26.6 26 8 26.9 26.9	42.8 42.9 43.0 43.0 43.0 43.0 43.0 43.1 43.1	51.0 50.8 50.9 51.0 51 1 51.1 51.2 51.2	52.6 53.2 53.4 53.4 53.5 53.6 53.6	51.0 50.8 50.9 51.0 51.1 51.1 51.2 51.2
	15.4 16.2 16.4 16.4	27.9 28.2 28.2	34.8 34.8 34.9 34.9 34 9 35.0 35.0	36 8 37.0 37.0 37.0 37.1 37.2 37.2	34.8 34.8 34 9 34.9 34 9 35.0 35.0
	10.1 10.4 10.3 10.3	18.7 18.4 18.4	23.4 23.4	25 0 25.0	23.4 23.4
	6.4 6.5 6.5	11.8 11.8	15.2 15.2 15.1 15.1	16.3 16.3 16.2 16.2	15.2 15.2 15.1 15.1
	3.8 3.8	7.1 7.0 7.0	9.1 9.0 9.0	9.8 9.7 9.7	9.1 9.0 9.0
	1.8 1.8	3.3 3.2 3.2	4.2 4.2	4.6 4.5 4.5	4.2 4.2

$V = 0$

شكل ٦ ـ ٨ مسألة شكلى ٦ ـ ٦ ، و ٦ ـ ٧ مقسمة الى مربعات أصغر . والقيم المتحصل عليها فى الخطوات التسع المتابعة مدرجة بالترتيب فى الأعمدة .

يجب الان عمل خطوات اضافية حتى تبدى القيمة عند كل ركن عدم تغير . وعادة تدخل قيم الخطوات المتتابعة تحت بعضها فى صورة عمود ، كما هو مبين بشكل ٦ ـ ٧ ، والقيمة النهائية مبينة عند أسفل كل عمود . وأربع خطوات فقط متطلبة فى هذا المثال .

اذا كانت كل القيم التسع الابتدائية وضعت تساوى صفرا ، فمن المهم أن نلاحظ أن عشر خطوات كانت مطلوبة . وتكاليف جعل حاسب يعمل هذه الخطوات الأضافية ربما تكون أقل بكثير من تكاليف البرمجة الضرورية لعمل تقديرات ابتدائية مناسبة .

ولأن هناك فرقا كبيرا فى الجهد من مربع إلى مربع ، لايجب أن نتوقع أن تكون اجاباتنا دقيقة الى العشر من الفولت المبين (وربما ليست الى اقرب فولت) . وتأتى الدقة الأعلى من تقسيم كل مربع الى أربعة مربعات أصغر ، وليس من ايجاد الجهد لعدد أكبر من الأرقام المعنوية عند كل ركن .

فى شكل ٦ ـ ٨ ، الذى يظهر فقط أحد الأنصاف المتماثلة علاوة على عمود اضافى ، انجزت هذه التقسيمات الجزئية ، والجهد عند الأركان الجديدة الانشاء مقدر بتطبيق (٤) مباشرة حيث يمكن ذلك وقطريا عند الضرورة . ومجموعة القيم المقدرة تظهر عند أعلى كل عمود ، والقيم المنتجة بالخطوات المتتابعة تظهر بالترتيب الى.أسفل . وهنا يتطلب تسع مجموعات من القيم ، ويجب أن يلاحظ أنه لاتغيير فى القيم فى الخطوة الأخيرة (شروط ضرورى للخطوة الأخيرة) ، وان قيمة واحدة فقط تتغير فى كل من الخطوات الثلاث السابقة . ولاتتغير أى قيمة فى الصفوف الأربعة الأخيرة بعد الخطوة الثانية ، وهذا ينتج وفرا عظيما فى الوقت ، لأنه اذا لم يتغير أى من الجهود الأربعة فى (٤) ، فان الاجابة طبعا لاتتغير .

ولهذه المسألة ، من الممكن أن نقارن قيمنا النهائية مع الجهود المضبوطة ، المتحصل عليها بتقدير قيم بعض المتسلسلات اللانهائية ، كما هو مناقش عند نهاية الفصل التالى . عند النقطة التى كان لها التقدير الأصلى *53.2* ، القيمة النهائية للشبكة الواسعة كانت *52.6* ، القيمة النهائية للشبكة الأدق كانت *53.6* ، والقيمة النهائية لشبكة *16* × *16* هى *53.93* V لرقمين عشريين ، باستخدام البيانات المتحصل عليها ببرنامج فورتران Fortran التالى :

```
DIMENSION A(17, 17) ,B(17, 17)
DO 6 I=2,17
DO 5 J=1,17
A(I,J)=0.
5 CONTINUE
6 CONTINUE
DO 9 J=2,16
A(1,J)=100.
9 CONTINUE
A(1,1)=50.
```

```
11  A(1,17)=50.
12  DO 16 I=2,16
13  DO 15 J=2,16
14  A(I, J)=(A(I,J-1)+A(I-1,J)+A(I,J+1)+A(I+1,J))/4.
15  CONTINUE
16  CONTINUE
17  DO 23 I=2,16
18  DO 22 J=2,16
19  C=(A(I,J-1)+A(I-1,J)+A(I,J+1)+A(I+1,J))/4.
20  B(I,J)=A(I,J)-C
21  IF((ABS(B(I,J))-.00001).GT.0.) GO TO 12
22  CONTINUE
23  CONTINUE
24  WRITE(6,25)((A(I,J),J=1,17),I=1,17)
25  FORMAT (1HO,17F7.2)
26  STOP
27  END
```

ويبين خط *21* أن التكرار يستمر حتى يكون الفرق بين خطوتين متتاليتين أقل من 10^{-5} .

والجهد المضبوط المتحصل عليه بمفكوك فورير هو *54,05V* لرقمين عشريين . نقطتان أخريان مقارنتان أيضا فى صورة جدولية ، كما هو مبين فى جدول ٦ ـ ١ .

جدول ٦ ـ ١

تقدير أصلى	53.2	25.0	9.4
شبكة 4 × 4	52.6	25.0	9.8
شبكة 8 × 8	53.6	25.0	9.7
شبكة 16 × 16	53.93	25.00	9.56
مضبوط	54.05	25.00	9.54

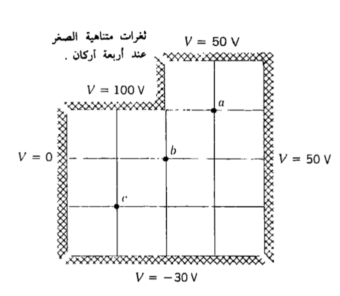
ومخططات انسياب الحاسب وبرامج الحلول التكرارية معطاة فى الفصل الرابع والعشرين من Boast[١] والفصل الثانى والملحق من Silvester[٢] .

وتحسين طريقة التكرار معروف بطريقة الاسترخاء . وعامة تتطلب عملا أقل ، ولكن عناية أكثر فى إجراء خطواتنا الحسابية[٣] .

١ ـ انظر ألمراجع المقترحة عند نهاية الفصل الثانى

٢ ـ انظر المراجع المقترحة عند نهاية هذا الفصل .

٣ ـ وصف مفصل يظهر فى Scarborough ، والطريقة الأساسية ومثال موجود فى Hayt . انظر بيانات المراجع عند نهاية الفصل .



شكل ٦ ـ ٩ : انظر مسألة ت ٦ ـ ٢

ت ـ ٦ ـ ٢ فى شكل ٦ ـ ٩ ، شبكة مربعة مبينة داخل حوض جهد غير منتظم . باستخدام طريقة التكرار لايجاد الجهد لأقرب فولت ، عين القيمة النهائية عند : (أ) نقطة a (ب) نقطة b ، (جـ) نقطة c .

الاجابة : 61V , 48V , 4V .

٦ ـ ٣ تناظرات بالتيار :

تعتمد عدة طرق تجريبية على تناظر بين كثافة التيار فى وسط موصل وكثافة التدفق الكهربى فى وسط عازل . والتناظر موضح بسهولة ، لأنه فى وسط موصل ، لتيارات مستمرة فقط ، قانون أوم وعلاقة التدرج هما ،

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_\sigma$$

$$\mathbf{E}_\sigma = -\nabla V_\sigma$$

بينما فى عازل متجانس

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}_\epsilon$$

$$\mathbf{E}_\epsilon = -\nabla V_\epsilon$$

وتخدم الرموز السفلية تمييز المسائل المتناظرة . ومن الواضح أن الجهود V_σ و V_ϵ ، وشدة المجال الكهربى $\mathbf{E}_\sigma$ و $\mathbf{E}_\epsilon$ ، والموصلية والسماحية σ و ϵ ، وكثافة التيار وكثافة التدفق الكهربى J و D متناظرة ازواجا .

بالرجوع الى التخطيط بالمربع ـ منحنى الخطوط ، يمكننا تفسير أنابيب التدفق كأنابيب تيار ، وكل انبوبة تحمل الان عنصر تيار لايستطيع ترك الانبوبة .

أخيرا ، يجب أن ننظر الى الحدود . ما هو المناظر لحدود موصلة التى تنهى تدفقا كهربيا عموديا ، وتكون سطحا متساوى ـ الجهد ؟ . والتناظر يقدم الاجابة ، ونرى أن السطح يجب أن ينهى كثافة التيار عموديا ويكون مرة أخرى سطحا متساوى ـ الجهد هذا هو سطح موصل تام ، مع انه فى الممارسة العملية من الضرورى فقط أن نستخدم واحدا تكون موصليته عدة مرات تلك التى للوسط الموصل .

ولذلك ، اذا رغبنا فى أن نوجد المجال فى مكثف محورى ، الذى ـ كما قد رأينا عدة مرات من قبل ـ هو جزء من مجال خط شحنة لانهائى ، فيمكننا أن نأخذ اسطوانتين نحاسيتين ونملأ المنطقة بينهما ، للتيسير ، بمحلول الكتروليتى . بوضع فرق جهد بين الاسطوانتين ، يمكننا أن نستخدم مجسا لايجاد الجهد عند اى نقطة بينية ، أو لايجاد كل تلك النقط ذات نفس الجهد . وهذا هو جوهر الحوض أو الخزان الالكتروليتى . والميزة العظمى لهذه الطريقة تقع فى الحقيقة أنها ليست مقصورة على مسائل ذات البعدين . واقتراحات عملية لانشاء واستخدام الحوض معطاة فى أماكن عديدة[1] .

وتعيين السعة من قياسات الحوض الالكتروليتى سهلة جدا . التيار الكلى التارك للموصل الموجب أكثر هو

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}$$

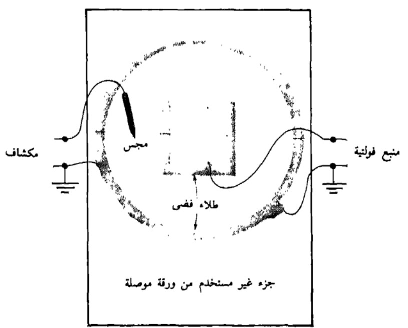
حيث التكامل السطحى المغلق مأخوذ على كل سطح الموصل . وفرق الجهد يعطى بسالب التكامل الخطى من اللوح الأقل الى الأكثر موجبية ،

$$V_{\sigma 0} = -\int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}$$

ولذلك فالمقاومة الكلية هى

$$R = \frac{V_{\sigma 0}}{I} = \frac{-\int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}}$$

(١) مرجع Weber حسن . انظر بيانات المراجع عند نهاية الفصل .



شكل ٦ ـ ١٠   مسألة موصلين فى بعدين ، مماثلة لتلك التى فى شكل ٦ ـ ٣ مرسومة على ورقة موصلة . ويمكن أن يستخدم المجس لتتبع مكان سطح متساوى ـ الجهد .

والسعة تعطى بنسبة الشحنة الكلية الى فرق الجهد ، ..

$$C = \frac{Q}{V_{\epsilon 0}} = \frac{\epsilon \oint_S \mathbf{E}_\epsilon \cdot d\mathbf{S}}{-\int \mathbf{E}_\epsilon \cdot d\mathbf{L}}$$

والان نطبق التناظر بأن ندع $V_{\epsilon 0} = V_{\sigma 0}$ و $\mathbf{E}_\epsilon = \mathbf{E}_\sigma$. النتيجة هى

$$\boxed{RC = \frac{\epsilon}{\sigma}} \quad (٥)$$

وبمعرفة موصلية المحلول الالكتروليتى وسماحية العازل ، يمكننا تعيين السعة بقياس بسيط للمقاومة .

وطريقة تقنية أسهل متاحة للمسائل ذات البعدين . وتستخدم ورقة موصلة كقاعدة يرسم عليها الحدود الموصلة بطلاء فضة . فى حالة المكثف المحورى ، يجب أن نرسم دائرتين نصف قطريهما ρ_A و ρ_B ، $\rho_B > \rho_A$ ، بمد طلاء مسافة قصيرة للخارج من ρ_B والى الداخل من ρ_A ليوفر مساحة كافية لتصنع اتصالا جيدا مع أسلاك الى منبع جهد خارجى . ومرة أخرى يستخدم مجس لايجاد قيم الجهد بين الدوائر .

يظهر شكل ٦ ـ ١٠ حدود طلاء الفضة التى قد ترسم على ورقة موصلة لتعيين سعة خط نقل مربع . داخل دائرة مثل ذلك المبين فى شكل ٦ ـ ٣ . المولد والمكشاف

يعملان فى أكثر الأحيان عند $1,000$Hz للسماح باستخدام مكشاف موالف أو قنطرة أكثر حساسية .

ت ٦ ـ ٣الورق الموصل المستخدم فى شكل ٦ ـ ١٠ يعطى مقاومة مقدارها $2,500\Omega$ بين جوانب متقابلة لمربع ضلعه 1m . ما المقاومة التى سوف تقاس بين جوانب متقابلة لـ : (أ) مربع ضلعه 10 cm ، (ب) مستطيل 5×15 cm ، للجوانب التى على بعد 15cm ؟ (جـ) مستطيل 5×15 cm ، للجوانب التى على بعد 5cm ؟ (د) اذا رسم الشكل الهندسى المبين فى شكل ٦ ـ ١٠ على هذه الورقة ، فما المقاومة التى سوف تقاس بين الدائرة والمربع اذا كان الكبل مملوءا بالهواء وله سعة 40pF/m ؟

الاجابة : $2,500\Omega$, $7,500\Omega$, 833Ω , 553Ω .

٦ ـ ٤ نماذج مادية :

التناظر بين المجال الكهربى ومجال الجاذبية قد ذكر عدة مرات من قبل ويمكن أن يستخدم لانشاء نماذج مادية قادرة أن تعطى حلولا لمسائل كهروستاتيكية ذات هندسة معقدة . وأساس التناظر هو ببساطة : فى المجال الكهروستاتيكى فرق الجهد بين نقطتين هو الفرق فى طاقة الجهد لوحدة شحنات موجبة عند هاتين النقطتين ، وفى مجال جاذبية منتظم الفرق فى طاقة الجهد لكتل نقطية عند نقطتين يتناسب مع فرق ارتفاعها . وبتعبير اخر ،

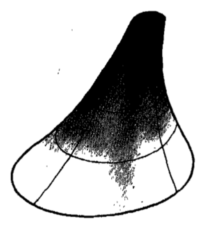
$$\Delta W_E = Q\ \Delta V \quad (\text{كهروستاتيكى})$$
$$\Delta W_G = M_g\ \Delta h \quad (\text{تجاذبى})$$

حيث M هى الكتلة النقطية و g هى العجلة بسبب الجاذبية ، ثابتة أساساً عند سطح الأرض . ولذلك ، نفس فرق الطاقة ،

$$\Delta V = \frac{Mg}{Q}\,\Delta h = k\ \Delta h$$

حيث k هو ثابت التناسب . وهذا يبين التناظر المباشر بين فرق فى الجهد وفرق فى الارتفاع .

ويسمح لنا هذا التناظر أن ننشىء نموذجا ماديا ـ لمجال جهد ـ ذا بعدين معروف بصنع سطح ، ربما من الخشب ، الذى ارتفاعه h فوق أى نقطة $(x\ ,\ y)$ واقعة فى مستوى الارتفاع ـ الصفرى الجهد ـ الصفرى يتناسب مع الجهد عند تلك النقطة . لاحظ أن مجالات ذات الأبعاد الثلاثة لايمكن التعامل معها .



شكل ٦ ـ ١١ نموذج لمجال الجهد لخط شحنة لانهائى . الفرق فى الجهد يتناسب مع الفرق فى الارتفاع . وتبين خطوط المناسيب تزايدات جهد متساوية .

والمجال لخط شحنة لانهائى ،

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_B}{\rho}$$

مبين على مثل هذا النموذج فى شكل ٦ ـ ١١ ، الذى يعطى صورة دقيقة لتغير الجهد مع نصفى القطر بين ρ_A و ρ_B . الجهد والارتفاع عند ρ_B مأخوذان يساويان صفرا للتيسير .

مثل هذا النموذج يمكن أن ينشأ لأى مجال جهد ذى بعدين ويمكننا من أن نتصور المجال أحسن قليلا . وانشاء النماذج نفسها يبسط بقدر كبير ، ماديا ونظريا ، باستخدام الواح مطاط . ويوضع اللوح تحت شد متوسط ويقرب الى حد بعيد الغشاء المرن فى الميكانيكا التطبيقية . يمكن ايضاح[1] أن الازاحة الرأسية للغشاء تحقق معادلة التفاضل الجزئى من الرتبة الثانية .

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

اذا كان ميل السطح صغيرا .

سنرى فى الفصل التالى ان كل مجال جهد فى منطقة خالية ـ الشحنة يحقق أيضا هذه المعادلة ، معادلة لابلاس فى بعدين ،

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

سنثبت أيضا نظرية الوحدانية التى تضمن لنا أنه اذا حقق حل جهد فى منطقة ما محددة المعادلة الانفة ويعطى أيضا الجهد الصحيح على حدود هذه المنطقة ، فان

(١) انظر ، مثلا ، Spangenbery, pp. 75-76 فى بيانات المراجع عند نهاية هذا الفصل .

هذا الحل هو الحل الوحيد . وعلى ذلك فاننا نريد فقط ارغام ارتفاع اللوح لتناظر قيم جهد محددة على الحدود ، والارتفاع عند كل النقط الأخرى يتناسب مع الجهد .

فمثلا ، مجال خط الشحنة اللانهائى يمكن أن يُعرض بالتعرف على التماثل الدائرى وتثبيت اللوح المطاط عند ارتفاع الصفر حول دائرة باستخدام حلقة تثبيت كبيرة نصف قطرها ρ_B. ولأن الجهد ثابت عند ρ_A ، نرفع ذلك الجزء من اللوح الى ارتفاع أعلى بدفع اسطوانة نصف قطرها ρ_A الى أعلى ضد اللوح المطاط . وينهار التناظر عند الميول السطحية العالية ، وممكن فقط ازاحة طفيفة عند ρ_A . ويمثل السطح عندئذ مجال الجهد ، ويمكن ان يستخدم بلى لتعيين مسارات جسيم ، وفى هذه الحالة واضح انها خطوط نصف قطرية كما ترى من أعلى .

هناك أيضا تناظر بين الكهروستاتيكية والهيدروليكا وهو مفيد خاصة فى الحصول على صورة فوتوغرافية لخطوط الانسياب أو خطوط التدفق . وهذه العملية مشروحة كاملة بواسطة Moor فى عدد من المنشورات[1] التى تحتوى على عديد من الصور الفوتوغرافية الممتازة .

ت ٦ - ٤ نموذج من الجص منشأ بحيث يكون ارتفاعه (بالبوصات) معطى : (بـ $h = 2|x^2 - y^2|$ ، حيث x و y مقاسان على الأفقى (بالقدم) . والمنطقة التى عمل لها النموذج هى المنطقة المثلثية التى لها $x \leq 2$, $x \geq y$ و $y \geq -x$. (أ) ما هو أقصى ارتفاع للنموذج ؟ (ب) ماهى اقصى ميل للنموذج ؟ (جـ) ماهى الزاوية التى يعملها العمود على سطح النموذج مع الرأسى عند $(1.5,0.5)$ ؟

الاجابة : 8in , 0.943 , $27.8°$.

مراجع مقترحة :

1 Hayt, W. H., Jr.: "Engineering Electromagnetics," 1st ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1958, pp. 150–152.

2 Moore, A. D.: Fields from Fluid Flow Mappers, *J. Appl. Phys.*, vol. 20, pp. 790–804, August 1949; Soap Film and Sandbed Mapper Techniques, *J. Appl. Mech.* (bound with *Trans. ASME*), vol. 17, pp. 291–298, September 1950; Four Electromagnetic Propositions, with Fluid Mapper Verifications, *Elec. Eng.*, vol. 69, pp. 607–610, July 1950; The Further Development of Fluid Mappers, *Trans. AIEE*, vol. 69, part II, pp. 1615–1624, 1950; Mapping Techniques Applied to Fluid Mapper Patterns, *Trans. AIEE*, vol. 71, part I, pp. 1–5, 1952.

3 Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer: "Fields and Waves in Communications Electronics," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

(١) انظر بيانات المراجع عند نهاية هذا الفصل .

هذا الكتاب هو أساسا الطبعة الثالثة لكتب المؤلف الأول الشائعة المطبوعة فى 1944 و 1953 . مع أنه موجه أساسا للطلبة البادئين فى الدراسات العليا ، ويمكن أن يقرأ باستفادة بأى شخص عليم بمفاهيم الكهرومغناطيسية الأساسية . والتخطيطات المنحنية الخطوط مناقشة على الصفحات ١٥٩ - ١٦٣ .

4 Salvadori, M. G., and M. L. Baron: "Numerical Methods in Engineering," 2d ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.

طرق التكرار والاسترخاء مناقشة فى الفصل الأول

5 Scarborough, J. B.: "Numerical Mathematical Analysis," 6th ed., The John Hopkins Press, Baltimore, 1966.

يصف طرق التكرار والاسترخاء ويعطى أمثلة كاملة عديدة . الأخطاء المتأصلة مناقشة .

6 Silvester, P.: "Modern Electromagnetic Fields," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

7 Soroka, W. W.: "Analog Methods in Computation and Simulation," McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

8 Spangenberg, K. R.: "Vacuum Tubes," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.

طرق التخطيط التجريبية مناقشة على الصفحات ٧٥ - ٨٢ .

9 Weber, E.: "Electromagnetic Fields," vol. I, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950. Experimental mapping methods are discussed in chap. 5.

طرق التخطيط التجريبية مناقشة فى الفصل الخامس

مسائل :

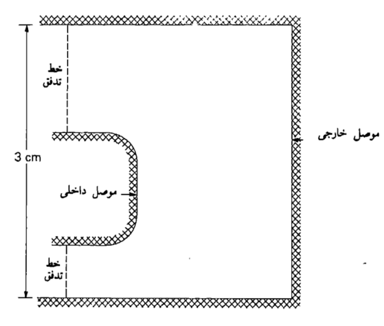
١ - ارسم خريطة مربعات - منحنية الخطوط لمكثف محورى نصف قطره الداخلى 3 cm ونصف قطره الخارجى 9 cm . وهذه الأبعاد مناسبة للرسم . كاختيار للدقة ، احسب السعة لكل متر من كل من رسمك التخطيطى والصيغة المضبوطة اذا كانت $\epsilon_R = 1$.

٢ - ارسم خريطة مربعات - منحنية الخطوط لمجال الجهد حول اسطوانتين دائرتين متوازيتين فى الهواء ، كلا منهما نصف قطره 2.5cm ، منفصلتين بمسافة من المركز

إلى المركز قدرها 15cm . هذه الأبعاد مناسبة للرسم التخطيطى الفعلى اذا اعتبر التماثل . وكتحقيق ، احسب السعة لكل متر من كل من رسمك التخطيطى ومن الصيغة المضبوطة .

٣ - ارسم خريطة مربعات - منحنية الخطوط لمجال الجهد بين اسطوانتين دائرتين متوازيتين ، واحدة نصف قطرها 4cm داخل أخرى نصف قطرها 10cm . والمحوران مزاحان بمسافة 3cm . وهذه الأبعاد مناسبة للرسم . وكاختبار للدقة ، احسب السعة لكل متر من الرسم التخطيطى ومن التعبير المضبوط

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}} \left(\frac{a^2 + b^2 - D^2}{2ab} \right) \quad \text{F/m}$$



شكل ٦ - ١٢ : انظر مسألة ٤ .

حيث a و b هما نصف قطرى الموصلين و D هى المسافة بين المحورين .

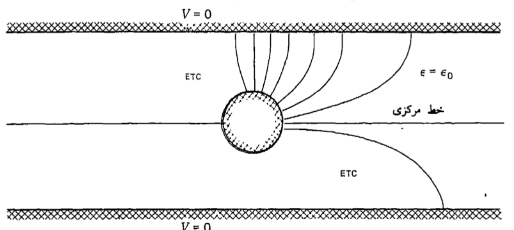
٤ - نصف خط نقل مدرع خاص جدا مبين بمقطع عرضى فى شكل ٦ - ١٢ . دع $\epsilon_R =$ 2.2 . عين قيما معقولة الدقة لـ (أ) السعة لكل متر طول ، (ب) اقصى شدة مجال كهربى موجودة عند أى نقطة اذا كانت الفولتية بين الموصلين هى 1,000V .

٥ - انشىء رسما تخطيطيا لمقطع خط محورى فيه الموصل المركزى شريط مستوى سمكه صفر وعرضه 1cm ، مركز فى موصل اسطوانى خارجى قطره 4cm . وفى رسمك التخطيطى ، مثل 1cm بـ 1 in لتحصل على مقياس مناسب . اعمل خريطة مربعات - منحنية الخطوط وقدر قيمة السعة لكل متر طول ، اذا كان للعازل $\epsilon_R = 1.2$.

٦ ـ عدة أنابيب تدفق مبينة على الرسم التخطيطى للمجال لشكل ٦ ـ ١٣ . اذا كانت كل انبوبة ، ذات طول 1 m الى داخل الورقة ، تحمل 1nC ، اكمل خريطة المربعات منحنية ـ الخطوط وقدر قيمة فولتية الموصل المركزى ، والسعة بينه وبين المستويات الأرضية المشتركة $(V = 0)$.

٧ ـ السطح متساوى ـ الجهد الأوسط مبين على الخط الهوائى الشريطى الدقيق الموضح فى شكل ٦ ـ ١٤ . اكمل خريطة المجال وقدر قيمة سعة 1ft من الخط .

٨ ـ استخدم التكرار على الحوض المربع المبين فى شكل ٦ ـ ٦ بتقسيمة الى 6×6 شبكة مربعة . اعمل الى 0.1V . ارسم قيم الجهد المحصول عليها على طول خط الوسط الرأسى كدالة للمسافة من أسفل نقطة . أيضا ضع القيم المحصول عليها للشبكة 4×4 على رسمك التخطيطى . ماحال الانطباق ؟



شكل ٦ ـ ١٣ انظر مسألة ٦ .

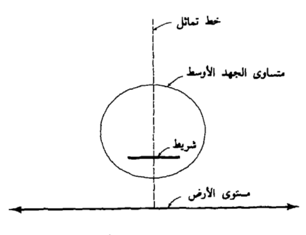
٩ ـ الحوض المربع المبين فى شكل ٦ ـ ١٥ له قيم الجهد التالية على الحوائط :
$V_1 = 100$V ، $V_2 = 50$V ، $V_3 = -70$V و $V_4 = 0$V . قسم الداخل الى شبكة 4×4 واستخدم طرق التكرار لايجاد الجهد عند كل نقط الشبكة . (أ) احسب لأقرب فولت . (ب) احسب لأقرب 0.1V .

١٠ ـ الحوض المربع المبين فى شكل ٦ ـ ١٥ ضلعه 10cm . له قيم الجهد المعروفة التالية على الحوائط الأربعة $V_1 = -300$V ، $V_2 = 100$V و $V_3 = 400$V و $V_4 = -100$V استخدم طرق التكرار لتقدر قيمة الجهد عند نقطة داخلية على بعد 2cm من الحائط الأيمن و 4cm من الحائط الأسفل .

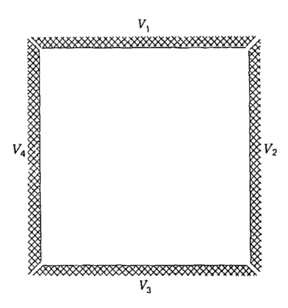
١١ ـ استخدم طريقة التكرار على الشبكة المبينة فى شكل ٦ ـ ١٦ لتقدير قيمة الجهد عند نقطة x . اهمل أجزاء الفولت .

١٢ ـ استخدام التكرار على الحوض المثلثى المبين فى شكل ٦ ـ ١٧ لتقدير قيمة الجهد التقريبى عند P ، الواقعة على بعد 1cm من الحائط الايمن و 3cm من الأسفل .

١٣ ـ فى الحوض المربع المبين فى شكل ٦ ـ ١٥ ، $V_2 = V_3 = V_4 = 0$ ، بينما يتغير V_1 جيبيا من 0 عند كلا الجانبين الى 400V عند الوسط . قدر قيمة الجهد عند مركز الحوض مستخدما : (أ) شبكة 4×4 وحاسبا لأقرب فولت .
(ب) شبكة 4×4 ، وحاسبا لأقرب 0.1V ، (جـ) شبكة 8×8 ، وحاسبا لأقرب 1V ، (د) شبكة 16×16 وحاسبا لأقرب 0.01V . (اقتراح : غير الأسطر 7 الى 11 للبرنامج المعطى فى قسم ٦ ـ ٢) .

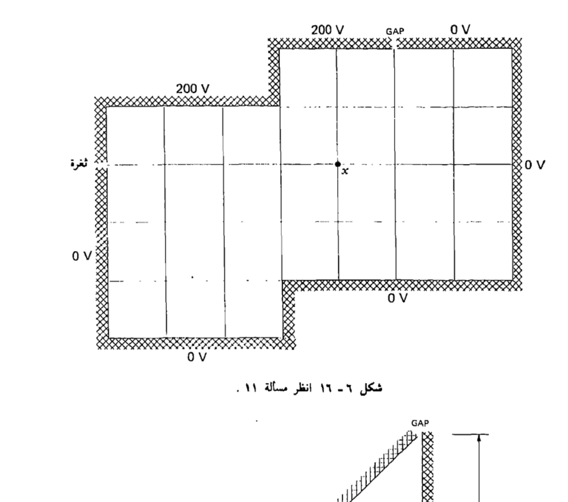


شكل ٦ ـ ١٤ انظر مسألة ٧ .

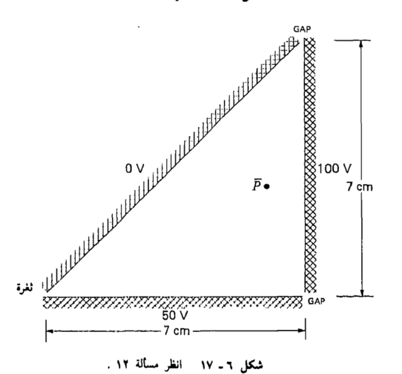


شكل ٦ ـ ١٥ انظر مسائل ٩ ، ١٠ ، ١٣ .

١٤ ـ طبق طرق التكرار لايجاد قيمة تقريبية للجهد عند نقطة الشبكة المعلمة x فى شكل ٦ ـ ١٨ . احسب لأقرب فولت .



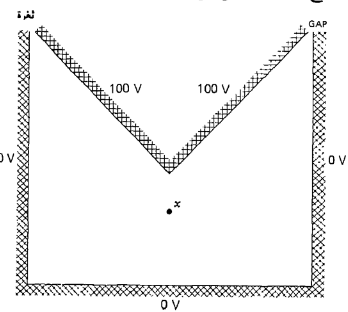
شكل ٦ ـ ١٦ انظر مسألة ١١ .



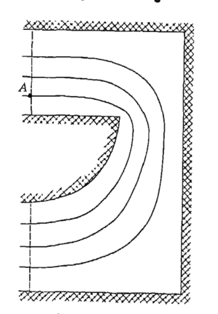
شكل ٦ ـ ١٧ انظر مسألة ١٢ .

١٥ ـ يختبر خط نقل من نوع خاص بانشاء نموذج من الألومنيوم أبعاده ست عشرة مرة الأبعاد الفعلية . وطول النموذج *30*cm والطرفان مغطيان بألواح عازلة ، والنموذج موضوع فى حوض الكتروليت له $\sigma = 0.0025$ ℧/m . استخدم فرق جهد **25V**

بين الموصلين . (أ) اذا أظهرت القياسات فى الحوض أن أسطح متساويات الجهد لكل $1-V$ تبتعد عن بعضها 2cm عند نقطة معينة ، فكم يجب أن تكون E عند النقطة المناظرة على خط النقل الفعلى مع استخدام 1kV ؟ (ب) اذا سحب تيار كلى مقداره 40 mA من المنبع 25V ، ما هى السعة لكل وحدة طول للنموذج فى الهواء ؟ (ج) للخط الفعلى فى الهواء



شكل ٦ - ١٨ : انظر مسألة ١٤ .



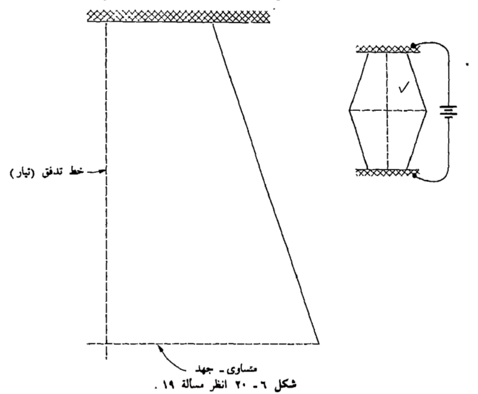
شكل ٦ - ١٩ انظر مسألة ١٨ .

١٦ - خط نقل محورى نصف قطرية 6mm و 16mm مملوء بمادة لها : $\sigma = 2 \times 10^{-4}$ ℧/m و $\epsilon_R = 2.8$. عين السعة والمقاومة بين الموصلين لطول 1m من الخط .

١٧ ـ المقطع العرضى لخط نقل محورى ، $a = 1.8$mm و $b = 10.6$mm ، مرسوم على لوح من ورق موصل ذى مقاومة $4{,}000\Omega$ لكل مربع . ماهى المقاومة المقاسة بين الموصلين ؟

١٨ ـ يبين شكل ٦ ـ ١٩ أكثر قليلا من نصف الرسم على لوح من ورق موصل لخط نقل ذى موصلين . والأسطح متساوية ـ الجهد مرسومة تخطيطيا ، حسب قيم مقاسة تجريبيا . الرسم خمس مرات المقاس الفعلى للخط . (أ) اكمل خريطة المربعات منحنية ـ الخطوط وقدر قيمة E عند نقطة A للورقة الموصلة اذا كان هناك 25V بين الموصلين . (ب) كم يجب أن تكون E عند A على خط النقل اذا كان هناك 250V بين الموصلين ؟ (جـ) ما المقاومة التى يجب أن تقاس بين الموصلين اذا كانت الورقة لها مقاومة 5,000 ohms لكل مربع ؟

١٩ ـ يبين الرسم التخطيطى الأكبر فى شكل ٦ ـ ٢٠ ربع مقاوم متماثل فى مقاسه الفعلى اذا كانت $\sigma = 10^4$ ℧/m وسمك الأداة 0.2mm ، احسب المقاومة .



شكل ٦ ـ ٢٠ انظر مسألة ١٩ .

٢٠ ـ نموذج من لوح مطاط منشأ لخط نقل محورى فيه الأبعاد الأفقية أربعين مرة تلك للخط الفعلى . الخط له نصفى قطرين 0.8mm و 4mm . والنموذج ارتفاعه 5cm عند الموصل الداخلى ، وصفر الخارجى . (أ) كم ارتفاعه عند منتصف المسافة بين الموصلين ؟ (ب) ما الزاوية التى يعملها عمود على السطح عند نصف القطر الداخلى مع الرأسى ؟

الفصل السابع

معادلتا بواسون ولابلاس

تبين دراسة الفصل السابق أن عديدا من التناظرات المستخدمة للحصول على تخطيطات مجال تجريبية تضمنت بيان أن الكمية المناظرة تحقق معادلة لابلاس . وهذا صحيح لانحراف بسيط لغشاء مرن ، وانسياب مائع فى طبقة رفيعة ، وقد كان يمكننا اثبات تناظر التيار ببيان أن كثافة التيار المستمر فى وسط موصل تحقق أيضا معادلة لابلاس . ويظهر أنها معادلة أساسية فى أكثر من مجال للعلم ، وربما بدون أن نعرف قد قضينا الفصل السابق فى الحصول على حلول معادلة لابلاس بطرق تجريبية ، تخطيطية وعددية . والآن نحن مستعدون للحصول على هذه المعادلة منهجيا ونناقش طرقا عديدة يمكن أن تحل بواسطتها تحليليا .

وقد يبدو أنه من الصائب أن تنتمى هذه المادة لما قبل ذاك للفصل السابق ، ومادمنا نحل معادلة واحدة بطرق كثيرة ، أليس من المناسب أن نرى المعادلة أولا ؟ . وعيب هذا الترتيب الأكثر منطقية يقع فى الحقيقة أن حل معادلة لابلاس هو تمرين فى الرياضيات ، ومالم تكن لدينا المسألة الفيزيائية واضحة فى أذهاننا ، قد نفقد بسهولة المعنى الفيزيائى لما نعمله .

وتخطيط خطوط ـ منحنية تقريبيا يمكن أن يخبرنا كثيرا عن المجال ، وعلى ذلك يمكن أن يستخدم فيما بعد لاختبار حلولنا الرياضية للأخطاء الكبيرة ، أوليبين مناطق خاصة غير عادية ـ فى المجال التى تتطلب معاملة خاصة .

بهذا الشرح دعنا أخيرا نحصل على معادلتى لابلاس وبواسون .

٧ ـ ١ : معادلتا بواسون ولابلاس

ان الحصول على معادلة بواسون سهلة للغاية ، لأن من الصورة النقطية لقانون جاوس ،

(١) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

(٢) $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ تعريف D ،

(٣) $\mathbf{E} = -\nabla V$ وعلاقة التدرج ،

وبالتعويض نحصل على

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho$$

أو $$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (٤)$$

لمنطقة متجانسة فيها ϵ ثابتة .

معادلة (٤) هى معادلة بواسون ، ولكن عملية « ∇ المزدوجة » يجب أن تفسر وتفك ، على الأقل فى الاحداثيات الكرتيزية ، قبل أن تكون المعادلة مفيدة . فى الاحداثيات الكرتيزية ،

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

ولذلك

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (٥)$$
$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

عادة تختصر العملية $\nabla.\nabla$ الى ∇^2 (وتُنطق « دل تربيع ») ، كمذكّر جيد للمشتقات الجزئية من الدرجة الثانية التى تظهر فى (٥) ، ونحصل على

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad (٦)$$

فى الاحداثيات الكرتيزية .

اذا كانت $\rho = 0$ مشيرة الى كثافة شحنة حجمية صفرية ، ولكن مسموح لشحنات نقطية ، خط شحنة ، وكثافة شحنة سطحية ، أن توجد على الحدود كمصادر للمجال ، فحينئذ

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \quad (٧)$$

التى هى معادلة لابلاس . وعملية الـ ∇^2 تسمى لابلاسىV .

وفى الاحداثيات الكرتيزية معادلة لابلاس هى

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (٨)$$

وصورة $\nabla^2 V$ فى الاحداثيات الاسطوانية والكروية يمكن الحصول عليها باستخدام تعبيرات الانفراج والتدرج التى تم الحصول عليها فى تلك النظم الاحداثية . وكمرجع ، اللابلاسى فى الاحداثيات الاسطوانية هو

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{(cylindrical)} \qquad (٩)$$

وفى الاحداثيات الكروية هو

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{(spherical)} \qquad (١٠)$$

هذه المعادلات يمكن أن تفك بأخذ المشتقات الجزئية المبينة ، ولكن عادة أكثر نفعا أن نبقيها فى الصور المعطاة آنفا ، بالاضافة الى أنه أسهل بكثير أن تفك فيما بعد اذا كان ضروريا عن أن توضع أقسامها معا ثانية .

ومعادلة لابلاس حاوية الكل ـ اذ لكونها تنطبق فى أى مكان تكون فيه كثافة الشحنة الحجمية صفرا ، فانها تقرر أن كل تشكيل يمكنَ التفكير فيه للاقطاب الكهربية أو الموصلات ينتج مجالا له $\nabla^2 V = 0$. وكل هذه المجالات مختلفة ، وذات قيم جهد مختلفة ومعدلات تغير فراغية مختلفة ، ومع ذلك لكل منها $\nabla^2 V = 0$ ولأن كل مجال (اذا كانت $\rho_v = 0$) يحقق معادلة لابلاس ، فكيف يمكن أن نتوقع أن نعكس الاجزاء ونستخدم معادلة لابلاس لنجد مجالا واحدا محددا يحدث أننا نهتم به ؟ من الواضح ، مطلوب معلومات أكثر ، وسنرى أننا يجب أن نحل معادلة لابلاس طبقا لشروط حدود معينة .

كل مسألة فيزيائية يجب أن تحتوى على الأقل على حد موصل واحد وعادة يحتوى على اثنين أو أكثر . والجهود على هذه الحدود هى قيم مُحددة ، ربما V_0 , V_1 , ... أو ربما قيما عددية . وهذه الأسطح متساوية الجهد المحددة ستجهز شروط الحدود لنوع المسائل التى ستحل فى هذا الفصل . فى أنماط أخرى من المسائل ، تأخذ شروط الحدود صورة قيم محددة لـ E على سطح حاو ، أو خليط من قيم معروفة لـ V و E .

وقبل استخدام معادلة لابلاس ومعادلة بواسون فى أمثلة عديدة ، يجب أن نتوقف لنبين انه اذا حققت اجابتنا معادلة لابلاس وحققت أيضا شروط الحدود ، فحينئذ هى الاجابة الوحيدة الممكنة . فانه لمما يبعث على القلق أن نعالج مسألة بحل معادلة لابلاس بطريقتين مختلفتين معتمدتين ثم نحصل على اجابتين مختلفتين . وسنبين أن الاجابتين يجب أن يكونا متطابقتين .

ت ـ ٧ ـ ١) : حدد ماإذا كانت مجالات الجهد الآتية تحقق معادلة لابلاس أم لا :
(أ) $V = x^2 - y^2 + z^2$ ، (ب) $V = \rho \cos \phi + z$ ، (جـ) $V = r \cos \theta + \phi$.

الاجابة : لا ، نعم ، نعم .

٧ ـ ٢ : نظرية الوحدانية :

دعنا نفرض أن لدينا حلين لمعادلة لابلاس ، V_1 و V_2 ، وكلاهما دوال عامة للاحداثيات المستخدمة . لذلك

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

و

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

ومنها

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

كل حل يجب أيضا أن يحقق شروط الحدود ، واذا مثلنا قيم الجهد المعطاة على الحدود بـ V_b فان قيمة V_1 على الحدود V_{1b} وقيمة V_2 على الحدود V_{2b} يجب أن تطابق كلاهما V_b .

$$V_{1b} = V_{2b} = V_b$$

و

$$V_{1b} - V_{2b} = 0$$

فى قسم ٤ ـ ٨ ، معادلة (٤٤) ، استخدمنا المتطابقة الاتجاهية ،

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

والتى تنطبق على أى مقياسى V وأى متجه D . وللتطبيق الحالى سنختار $V_1 - V_2$ على أنه المقياسى و $\nabla(V_1 - V_2)$ على أنه المتجه ، معطيا

$$\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]$$
$$\equiv (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2)$$

التى سوف نكاملها خلال كل الحجم المحتوى باسطح الحدود المعينة :

(١١) $$\int_{\mathrm{vol}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\, dv$$
$$\equiv \int_{\mathrm{vol}} (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)]\, dv + \int_{\mathrm{vol}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\, dv$$

تسمح لنا نظرية الانفراج أن نستبدل التكامل الحجمى فى الطرف الأيسر من المعادلة بالتكامل السطحى المغلق على السطح المحيط بالحجم . وهذا السطح يتكون من الحدود المعينة فعلا والتى عليها $V_{1b} = V_{2b}$ ، ولذلك

$$\int_{\mathrm{vol}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\, dv$$
$$= \oint_S [(V_{1b} - V_{2b})\nabla(V_{1b} - V_{2b})] \cdot d\mathbf{S} = 0$$

احد عوامل التكامل الأول على الطرف الأيمن لمعادلة (١١) هو $\nabla.\nabla (V_1 - V_2)$ ، أو $\nabla^2 (V_1 - V_2)$ التى تساوى صفرا بالفرض ، ولذلك فان هذا التكامل يساوى صفرا . ومن ثم فان التكامل الحجمى المتبقى يجب أن يكون صفرا :

$$\int_{\mathrm{vol}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\, dv = 0$$

هناك عامة سببان لماذا يمكن لتكامل أن يكون صفرا : اما أن يكون المكامل (الكمية تحت علامة التكامل) صفرا فى كل مكان ، أو أن يكون المكامل موجبا فى بعض المناطق ، وسالبا فى أخرى ، والمساهمة تتلاشى جبريا . وفى هذه الحالة يجب أن ينطبق السبب الأول لأن $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ لايمكن أن يكون سالبا . لذلك

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

و

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

أخيرا ، اذا كان تدرج $(V_1 - V_2)$ صفرا فى كل مكان ، فان $V_1 - V_2$ لايمكن أن تتغير مع أى احداثى وهكذا

$$V_1 - V_2 = \text{ثابت}$$

اذا استطعنا أن نبين أن هذا الثابت هو صفر ، فسنكون قد اتممنا برهاننا . والثابت يمكن تقديره بسهولة باعتبار نقطة على الحدود . هنا $V_1 - V_2 = V_{1b} - V_{2b} = 0$ ، ونرى أن الثابت ـ فعلا ـ صفر ، ولذلك

$$V_1 = V_2$$

معطيا حلين متطابقين .

وتنطبق نظرية الوحدانية أيضا على معادلة بواسون ، لأنه اذا كان $\nabla^2 V_1 = \rho/\epsilon$ و $V^2 = -\rho/\epsilon$ فان $\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$ كماسبق . وشروط الحدود مازالت تتطلب أن $V_{1b} - V_{2b} = 0$ ، والبرهان مطابق من هذه النقطة .

هذا يشكل برهان نظرية الوحدانية . منظور اليه كاجابة للسؤال ، « كيف يقارن حلان لمعادلة لابلاس أو بواسون اذا حقق كلاهما نفس الشروط الحدود ؟ » نظرية الوحدانية يجب أن تغبطنا بتأكيدها أن الاجابتين متطابقتان . وبمجرد أن نجد اى طريقة لحل معادلة لابلاس أو بواسون ، تحت شروط حدود معطاة ، نكون قد قمنا بحل مسألتنا بصفة نهائية . ولاتستطيع طريقة أخرى أبدا أن تعطى اجابة مختلفة .

ت ٧ ـ ٢ : المخروطان $\theta = \pi/6$ و $\theta = \pi/3$ عند الجهدين -1.317V و -0.549V ، بالترتيب .

(أ) هل تحقق دوال الجهد $V_1 = \ln(\tan 1/2\theta)$ و $V_2 = -1/2 \ln[(1 + \cos\theta)/(1 - \cos\theta)]$. شروط الحدود هذه ؟ (ب) هل تحقق كلا V_1 و V_2 معادلة لابلاس ؟ . (جـ) هل V_1 و V_2 متطابقتان ؟ .

الاجابة : نعم ، نعم ، نعم .

٧ ـ ٣ : أمثلة لحل معادلة لابلاس :

قد تكشفت عدة طرق لحل المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية المعروفة بمعادلة لابلاس . والطريقة الأولى والأبسط هى التكامل المباشر ، وسنستخدم هذه التقنية لمعالجة أمثلة عدة فى نظم احداثيات مختلفة فى هذا القسم . فى قسم ٧ ـ ٥ ستستخدم طريقة أخرى فى مسألة أكثر صعوبة . وطرقا اضافية ، متطلبة معرفة رياضية اكثر تقدما ، مشروحة فى المراجع المعطاة عند نهاية هذا الفصل .

وطريقة التكامل المباشر يمكن تطبيقها فقط على المسائل « ذات البعد الواحد » ، أو التى فيها مجال الجهد دالة لواحد فقط من الاحداثيات الثلاثة . ولأننا نعمل مع نظم احداثيات ثلاث فقط ، فقد يبدو ، حينئذ ، أن هناك تسع مسائل يراد حلها ، ولكن بتفكير قليل سيبين أن جهدا يتغير فقط مع x هو اساسا مثل جهد يتغير فقط مع y . فادارة المسألة الفيزيائية ربع دورة ليس تغييرا . وفى الحقيقة ، هناك خمس مسائل فقط يراد حلها ، واحدة فى الاحداثيات الكرتيزية ، واثنان فى الاسطوانية ، واثنان فى الكروية . سنحلها جميعها .

مثال ١ : دعنا نفرض أن V دالة فى x فقط ونهتم فيما بعد بمعرفة أية مسألة فيزيائية نحل عندما نحتاج شروطا للحدود . وتختزل معادلة لابلاس الى

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

نكامل مرتين ، حاصلين على

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

و

$$\frac{dV}{dx} = A$$

$$V = Ax + B \qquad (١٢)$$

حيث A و B ثوابت التكامل . معادلة (١٢) تحتوى على اثنين من تلك الثوابت ، كما يجب أن نتوقع لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية . ويمكن أن تعين هذه الثوابت من شروط الحدود فقط .

ماهى شروط الحدود التى يجب أن نزود بها ؟ انها اختيارنا ، لأنه لم تحدد بعد مسألة فيزيائية ، باستثناء الفرض الأصلى أن الجهد تغير مع x فقط . ويجب الان أن نحاول أن نتصور مثل هذا المجال . من المحتمل أن معظمنا لديهم الاجابة فى الحال ، ولكن يمكن الحصول عليها بالطرق المضبوطة .

لأن المجال يتغير مع x فقط وليس دالة فى y و z ، فاذا كانت x ثابتة فان V تكون ثابتة ، وبتعبير آخر ، الأسطح متساوية ـ الجهد توصف بوضع x ثابتة . وهذه الأسطح مستويات متوازية عمودية على المحور x . وعلى ذلك فالمجال هو ذاك لمكثف متوازى الألواح ، وبمجرد أن نحدد الجهد على أى مستويين ، يمكننا أن نقدر قيمة ثوابت تكاملنا .

وللتعميم الشديد ، دع $V = V_1$ عند $x = x_1$ و $V = V_2$ عند $x = x_2$ ثم تعوض هذه القيم فى (١٢) ، معطية

$$V_1 = Ax_1 + B \qquad V_2 = Ax_2 + B$$

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \qquad B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

و

$$V = \frac{V_1(x - x_2) - V_2(x - x_1)}{x_1 - x_2}$$

وقد كان يمكن الحصول على اجابة ابسط باختيار شروط حدود ابسط . فاذا ثبتنا

$$A = \frac{V_0}{d} \qquad B = 0$$

$$\boxed{V = \frac{V_0 x}{d}} \qquad (١٣)$$

افترض أن غرضنا الرئيسى هو أن نوجد سعة مكثف متوازى ـ الألواح . وقد قمنا بحل معادلة لابلاس ، حاصلين على (١٢) مع الثابتين A و B . هل يجب أن تقدر قيمتها أم أن يتركا ؟ من المفترض أننا لسنا مهتمين بمجال الجهد نفسه ، ولكن فقط بالسعة ، ويمكننا أن نستمر بنجاح مع A و B أو يمكننا تبسيط الجبر بقليل من البصيرة . فالسعة تعطى كنسبة الشحنة الى فرق الجهد ، ولذا يمكننا الان اختيار فرق الجهد كـ V_0 ، التى تكافىء شرطا واحدا للحدود ، ثم نختار أى شرط حدود ثان ، يبدو أن يساعد بأقصى درجة صورة المعادلة . وهذا جوهر المجموعة الثانية لشروط الحدود التى أنتجت (١٣) . ففرق الجهد ثبت كـ V_0 باختيار جهد أحد الألواح صفرا ، والاخر V_0 ، وموضع هذه الألواح جعل بسيطا ما أمكن بجعل $V = 0$ عند $x = 0$.

باستخدام (١٣) ، فحينئذ ، مازلنا نحتاج الشحنة الكلية على أى من اللوحين قبل أن يمكن ايجاد السعة . ويجب أن تتذكر أنه عندما قمنا بحل مسألة المكثف هذه فى الفصل الخامس ، أمدنا لوح الشحنة بنقطة البداية . ولم نضطر أن نعمل بشدة جدا لايجاد الشحنة ، لأن كل المجالات عبر عنها بدلالتها . وقد بذل العمل حينذاك فى ايجاد فرق الجهد . الان انعكست المسألة (وبسطت) .

والخطوات الضرورية هى ، بعد عمل اختيار شروط الحدود :

١ ـ اذا أعطيت V استخدم $\mathbf{E} = -\nabla V$ لتجد $\mathbf{E}$.

٢ ـ استخدم $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ لتجد $\mathbf{D}$.

٣ ـ قدر قيمة $\mathbf{D}$ عند أى من لوحى المكثف $\mathbf{D} = \mathbf{D}_s = D_n \mathbf{a}_n$.

٤ ـ نعرف أن $\rho_s = D_n$.

٥ ـ أوجد Q بالتكامل السطحى على لوح المكثف ،

$$Q = \int_S \rho_S \, dS$$

هنا لدينا $V = 0$ عند $x = 0$ و $V = V_0$ عند $x = d$ ، عندئذ

$$V = V_0 \frac{x}{d}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D}_S = \mathbf{D} \Big|_{x=0} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_x$$

$$D_n = -\epsilon \frac{V_0}{d} = \rho_S$$

$$Q = \int_S \frac{-\epsilon V_0}{d} \, dS = -\epsilon \frac{V_0 S}{d}$$

وتكون السعة

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}} \qquad (١٤)$$

سنستخدم هذه الطريقة عدة مرات فى الأمثلة التالية .

مثال ٢ : لأنه لاتحل مسائل جديدة باختيار مجالات تتغير فقط مع y أومع z فى الاحداثيات الكرتيزية ، سنعبر الى الاحداثيات الاسطوانية لمثالنا التالى . التغيرات بالنسبة لـ z مرة ثانية ليست شيئا جديدا ، ونفترض بالتالى تغيرا بالنسبة لـ ρ فقط . تصبح معادلة لابلاس

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)=0$$

أو

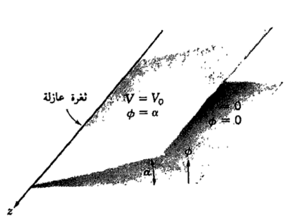
$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right)=0$$

ملاحظين ρ فى المقام ، نستبعد $\rho = 0$ من حلنا ثم نضرب فى ρ ونكامل ،

$$\rho\frac{dV}{d\rho}=A$$

نعيد الترتيب ، ونكامل مرة أخرى ،(١٥)

$$V = A\ln\rho + B \qquad (١٥)$$



شكل ٧ - ١ : مستويان نصفا قطريين لانهائيين مع زاوية داخلية α . توجد ثغرة عازلة متناهية الصغر عند $\rho = 0$. يمكن ايجاد مجال الجهد بتطبيق معادلة لابلاس فى الاحداثيات الاسطوانية .

الأسطح متساوية - الجهد معطاة بـ ρ = ثابت وهى اسطوانات ، والمسألة هى لمكثف محورى أو خط نقل محورى . نختار فرق جهد V_0 بأن ندع $V = V_0$ عند $\rho = a$ و $V = 0$ عند $\rho = b$ ، $b > a$ ، ونحصل على

$$V = V_0\frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} \qquad (١٦)$$

ومنها

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln (b/a)} \mathbf{a}_\rho$$

$$D_{n(\rho=a)} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln (b/a)}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln (b/a)}$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln (b/a)}} \quad (١٧)$$

التى تتفق مع نتائجنا فى الفصل الخامس .

مثال ٣ : والان دعنا نفرض أن V دالة فقط فى ϕ فى الاحداثيات الاسطوانية . يمكننا أن ننظر الى المسألة الفيزيائية أولا للتنويع ونرى أن الأسطح متساوية ـ الجهد معطاة بـ ϕ = ثابت . وهذه مستويات نصف قطرية . وشروط الحدود يمكن أن تكون $V = 0$ عند $\phi = 0$ و $V = V_0$ عند $\phi = \alpha$ ، مؤدية الى المسألة الفيزيائية المفصلة فى شكل ٧ ـ ١ .

والآن معادلة لابلاس هى

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

نستبعد $\rho = 0$ ونحصل على

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

الحل هو

$$V = A\phi + B$$

تحدد شروط الحدود A و B ، ونحصل على

(١٨)

$$\boxed{V = V_0 \frac{\phi}{\alpha}} \quad (١٨)$$

أخذ تدرج (١٨) يعطى شدة المجال الكهربى ،

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{V_0 \mathbf{a}_\phi}{\alpha \rho}} \quad (١٩)$$

وأنه من المهم أن نلاحظ أن E دالة فى ρ وليست فى ϕ . وهذا لايتعارض مع فروضنا الأصلية ، التى كانت قيودا على مجال الجهد فقط . مع ذلك ، لاحظ أن المجال المتجه E دالة فى ϕ .

مسألة تشتمل على سعة هذين المستويين نصف القطريين متضمنة عند نهاية الفصل .

مثال ٤ : والآن نتجه الى الاحداثيات الكروية ، تاركين فى الحال التغيرات بالنسبة لـ ϕ فقط لأنها قد تم حلها تواً ، ونعالج أولا $V = V(r)$.

والتفاصيل متروكة لمسألة فيما بعد ، ولكن مجال الجهد النهائى معطى بـ

$$V = V_0 \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b} \qquad (٢٠)$$

حيث شروط الحدود هى بوضوح $V = 0$ عند $r = b$ و $V = V_0$ عند $r = a$, $b > a$.
والمسألة هى تلك التى لكرتين متحدتى ـ المركز .

وقد وجدت السعة سابقا (بطريقة مختلفة نوعا) وهى

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b} \qquad (٢١)$$

مثال ٥ : فى الاحداثيات الكروية نقصر الآن دالة الجهد على $V = V(\theta)$ ، حاصلين على

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right) = 0$$

نستبعد $r = 0$ و $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ ونحصل على

$$\sin\theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

وحينئذ يكون التكامل الثانى

$$V = \int \frac{A\, d\theta}{\sin\theta} + B$$

الذى ليس واضحا مثل سابقيه . من جداول التكامل (أو ذاكرة جيدة) نحصل على

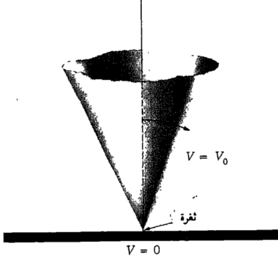
$$V = A \ln(\tan \tfrac{1}{2}\theta) + B$$

الأسطح متساوية ـ الجهد مخروطات . يبين شكل ٧ ـ ٢ الحالة حيث $V = 0$ عند $\theta = \pi/2$ و $V = V_0$ عند $\theta = \alpha$ و $\alpha < \pi/2$. ونحصل على

$$V = V_0 \frac{\ln (\tan \frac{1}{2}\theta)}{\ln (\tan \frac{1}{2}\alpha)} \quad (٢٢)$$

لكى نجد السعة بين مخروط موصل رأسه منفصل عن مستوى موصل بواسطة ثغرة عازلة متناهية الصغر ومحوره عمودى على المستوى ، دعنا أولا نجد شدة المجال .

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln (\tan \frac{1}{2}\alpha)}\mathbf{a}_\theta$$



شكل ٧ ـ ٢ للمخروط $\theta = \alpha$ عند V_0 والمستوى $\theta = \pi/2$ عند $V = 0$ ، يعطى مجال الجهد بـ $V = V_0 [\ln (\tan 1/2\ \theta)]/[\ln(\tan 1/2\alpha)]$.

وحينئذ تكون كثافة الشحنة السطحية

$$\rho_S = \frac{-\epsilon V_0}{r \sin \alpha \ln (\tan \frac{1}{2}\alpha)}$$

$$Q = \frac{-\epsilon V_0}{\sin \alpha \ln (\tan \frac{1}{2}\alpha)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \alpha \, d\phi \, dr}{r}$$

ويؤدى هذا إلى قيمة لانهائية للشحنة والسعة ، ويصبح من الضرورى أن نعتبر مخروطاً ذا مقاس محدود . وستكون إجابتنا الآن تقريبية فقط ، لأن السطح النظرى المتساوى ـ الجهد هو $\theta = \alpha$ ، سطح مخروطى ممتد من $r = 0$ إلى $r = \infty$ ، بينما سطح مخروطنا الطبيعى يمتد فقط من $r = 0$ إلى ، مثلا ، $r = r_1$. والسعة التقريبية هى

$$C \doteq \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln(\cot \frac{1}{2}\alpha)} \qquad (٢٣)$$

اذا رغبنا فى اجابة أكثر دقة ، يمكننا عمل تقدير لسعة قاعدة المخروط بالنسبة للمستوى ذى الجهد الصفرى ، وتضيف هذه الكمية الى اجابتنا آنفاً ، وقد أهملت مجالات التهدب ، أوغير المنتظمة ، فى هذه المنطقة وهى تدخل مصدراً إضافياً للخطأ .

ت ٧ ـ ٣ أوجد مقدار E عند $(1,2,3)$ لمجال (أ) اسطوانتين موصلتين متحدتى ـ المركز $V = 100$V عند $\rho = 1$m و $V = 20$V عند $\rho = $ m ، (ب) مستويين موصلين نصفى قطرين ، $V = 100$V عند $\phi = 20^\circ$ و $V = 20$ عند $\phi = 80^\circ$ ، (جـ) كرتين موصلتين متحدتى ـ المركز ، $V = 100$V عند $r = 1$m و $V = 10$V عند $r = 4$m ، (د) مخروطين موصلين متحدى ـ المحور $V = 100$V عند $\theta = \pi/4$ و $V = 20$V عند $\theta = \pi/5$.

الإجابة : 32.6V/m , 34.2V/m , 8.57V/m , 147.3V/m .

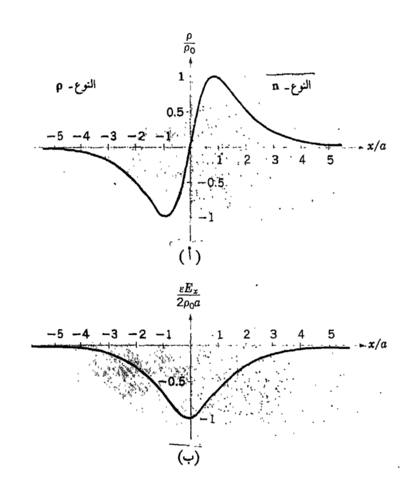
٧ ـ ٤ : مثال لحل معادلة بواسون

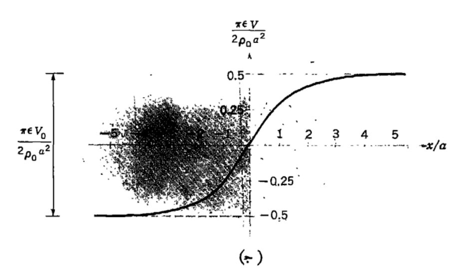
لكى نختار مسألة بسيطة بدرجة معقولة والتى يمكن أن توضح تطبيق معادلة بواسون ، سنضطر أن نفرض أن كثافة الشحنة الحجمية محددة . ولكن هذه ليست الحالة عادة ، ففى الحقيقة ، غالبا ما تكون هى الكمية التى نبحث عن معلومات أكثر عنها . ونوع المسائل التى قد نواجهها فيما بعد قد يبدأ بمعرفة فقط قيم الحدود للجهد ، شدة المجال الكهربى ، وكثافة التيار . ومن تلك يكون علينا أن نطبق معادلة بواسون ، معادلة الاستمرارية ، وبعض العلاقات تعبر عن القوى على الجسيمات المشحونة ؛ مثل معادلة القوة للورنز أو معادلة الانتشار ، ونحل كل منظومة المعادلات آنيا . مثل هذا الموقف الصعب خارج نطاق هذا الكتاب ، ولذلك سنفترض كمية كبيرة بقدر معقول من المعلومات .

وكمثال ، دعنا نختار ملتقى pn بين نصفين من قضيب شبه موصل ممتد فى اتجاه x . وسنفرض أن المنطقة $x < 0$ مطعمة بنوع p وأن المنطقة $x > 0$ هى نوع n . ودرجة التطعيم متماثلة على جانبى الملتقى . ولكى نراجع نوعيا بعض الحقائق عن ملتقى شبه الموصل ، نلاحظ أنه ابتدائيا هناك فجوات زائدة على يسار الملتقى ، والكترونات زائدة على اليمين . وكل ينتشر عبر الملتقى الى أن ينبنى مجال كهربى فى اتجاه يؤدى لتناقص

تيار الانتشار الى الصفر . وعلى ذلك ، لكى تمنع فجوات أكثر من التحرك الى اليمين ، يجب أن يوجه المجال الكهربى بالقرب من الملتقى الى اليسار ، E_x تكون سالبة هناك . وهذا المجال يجب أن ينتج بواسطة صافى شحنة موجبة الى يمين الملتقى وصافى شحنة سالبة الى اليسار . لاحظ أن طبقة الشحنة الموجبة تتكون من جزئين ـ الفجوات التى عبرت الملتقى ، والأيونات المعطية الموجبة التى غادرتها الالكترونات . وطبقة الشحنة السالبة متكونة بالطريقة المضادة من الكترونات وأيونات متقبلة سالبة . وصافى كثافة الشحنة الحجمية ليست صفرا بالقرب من الملتقى .

ونوع توزيع الشحنة الذى ينتج مبين فى شكل (٧ ـ ٣أ) ، والمجال السالب الذى تنتجه مبين فى شكل (٧ ـ ٣ب) . وبعد النظر الى هذين الشكلين ، يمكن قراءة الفقرة السابقة باستفادة .





شكل ٧ ـ ٣ : (أ) كثافة الشحنة ، (ب) شدة المجال الكهربى ، و(جـ) الجهد مرسومة لملتقى pn كدوال للمسافة من مركز الملتقى . المادة من النوع p إلى اليسار ، والنوع n إلى اليمين .

توزيع شحنة له هذه الصورة يمكن أن يقرب بعدة تعبيرات مختلفة . أحد التعبيرات الأبسط هو

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \quad (٢٤)$$

الذى له كثافة شحنة عظمى $\rho_{max} = \rho_0$ التى تحدث عند $x = 0.881a$. نهاية عظمى لكثافة الشحنة ρ_0 مرتبطة بتركيزات المتقبل والمعطى N_a و N_d بملاحظة أن جميع أيونات المعطى والمتقبل فى هذه المنطقة (طبقة النزح) انتزع منها الكترون أو فجوة ، وعلى ذلك

$$\rho_0 = eN_a = eN_d$$

دعنا الآن نحل معادلة بواسون ،

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

بشرط توزيع الشحنة المفترض آنفا ،

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

فى هذه المسألة ذات البعد الواحد التى فيها التغيرات مع y و z غير موجودة . نكامل مرة ،

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + C_1$$

ونحصل على شدة المجال الكهربى ،

$$E_x = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - C_1$$

لتقدير قيم ثابت التكامل C_1 ، نلاحظ أنه لايمكن أن يوجد صافى كثافة شحنة أو مجالات بعيدا عن الملتقى . وعلى ذلك ، عندما $x \to \pm \infty$ يجب أن تقترب E_x من الصفر . ولذلك $C_1 = 0$ ، و

$$E_x = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \quad (٢٥)$$

وبالتكامل مرة أخرى ،

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{x/a} + C_2$$

دعنا اختياريا ننتقى مرجعنا الصفرى للجهد عند مركز الملتقى ، $x = 0$ ،

$$0 = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \frac{\pi}{4} + C_2$$

وأخيراً ،

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{x/a} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (٢٦)$$

يبين شكل ٧ - ٣ توزيع الشحنة ، شدة المجال الكهربى ، والجهد ، كما هى معطاة بـ (٢٤) ، (٢٥) ، و (٢٦) ، بالترتيب .

والجهد ثابت بمجرد أن نكون على مسافة تقريباً $4a$ أو $5a$ من الملتقى . وفرق الجهد الكلى V_0 عبر الملتقى يحصل عليه من (٢٦) ،

$$V_0 = V_{x\to\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \quad (٢٧)$$

يوحى هذا التعبير بإمكانية تعيين الشحنة الكلية على جانب واحد من الملتقى ثم استخدام (٢٧) لإيجاد سعة الملتقى . والشحنة الموجبة الكلية هى

$$Q = S \int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}\, dx = 2\rho_0 a S$$

حيث S هى مساحة مقطع الملتقى . . إذا استخدمنا (٢٧) لنلغى بارامتر المسافة a ، تصبح الشحنة

$$(٢٨) \quad Q = S\sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}}$$

لأن الشحنة الكلية دالة لفرق الجهد ، علينا أن نكون حريصين فى تعريف سعة . وبالتفكير بتعبيرات « الدوائر الكهربية » للحظة ،

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_0}{dt}$$

وعلى ذلك

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

لذلك بتفاضل (٢٨) يكون لدينا السعة ،

$$(٢٩) \quad C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}}\, S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

والصورة الأولى لـ (٢٩) تبين أن السعة تتغير عكسيا مع الجذر التربيعى للفولتية . أى أن ، فولتية أعلى تسبب فصل أعلى لطبقات الشحنة وسعة أصغر . والصورة الثانية هامة فى أنها تبين أننا يمكننا أن نفكر فى الملتقى لمكثف متوازى الألواح مع فاصل ألواح قيمته $2\pi a$. بالنظر الى أبعاد المنطقة التى تتركز فيها الشحنة ، تكون هذه نتيجة منطقية .

تدخل معادلة بواسون فى أى مسألة تشمل كثافة شحنة حجمية . وبجانب صمام شبه الموصل الثنائى ونماذج الترانزستور ، نجد أن الصمامات المفرغة ، تحويل الطاقة الهيدروديناميكية ـ المغناطيسية ، والدفع الأيونى تتطلب استخدامها فى انشاء نظريات مُرضية .

ت ٧ ـ ٤ : صمام ثنائى ذى ملتقى سيليكونى منشأ بحيث :
$\epsilon_R = 12, N_a = N_d = 1.5 \times 10^{21}$ atoms/m^3 ومساحة الملتقى 5×10^{-8} m^2 . فرق الجهد عبر الملتقى 5V ، (أ) أوجد سعة الملتقى .
(ب) أوجد E عند الملتقى .

الاجابة : 1.425pF , 2.68MV/m .

ت ٧ ـ ٥ : اذا كانت $V = 1$V عند $x = 1$ mm و $V = 0$ عند $x = 0$ ، أوجد V عند $x = 2$ mm فى فضاء حر عندما : (أ) $\rho = -10^5 \epsilon_0$c/m^3 (ب) $\rho = -12 \times 10^7 \epsilon_0$c/m^3 .

الإجابة : 2.10 V ; 2.12V .

٧ ـ ٥ : حل معادلة لابلاس فى صورة ضرب :

فى هذا القسم نواجه بطائفة مجالات الجهد التى تتغير مع أكثر من واحد من الاحداثيات الثلاثة . ومع أن أمثلتنا مأخوذة فى نظام الاحداثيات الكرتيزية ، فان الطريقة العامة يمكن تطبيقها على نظم الاحداثيات الأخرى . ولكننا ستتجنب تلك التطبيقات لأن مجالات الجهد تعطى بدلالة دوال رياضية أكثر تقدما ، مثل دوال بسل والتوافقيات الكروية والاسطوانية ، واهتمامنا الان لايقع على دوال رياضية جديدة ، ولكن على التقنية وطرق حل مسائل المجال الكهروستاتيكى .

ويمكن أن نمد أنفسنا بطائفة عامة من المسائل بمجرد تحديد أن الجهد دالة فى x و y فقط ، بحيث أن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \qquad (٣٠)$$

نفرض الان أن الجهد يمكن أن يعبر عنه كحاصل ضرب دالة فى x فقط ، ودالة فى y فقط . وقد يبدو أن هذا يمنع حلولا كثيرةجدا ، مثل $V=x+y$ ، أو أى مجموع لدالة فى x ودالة فى y ، ولكننا يجب أن ندرك أن معادلة لابلاس خطية ومجموع أى حلين هو أيضا حل . ونستطيع أن نعامل $V=x+y$ كمجموع $V_1=x$ و $V_2=y$ حيث أن كلا من هذه الجهود الأخيرة هى الان حل على صورة ضرب (تافة) .

وبتمثيل الدالة فى x بـ X والدالة فى y بـ Y ، نحصل على

$$V=XY \qquad (٣١)$$

التى تعوض فى (٣٠) ،

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0$$

ولأن X لاتشتمل على y و Y لاتشتمل على x ، يمكن استخدام المشتقات العادية ،

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \qquad (٣٢)$$

يمكن حل المعادلة (٣٢) بفصل المتغيرات بواسطة القسمة على XY ، معطية

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0$$

أو

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

والان نحتاج واحدة من أبرع الحُجج فى الرياضيات : لأن $(1/X)d^2X/dx^2$ لايشتمل على y و $(1/Y)\ d^2Y/dy^2$ — لايشتمل على x ولأن الكميتين متساويتين ، فان $(1/X)d^2X/dx^2$ لايمكن أن تكون دالة حتى فى x ، وبالمثل ، $(1/Y)d^2Y/dy^2$ — لايمكن أن تكون دالة فى y ! وبتعبير آخر ، قد بينا أن كلا من هذه الحدود يجب أن يكون ثابتا . وللتيسير ، دعنا نسمى هذا الثابت α^2 .

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 \qquad (٣٣)$$

$$-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2 \qquad (٣٤)$$

يسمى الثابت α^2 ثابت الفصل ، لأن استخدامه يتسبب فى فصل معادلة واحدة الى معادلتين أبسط .

المعادلة (٣٣) يمكن أن تكتب على الصورة

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 X \qquad (٣٥)$$

ويجب الان أن تحل . هناك طرق عديدة يمكن بواسطتها الحصول على حل . والطريقة الأولى هى الخبرة ، أو التمييز ، التى تصبح أكثر قوة بالممارسة . نحن بادئين الان ونستطيع بالكاد التعرف على معادلة لابلاس نفسها . والطريقة الثانية قد تكون تلك بالتكامل المباشر ، عندما يمكن تطبيقها ، بالطبع . وبتطبيقها هنا ، يجب أن نكتب

$$d\left(\frac{dX}{dx}\right) = \alpha^2 X\ dx$$

$$\frac{dX}{dx} = \alpha^2 \int X\ dx$$

ثم نواصل الى الطريقة التالية ، لأن X هى دالة ما مجهولة فى x ، وطريقة التكامل لايمكن تطبيقها هنا . والطريقة الثالثة يمكننا أن نصفها بالبديهية ، الفطرة ، أو الفحص . وتشتمل على القاء نظرة جيدة على المعادلة ـ ربما ـ واضعين العملية فى كلمات . وهذه الطريقة ستطبق على (٣٥) ، اذا سألنا أنفسنا ، « أى دالة لها مشتقة ثانية لها نفس الصورة كالدالة نفسها ، فيما عدا الضرب فى ثابت ؟ » . والاجابة هى الدالة الأسية ، بالطبع ونستطيع أن نواصل من هنا لننشىء الحل . بدلا من ذلك ، دعنا نعمل مع أولئك منا الذين تعانى بديهيتهم من المواجهة ونطبق طريقة قادرة جدا ولكن طويلة ، هى تعويض متسلسلة قوى ـ لانهائية .

نفرض آملين أن X يمكن أن تمثل بـ

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ونعوض فى (٣٥) ، معطية

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \sum_{0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \alpha^2 \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$$

اذن وجب أن تكون هاتان المتسلسلتان اللانهائيتان متساويتين لكل x ، فانهما يجب أن تكونا متطابقتين ، والمعاملات لقوى x المتشابهة يمكن أن تساوى حدا بحد . وعلى ذلك

$$2 \times 1 \times a_2 = \alpha^2 a_0$$

$$3 \times 2 \times a_3 = \alpha^2 a_1$$

وعامة نحصل على العلاقة التكرارية

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \alpha^2 a_n$$

ويمكن التعبير عن المعاملات الزوجية بدلالة a_0 كالتالى

$$a_2 = \frac{\alpha^2}{1 \times 2} a_0$$

$$a_4 = \frac{\alpha^2}{3 \times 4} a_2 = \frac{\alpha^4}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{\alpha^6}{6!} a_0$$

وعامة ، لـ n زوجية ، بالصور

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

وللقيم الفردية لـ n ، نحصل على

$$a_3 = \frac{\alpha^2}{2 \times 3} a_1 = \frac{\alpha^3}{3!} \frac{a_1}{\alpha}$$

$$a_5 = \frac{\alpha^5}{5!} \frac{a_1}{\alpha}$$

وعامة ، لـ n فردية ،

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{a_1}{\alpha}$$

بالرجوع للتعويض فى متسلسلة القوى الأصلية لـ X ، نحصل على

$$X = a_0 \sum_{0,\,\text{even}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{1,\,\text{odd}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$$

أو

$$X = a_0 \sum_{0,\,\text{even}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{1,\,\text{odd}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

ومع أن مجموع هاتين المتسلسلتين اللانهائيتين هو حل المعادلة التفاضلية فى x ، فان صورة الحل يمكن أن تحسن بلاحد بالتعرف على المتسلسلة الأولى على أنها جيب تمام زائدى

$$\cosh \alpha x = \sum_{0,\,\text{even}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = 1 + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^4}{4!} + \cdots \qquad (\text{٧ - ٦٣})$$

والمتسلسلة الثانية على أنها جيب زائدى ،

$$\sinh \alpha x = \sum_{1,\,\text{odd}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \alpha x + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} + \cdots$$

ولذلك يمكن أن يكتب الحل بالصورة

$$X = a_0 \cosh \alpha x + \frac{a_1}{\alpha} \sinh \alpha x$$

أو

$$X = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$

حيث حلت A و B الأبسط قليلا محل a_0 و a_1/α وهما الثابتان اللذان يجب أن تعين قيمتهما بدلالة شروط الحدود . وثابت الفصل ليس ثابتا اختياريا وذلك فيما يخص حل (٣٥) ، لأنه يظهر فى تلك المعادلة .

ويحصل على صورة بديلة للحل بالتعبير عن الدوال الزائدية بدلالة الدوال الأسية ، تجميع الحدود ، واختيار ثوابت اختيارية جديدة ، a' و B' ،

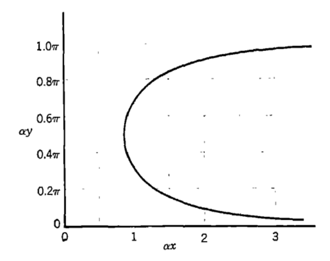
$$X = A'e^{\alpha x} + B'e^{-\alpha x}$$

وحل (٣٤) يتم عبر خطوات مماثلة ، مؤديا الى متسلسلتين للقوى تمثلان الجيب ، وجيب التمام ، ونحصل على

$$Y = C \cos \alpha y + D \sin \alpha y$$

ومنها يكون الجهد

$$V = XY = (A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x)(C \cos \alpha y + D \sin \alpha y) \quad (٣٦)$$



شكل ٧ ـ ٤ : رسم بيانى للدالة مزدوجة القيمة $\alpha y = \sin^{-1}(1/\sinh \alpha x)$ و $0 < \alpha < \pi$.

قبل وصف مسألة فيزيائية واجبار الثوابت التى تظهر فى (٣٦) ان تحقق شروط الحدود المفروضة ، دعنا نعتبر الطبيعة الفيزيائية لمجال الجهد المعطى باختيار بسيط لهذه الثوابت . بأن ندع $A = 0$, $C = 0$ و $BD = V_1$ نحصل على

$$V = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha y \quad (٣٧)$$

العامل $\sinh \alpha x$ يساوى صفرا عند $x = 0$ ويزيد تدريجيا مع x ، وعاجلا يصبح تقريبا ذا صورة أسية لأن

$$\sinh \alpha x = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$$

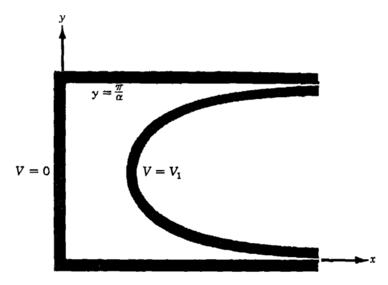
الحد $\sin \alpha y$ يجعل الجهد صفرا عند $y = 0$, $y = \pi/\alpha$, $y = 2\pi/\alpha$ وهلم جرا . ولذلك يمكننا أن نضع مستويات موصلة ذات جهد ـ صفرى عند $x = 0$, $y = 0$ و $y = \pi/\alpha$. وأخيرا ، يمكننا أن نصف السطح متساوى ـ الجهد V_1 بوضع $V = V_1$ فى (٣٧) ، حاصلين على

$$\sinh \alpha x \sin \alpha y = 1$$

أو

$$\alpha y = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh \alpha x}$$

وهذه ليست معادلة مألوفة ، ولكن حاسبا يدويا ، أو مجموعة من الجداول يمكن أن يعطى قيما عددية كافية ليسمح لنا أن نرسم αy كدالة فى αx . مثل هذا المنحنى مبين فى شكل ٧ ـ ٤ . لاحظ أن المنحنى مزدوج ـ القيمة ومتماثل حول الخط $\alpha y = \pi/2$ عندما تحصر αy فى الزاوية بين 0 و π .



شكل ٧ ـ ٥ مقطع عرضى للأسطح متساوية ـ الجهد :
$V = 0$ و $V = V_1$ لمجال الجهد $V = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha y$

ومعلومات شكل ٧ ـ ٤ نقلت مباشرة الى الأسطح متساوية ـ الجهد الموصلة $V = 0$ و$V = V_1$ فى شكل ٧ ـ ٥ . والأسطح مبينة بمقطع عرضى ، حيث أن الجهد ليس دالة فى z .

وانه من غير المحتمل جدا اننا سنسأل فى أى وقت لنجد مجال الجهد لهذه الأقطاب الكهربى غريبة التشكيل ، ولكننا يجب أن نضع فى أذهاننا امكانية ضم عدد من المجالات لها الصورة المعطاة بـ (٣٦) أو (٣٧) ومحققة بذلك شروط الحدود لمسائل عملية أكثر . وننهى هذا الفصل بمثل هذا المثال .

والمسألة التى ستحل هى تلك المبينة فى شكل ٧ ـ ٦ . وشروط الحدود المبينة هى $V = 0$ عند $x = 0$, $y = 0$ و $y = b$ و $V = V_0$ عند $x = d$ لكل y بين 0 و b . ومن الواضح فى الحال أن مجال الجهد المعطى بـ (٣٧) والمخطط فى شكل ٧ ـ ٥ يحقق

اثنين من شروط الحدود الأربعة . وشرط ثالث $V = 0$ عند $y = b$ ، يمكن أن يتحقق باختيار α ، لأن تعويض هذه القيم فى (٣٧) يؤدى الى المعادلة

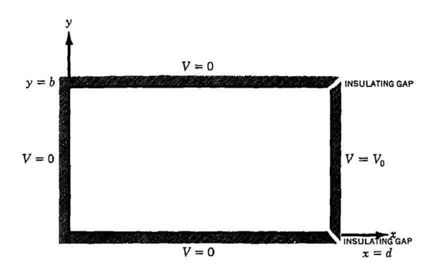
$$0 = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha b$$

التى يمكن أن تحقق بوضع

$$\alpha b = m\pi \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

أو

$$\alpha = \frac{m\pi}{b}$$



شكل ٧ ـ ٦ : مسألة جهد تتطلب جمعا لانهائياً للمجالات بالصورة $V = V_1 \sinh \alpha x \sinh \alpha y$. فى الفصل السادس حلل تشكيل مشابه بطريقة التكرار .

وعلى ذلك تعطى دالة الجهد

$$V = V_1 \sinh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \qquad (٣٨)$$

الجهد المضبوط عند $x = 0$, $y = 0$ و $y = b$ ، بغض النظر عن اختيار m أو قيمة V_1 .
ومن غير الممكن أن نختار M أو m بحيث أن $V = V_0$ عند $x = d$ لأى ولكل قيمة لـ y بين 0 و b . ويجب أن نُجمع عددا لانهائيا من هذ المجالات ، كل بقيمة مختلفة لـ m وقيمة مناظرة لـ V_1 ،

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} V_{1m} \sinh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

الرمز السفلى على V_{1m} يشير الى أن عامل الاتساع هذا سيكون له قيم مختلفة لكل قيمة مختلفة لـ m . ويتطبيق شرط الحدود الأخير الآن ،

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} V_{1m} \sinh \frac{m\pi d}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \qquad (0 < y < b,\ m = 1, 2, \ldots)$$

لأن $V_{1m} \sinh (m\pi d/b)$ دالة فى m فقط ، يمكننا أن نبسط التعبير باستبدال هذا العامل بـ c_m ،

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi y}{b} \qquad (0 < y < b,\ m = 1, 2, \ldots)$$

هذه متسلسلة فوريرجيبية ، والمعاملات c_m يمكن أن تحدد بطرق متسلسلة فورير العيارية[1] اذا تمكنا من تفسير V_0 كدالة دورية فى y . لأن مسألتنا الفيزيائية محدودة بمستويات موصلة عند $y = 0$ و $y = b$ ، واهتمامنا فى الجهد لايمتد خارج هذه المنطقة ، يمكننا أن نعرف الجهد عند $x = d$ بأى طريقة نختار لـ y خارج المدى 0 الى b . ربما يحصل على أبسط تعبير دورى باختيار المسافة $0 < y < b$ كنصف الدورة واختيار $V = V_0$ فى نصف الدورة المجاور ، أو

$$V = V_0 \qquad (0 < y < b)$$

$$V = -V_0 \qquad (b < y < 2b)$$

وعلى ذلك تكون المعاملات c_m هى

$$c_m = \frac{1}{b}\left[\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi y}{b}\, dy + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{m\pi y}{b}\, dy\right]$$

مؤدية الى

$$c_m = \frac{4V_0}{m\pi} \qquad (m \text{ odd})$$

$$= 0 \qquad (m \text{ even})$$

مع ذلك ، $C_m = V_{1m} \sinh (m\pi d/b)$ ، ولذلك

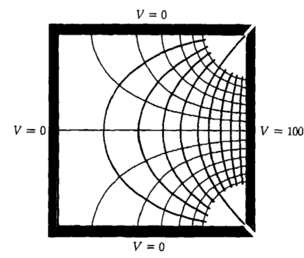
$$V_{1m} = \frac{4V_0}{m\pi \sinh (m\pi d/b)} \qquad (m \text{ odd only})$$

(١) متسلسلات - فورير مناقشة تقريبا فى كل كتاب هندسة كهربية عن نظرية الدوائر . والمؤلف منحاز لمرجع Hagy and Kemmerly المعطى فى بيان عند نهاية هذا الفصل .

التى يمكن أن تعوض فى (٣٨) لتعطى دالة الجهد المطلوبة ،

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{1,\,odd}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sinh\,(m\pi x/b)}{\sinh\,(m\pi d/b)} \sin \frac{m\pi y}{b} \qquad (٣٩)$$

وتخطيط هذا المجال يمكن الحصول عليه بتقدير قيمة (٣٩) عند عدد من النقط ورسم متساويات ـ الجهد بالاستكمال من الداخل بين هذه النقط ، اذا وضعنا $b = d$ و $V_0 = 100$ ، تكون المسألة مطابقة مع تلك التى استخدمت كمثال فى مناقشة طريقة التكرار .



شكل ٧ ـ ٧ : خريطة المجال المناظر لـ

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{1,\,odd}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi x/b)}{\sinh(m\pi d/b)} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

مع $b = d$ و $V_0 = 100\text{V}$.

وباختبار أحد نقط الشبكة لتلك المسألة ، ندع $y = b/2 = d/2$, $x = d/4 = b/4$ و $V_0 = 100$ ونحصل على

$$\begin{aligned} V &= \frac{400}{\pi} \sum_{1,\,odd}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sinh\, m\pi/4}{\sinh\, m\pi} \sin m\pi/2 \\ &= \frac{400}{\pi} \left(\frac{\sinh\, \pi/4}{\sinh\, \pi} - \frac{1}{3} \frac{\sinh\, 3\pi/4}{\sinh\, 3\pi} + \frac{1}{5} \frac{\sinh\, 5\pi/4}{\sinh\, 5\pi} - \cdots \right) \\ &= \frac{400}{\pi} \left(\frac{0.8687}{11.549} - \frac{5.228}{3 \times 6{,}195.8} + \cdots \right) \\ &= 9.577 - 0.036 + \cdots \\ &= 9.541 \text{ V} \end{aligned}$$

ومتساويات الجهد مرسومة لتزايدات مقدارها 10V فى شكل ٧ ـ ٧ ، وقد أضيفت خطوط التدفق بيانيا لتعطى تخطيطا منحنى الخطوط .

وقد كانت المادة المغطاة فى هذه المناقشة للحل على صورة الضرب أكثر صعوبة من كثير من العمل السابق ، وعلاوة على ذلك ، قد قدمت ثلاثة أفكار جديدة . الطريقة التقنية الجديدة الأولى كانت الفرض أن الجهد يمكن أن يعبر عنه كحاصل ضرب دالة فى x ودالة فى y ، والفصل الناتج لمعادلة لابلاس الى معادلتين تفاضليتين عاديتين أبسط . استخدمت الطريقة الجديدة الثانية عندما فرض حل على صورة متسلسلة قوى لانهائية كحل لاحدى المعادلات التفاضلية العادية . أخيرا ، اعتبرنا مثالا تطلب ضم عدد لانهائى من حلول أسهل على صورة الضرب ، وكلا منها له اتساع مختلف وتغير مختلف فى أحد الاتجاهات الاحداثية . كل هذه الطرق التقنية فعالة جدا . وهى مفيدة فى كل نظم الاحداثيات ، ويمكن أن تستخدم فى مسائل يتغير فيها الجهد مع الاحداثيات الثلاثة كلها .

وقد أدخلنا الموضوع هنا فحسب ، ويمكن الحصول على معلومات أكثر من المراجع المدرجة عند نهاية الفصل ، وعديد منها يخصص مئات الصفحات لحل معادلة لابلاس .

ت ٧ ـ ٦ : (أ) بين أن (٣٢) تحقق بتعبير الجهد $V = 100\, e^{-\pi y} \cos \pi x$.
(ب) عين القيمة العددية لـ α^2 فى (٣٣) .

الاجابة : صحيح ، -9.87 .

ت ٧ ـ ٧ : الحوض المستطيل المبين فى شكل ٧ ـ ٦ أبعاده $b = 1$ و $d = 2$. اذا كان : $V_0 = 500$V ، أوجد V : عند (أ) $x = 1/2$ ، $y = 1/2$ ، (ب) مركز الحوض .

الاجابة : 5.47V ; 27.4V

مراجع مقترحة :

1 - Dekker, A.J. (انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس) :

2 - Hayt, W. H., Jr., and J. E. Kemmerly: "Engineering Circuit Analysis," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1978.

3 - Pugh, E.M., and E.W. Pugh: "Principles of Electricity and Magnetism", 2d ed., Addison - Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1970.

هذا الكتاب يقدم وجهة نظر الفيزيائى للكهربية والمغناطيسية ولكن طلبة الهندسة الكهربية يجب أن يجدوه سهلا فى القراءة . حل معادلة لابلاس بعدد من الطرق مناقش فى الفصل الرابع .
(انظر المراجع المقترحة للفصل السادس)
4 - Ramo, S., J.R. Whinnery, and T. Van Duzer.
مناقشة أكثر اكتمالا وتقدما لطرق حل معادلة لابلاس معطاة فى الفصل الثالث .
5 - Smythe, W.R.: "Static and Dynamic Electricity", 3d ed., McGraw - Hill Book Company, New York, 1968.
6 - Weber, E. معالجة متقدمة لنظرية الجهد معطاة فى الفصل الرابع :
(انظر المراجع المقترحة للفصل السادس)

هناك عدد هائل من حلول الجهد معطاة مع المراجع الأصلية .

مسائل :

١ - عين اللابلاسى لـ : (أ) $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ ، (ب) $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (جـ) $1/\rho$ ، (د) $1/r$.

٢ - (أ) بين أن مجال الجهد $V = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4$ يحقق معادلة لابلاس . (ب) ارسم تخطيطيا تقاطعات الأسطح متساوية - الجهد $V = 0$ و $V = 4$ مع المستويات الاحداثية الثلاثة لـ $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 3$.

٣ - اذا أعطيت مجال الجهد $V = 5x^2 yz + ky^3z$ ، (أ) عين k بحيث أن تتحقق معادلة لابلاس . (ب) لقيمة k هذه ، حدد اتجاه E عند $(2,1,-1)$ بوحدة متجه .

٤ - عين قيمة كثافة الشحنة عند النقطة $P(2,0,-3)$ فى فضاء حر لمجالات الجهد : (أ) $V = 5x^2y^2z^2$ ، (ب) $V = 5(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$.

٥ - لكل مجال جهد معطى فيما بعد ، أوجد قيمة اللابلاسى عند نقطة الأصل وقرر ما اذا كان المجال يحقق معادلة لابلاس أم لا : (أ) $V = (x + 1)^2 (y + 1) - z^2$ ، (ب) $V = e^{-3x} \sin 5y \sinh 4z$.

٦ - اذا أعطيت مجال الجهد $V = 20\rho^2 \cos 2\phi$: (أ) بين أن $\nabla^2 V = 0$ ، (ب) ارسم تخطيطيا الأسطح متساوية - الجهد $V = 0$ و $V = 20$ فى الثمن الأول .

٧ - لأى قيمة لـ k تكون $V = V_0 \ln(\tan k\theta)$ حلا لمعادلة لابلاس فى الاحداثيات الكروية ؟
(ب) اذا كان $K = 1$ و $V_0 = 100$V ، ما هى كثافة الشحنة الحجمية عند $r = 2$, $\theta = 45°$, $\phi = 0°$ فى فضاء حر ؟

٨ ـ مفتاح الباب النحاسى المقدم فى قسم ٣ ـ ٢ عند جهد $100V$ وهو بداخل علبة لنوع ما من الحساء عند $57V$. دع كلا من $V_1 (x,y,z)$ و$V_2 (x,y,z)$ يحقق معادلة لابلاس فى المنطقة بين المفتاح والحائط الداخلى للعلبة . وأيضا كل دالة جهد تكون عند $100V$ عند سطح المفتاح و $57V$ على العلبة .

(أ) هل تحقق الدوال $V_1 + V_2$, $V_1 - 80$ و $2V_1 - 3V_3$ معادلة لابلاس فى المنطقة بين المفتاح والعلبة ؟ .

(ب) هل الدوال $V_1 + V_2$, $V_1 - 80$ و $2V_1 - 3V_2$ لها القيم المضبوطة على المفتاح وعلى سطح العلبة الداخلى ؟

(جـ) قرر ماذا كانت هذه الدوال مطابقة :

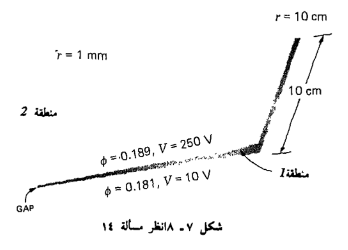
لـ V_1 أم لا : V_2 , $V_1 + V_2$, $V_1 - 80$ و $2V_1 - 3V_2$.

٩ ـ سأل استاذ طلبة فصله لمرحلة البكالوريوس أن يجدوا دالة جهد تحقق معادلة لابلاس ، وتحقق شروط الحدود ، $V = 0$ عند $x = 0$ و $V = 1$ عند $x = 1$. اقتُرِحت ثلاثة حلول . اقترح طالب منهم بتردد $V_1 = x$. على أن الاستاذ يفكر فى $V_2 = x + e^{\pi y}\sin \pi x$. ولكن طالب الدراسات العليا العامل بالفصل له المام أكثر بالرياضة ويصل الى :

$V_3 = x + \sum^{\infty} [(-1)^n/(n+1)]e^{n\pi y} \sin n\pi x$ (أ) بين أن كل الدوال الثلاث تحقق معادلة لابلاس ، وكذلك تحقق شروط الحدود . (ب) عندئذ تبعا لنظرية الوحدانية تكون الثلاث متطابقة . ما هو الخطأ اذن ؟

١٠ ـ لوحان موصلان كبيران متوازيان عند $x = -1cm$ و $x = 3cm$ عند جهدى V_a و V_b بالترتيب . والمنطقة بين اللوحين هى ثانى أكسيد كربون . الجهد عند $x = -0.5cm$ هو $70V$ بينما ذاك عند $x = 1.5$ هو $450V$. أوجد V_a , V_b , E ، والشحنة لكل وحدة مساحة على اللوح الموجب .

١١ ـ يوجد مجال جهد $V = 40x - 20y + 35z + 10kV$ بين لوحين موصلين



شكل ٧ ـ ٨انظر مسألة ١٤

متوازيين ، كل له مساحة مقدارها 120cm^2 . اللوحان يفصلهما 0.8mm . اذا كان المتوسط بين اللوحين هواء ، أوجد الفولتية بين اللوحين والسعة .

١٢ ـ اسطوانتان موصلتان متحدتى المحور تقعان عند $\rho = 4\text{cm}$ و $\rho = 15$ وقيمة E هى $20\mathbf{a}_\rho\text{kV/m}$ عند $\rho = 6\text{cm}$ وجهد الموصل الموجب أكثر هو 200V . أوجد : (أ) مقدار فرق الجهد بين الموصلين ، و (ب) سعة النظام ، اذا كان الوسط بين الاسطوانتين له $\epsilon_R = 2.7$.

١٣ ـ تمثل معادلة (١٥) فى قسم ٧ ـ ٣ الحل العام فى الاحداثيات الاسطوانية لمعادلة لابلاس لمجال جهد يتغير فقط مع ρ . انتقى A و B بحيث أن : (أ) $V = 250\text{V}$ عند $\rho = 1\text{mm}$ و $V = 1{,}000\text{V}$ عند $\rho = 5\text{mm}$ ، (ب) $V = 0$ عند $\rho = 4\text{mm}$ و $E_\rho = 15{,}000\text{V/m}$ عند $\rho = 0.8\text{mm}$ ، (جـ) $V = 10\text{V}$ و $E_\rho = 10\text{kV/m}$ عند $\rho = 4\text{mm}$.

١٤ ـ المستويان النصف قطريين الموصلان المبينان فى شكل ٧ ـ ٨ موضوعان فى الهواء . للمنطقة 1 بين المستويين ، أوجد : (أ) تعبير لمجال الجهد ، (ب) E ، (جـ)D ، (د) ρ_s على السطح السفلى للمستوى العلوى ، (هـ) Q على السطح السفلى للمستوى العلوى . (و) أعد (أ) الى (جـ) للمنطقة 2 بأن تدع موضع المستوى العلوى يكون $\phi = 0.189 - 2\pi$ ، ثم أوجد ρ_s و Q على السطح العلوى للمستوى العلوى . (ز) أوجد الشحنة الكلية على السطح العلوى والسعة بين المستويين .

١٥ ـ اذا أعطيت مجال الجهد فى الاحداثيات الاسطوانية ، $V = 1{,}000\phi + 50\text{V}$ فاحسب القيم عند $P(0.4, 30°, 1.1)$ فى الهواء لـ (أ) V ، (ب) E ، (جـ) كثافة الطاقة . (د) عين الطاقة الكلية المختزنة فى المنطقة : $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$ ، $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ ، $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$.

١٦ ـ (أ) حل معادلة لابلاس لمجال الجهد فى المنطقة المتجانسة بين كرتين موصلتين متحدتى المركز نصفى قطريهما a و b ، $b > a$ اذا كانت $V = 0$ عند $r = b$ و $V = V_0$ عند $r = a$. (ب) أوجد السعة بينهما .

١٧ ـ المنطقة $2 < r < 5\text{m}$ بين كرتين موصلتين متحدتى ـ المركز تحتوى على عازل غير متجانس له $\epsilon_R = (r + 1)/r$. (أ) هل معادلة لابلاس محققة فى المنطقة بين الكرتين ؟ (ب) اذا كانت الكرة الداخلية عند $V = 1{,}000\text{V}$ والخارجية عند $V = 200\text{V}$ ، أوجد $V(r)$. (جـ) ماهى السعة بين الكرتين ؟

١٨ ـ أوجد V كدالة فى r فى الاحداثيات الكروية اذا كان (أ) $V = 200$ عند $R = 0.2\text{m}$ و $V = 50\text{V}$ عند $r = 0.25\text{m}$ ، (ب) $V = 200\text{V}$ عند $r = 0.2\text{m}$ و $E_r = 6{,}000\text{V/m}$ عند $r = 0.3\text{m}$ ، (جـ) $V = 200\text{V}$ عند $r = 0.2$ ، والشحنة الكلية على السطح الخارجى لكرة موصلة عند $r = 0.2$ فى الهواء هى $2\mu\text{C}$.

١٩ ـ مخروطان موصلان ، موضوعان عند $\theta = 30°$ و $\theta = 75°$ ، مفصولان بثغرة عازلة عند نقطة الأصل . دع جهد المخروط الداخلى يكون $20V$ ، اذا كانت : $E = 50a_\theta V/m$ عند $P\ (0.5, \theta = 60°, \phi = 130°)$ ، أوجد : (أ) V عند : P ، (ب) فرق الجهد بين المخروطين .

٢٠ ـ مخروط معدنى ، معرف بـ $\theta = 0.01°$ ، حاد جدا مفصول عن المستوى $z = 0$ بقطعة عزل صغيرة . اذا كان المخروط عند $60V$ والمستوى عند $0V$ عين : (أ) زاوية المخروط الواقع عند متساوى ـ الجهد الأوسط (ب) المعادلة والأسم الوصفى للسطح الذى عليه $|E| = 100 V/m$.

٢١ ـ شحنة موزعة بطريقة متماثلة كرويا بالصورة $\rho = \rho_0 a^5 / [r(r^2 + a^2)^2]$. (أ) كون وحل معادلة بواسون لـ $V(r)$ تحت شروط الحدود أن $E_r = 0$ عند $r = 0$ و $V_r \to 0$ عندما $r \to \infty$. (ب) أوجد $V(r)$ مرة أخرى ، ولكن استخدم قانون جاوس وتكامل خطى هذه المرة .

٢٢ ـ دع توزيع الشحنة لشكل ٧ ـ ٣أ تمثل بـ $\rho = \rho_0 (x/a) e^{-x/a}$ لـ $x > 0$ و $\rho = \rho_0 (x/a)\, e^{x/a}$ لـ $x < 0$. (أ) بين أن $\rho_{max} = 0.368 \rho_0$ وأنها تحدث عند $x = a$. (ب) استخدم استنتاجا مماثلا لذاك المعطى فى قسم ٧ ـ ٤ لتبين أن : $C = dQ/dV_0 = \epsilon\, S/(8a)$.

٢٣ ـ افرض أن مجال جهد فى احداثيات كروية ليس دالة فى ϕ ويمكن أن يعبر عنه كحل فى صورة الضرب $V = R\Theta$ ، حيث $R = R(r)$ و $\Theta = \Theta(\theta)$ عوض التعبير المفترض فى معادلة لابلاس ثم أجرى فصل الدوال فى r و θ باستخدام ثابت فصل α^2 . (أ) بين أن المعادلة التفاضلية العادية فى r التى تنتج هى $R'' + 2R'/r - \alpha^2 R/r^2 = 0$. (ب) عين المعادلة التفاضلية العادية المناظرة فى θ .

٢٤ ـ حل فى صورة الضرب لمعادلة لابلاس فى بعدين معطى بالصورة $V_1 = X_1 Y_1$ حيث X_1 و Y_1 دالتين فى x و y فقط ، بالترتيب . قرر ما اذا كانت الدوال الاتية تحقق معادلة لابلاس أم لا : (أ) $V_a = X_1 - Y_1$ ، (ب) $V_b = Y_1$ ، (جـ) $V_c = X_1 Y_1 + y$ ، (د) $V_d = 2X_1 Y_1$ (هـ) $V_e = X_1 Y_1 + x^2 - y^2$.

٢٥ ـ اذا أعطيت المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية $X'' + 2x X' - X = 0$ ، افرض حلا فى صورة متسلسلة قوى لانهائية واحسب قيما عددية لـ a_2 الى a_6 اذا كانت $a_1 = -2\ ,\ a_0 = 1$.

٢٦ ـ حل للجهد عند مركز الحوض المربع لشكل ٦ ـ ١٥ اذا كانت $V_1 = V_3 = V_4 = 0$ و V_2 تتزايد خطيا من 0 عند اسفل الجانب الأيمن الى $200V$ عند أعلى نقطة .

الفصل الثامن

المجال المغناطيسى الثابت

عند هذه النقطة يجب أن يكون مفهوم المجال شيئا مألوفا . لأننا قبلنا أولا القانون التجريبى للقوى الموجودة بين شحنتين نقطيتين وعرفنا شدة المجال الكهربى أنها القوة لكل وحدة شحنة على شحنة اختبار فى وجود شحنة ثانية ، وقد قابلنا مجالات عديدة . وهذه المجالات ليس لها أساس فيزيائى حقيقى ، لأن القياسات الفيزيائية يجب أن تكون دائما بدلالة القوى على الشحنات فى معدات الكشف . تلك الشحنات التى هى المنبع تسبب قوى يمكن قياسها ، تؤثر على شحنات أخرى ، التى يمكن أن نفكر فيها كشحنات مكشاف والحقيقة بأننا ننسب المجال لشحنات المنبع ثم نعين تأثير هذا المجال على شحنات مكشاف تعنى مجرد تقسيم المسألة الأساسية الى جزئين للتيسير علينا .

سنبدأ دراستنا للمجال المغناطيسى بتعريف المجال المغناطيسى نفسه ونوضح كيف ينشأ من توزيع تيار . وسيناقش فى الفصل التالى تأثير هذا المجال على التيارات الأخرى ، أو النصف الثانى للمسألة الفيزيائية ، وكما فعلنا مع المجال الكهربى سنقصر مناقشتنا الابتدائية على حالات الفضاء الحر ، أما تأثير الوسط المادى فسيدخر للمناقشة فى الفصل التالى .

وعلاقة المجال المغناطيسى الثابت بمصدره أكثر تعقيدا من علاقة المجال الكهروستاتيكى بمصدره . وسنجد من الضرورى أن نتقبل عدة قوانين مؤقتا على أساس الثقة التامة فحسب ، محيلين اثباتهم الى القسم النهائى (الصعب نوعا) من هذا الفصل . وهذا القسم يمكن أن يحذف عند مقابلة مجالات مغناطيسية لأول مرة . وهو متضمن ليجعل تقبل القوانين أيسر قليلا ، وبرهان القوانين موجود فعلا وهو متاح لغير المصدقين أو للطالب الأكثر تقدما .

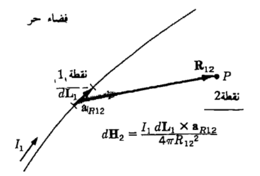
٨ - ١ : قانون بيو - سافار

مصدر المجال المغناطيسى الثابت قد يكون مغناطيسيا دائما ، مجالاً كهربيا يتغير خطيا مع الزمن ، أو تيارا مستمرا . وسنهمل عامة المغناطيس الدائم وندخر المجال الكهربى المتغير مع الزمن لمناقشته فيما بعد . وعلاقاتنا الحالية ستخص المجال المغناطيسى الناتج عن عنصر تيار مستمر تفاضلى فى فضاء حر .

ويمكننا أن نفكر فى هذا العنصر التفاضلى للتيار كقسم متناهى الصغر لموصل فتيلى حامل للتيار ، حيث الموصل الفتيلى هو الحالية النهائية لموصل اسطوانى ذى مقطع دائرى عندما يقترب نصف القطر من الصفر . نفرض تيارا I ينساب فى طول تفاضلى متجه $d\mathbf{L}$ من الفتيلة . عندئذ ينص قانون بيو ـ سافار(١) أنه عند أى نقطة p مقدار شدة المجال المغناطيسى الناتجة عن عنصر تفاضلى يتناسب مع حاصل ضرب التيار ، مقدار الطول التفاضلى ، وجيب الزاوية الواقعة بين الفتيلة وخط يصل الفتيلة الى النقطة P حيث يُرغب المجال . مقدار شدة المجال المغناطيسى يتناسب عكسيا مع مربع المسافة من العنصر التفاضلى الى النقطة p اتجاه شدة المجال المغناطيسى عمودى على المستوى المحتوى على الفتيلة التفاضلية والخط المرسوم من الفتيلة الى النقطةP . من العمودين الممكنين ، فان ذلك الذى يختار هو الذى فى اتجاه تقدم بريمة يمينية مدارة من $d\mathbf{L}$ خلال الزاوية الأصغر الى الخط من الفتيلة الى P وباستخدام وحدات mks المرشدة ، يكون ثابت التناسب $1/4\pi$ قانون بيو ـ سافار ، الموصوف آنفا فى حوالى *150* كلمة ، يمكن أن يكتب باختصار باستخدام تدوين المتجهات بالصورة

$$d\mathbf{H} = \frac{I\, d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (١)$$

وحدات شدة المجال المغناطيسى H هى بجلاء أمبير لكل متر (A/m) . والشكل الهندسى موضح فى شكل ٨ ـ ١ . ويمكن استخدام الرموز السفلية لتبين النقطة التى تنتسب اليها كل كمية فى (١) .



شكل ٨ ـ ١ : قانون بيو ـ سافار يعبر عن شدة المجال المغناطيسى $d\mathbf{H}_2$ الناتجة من عنصر تيار تفاضلى $I_1\, d\mathbf{L}_1$ اتجاه $d\mathbf{H}_2$ الى داخل الصفحة .

اذا وضعنا عنصر التيار عند النقطة 1 ووضعنا النقطة P التى سيُعين المجال عندها بالنقطة 2 ، فحينئذ

---

(١) بيوو سافار كانا زملاء لامبير ، وثلاثتهم كانوا أساتذة للفيزياء فى College de France من حين لآخر . قانون بيو ـ سافار اقترح 1820 .

$$dH_2 = \frac{I_1\, dL_1 \times a_{R12}}{4\pi R_{12}^{\,2}} \qquad (٢)$$

وقانون بيو ـ سافار يسمى أحيانا قانون أمبير لعنصر التيار ، ولكننا سنبقى على التسمية السابقة بسبب احتمال الخلط مع قانون أمبير الدائرى ، الذى سيقابل فيما بعد .

وفى بعض الأوجه ، قانون بيو ـ سافار مذُكر بقانون كولوم عندما يكتب ذلك القانون لعنصر تفاضلى للشحنة ،

$$dE_2 = \frac{dQ_1 a_{R12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^{\,2}}$$

كلاهما يُظهر اعتماداً على المسافة بقانون تربيع عكسى ، وكلاهما يُظهر علاقة خطية بين المصدر والمجال . والفرق الرئيسى يظهر فى اتجاه المجال .

ومن غير الممكن أن نحقق تجريبيا قانون بيو ـ سافار كما هو معبر عنه بـ (١) أو (٢) لأن العنصر التفاضلى للتيار لايمكن أن يُعزل . وقد قصرنا اهتمامنا على التيارات المستمرة فقط ، ولذلك كثافة الشحنة ليست دالة فى الزمن . ومعادلة الاستمرارية فى قسم ٥ ـ ٢ ، معادلة (٥) .

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

لذلك تبين أن

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

أو بتطبيق نظرية الانفراج

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

التيار الكلى العابر لأى سطح مغلق يساوى صفرا ، هذا الشرط يمكن أن يتحقق فقط بفرض انسياب تيار حول مسار مغلق . هو هذا التيار المار فى دائرة مغلقة الذى يجب أن يكون مصدرنا التجريبى ، وليس العنصر التفاضلى .

ويتبع أن الصورة التكاملية لقانون بيو ـ سافار هى التى يمكن أن تحقق تجريبيا

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I\, d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \qquad (٣)$$

معادلة (١) أو (٢) ، طبعا ، تؤدى مباشرة الى الصورة التكاملية (٣) ، ولكن تعبيرات تفاضلية أخرى تعطى أيضا نفس التكوين التكاملى . وأى حد تكامله حول مسار مغلق صفر يمكن أن يضاف الى (١) . أى أن ، أى مجال محافظ يمكن أن يضاف الى (١) وتدرج أى مجال مقياسى دائما يعطى مجالا محافظا ، ويمكننا لذلك أن نضيف حدا ∇G الى (١) ، حيث G هو مجال مقياسى عام ، بدون أدنى تغيير فى (٣) . هذا التعديل على (١) أو (٢) ذكر لنبين أنه اذا سألنا فيما بعد بعض أسئلة حمقاء ، غير خاضعة لأى تحقيق تجريبى ، بخصوص القوة المؤثرة بواسطة عنصر تفاضلى للتيار على آخر ، فيجب أن نتوقع إجابات حمقاء .

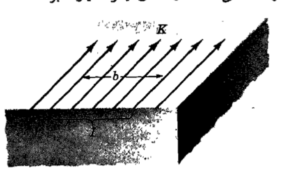
ويمكن أيضا أن يُعبر عن قانون بيو ـ سافار بدلالة المنابع الموزعة ، مثل كثافة تيار J ، وكثافة تيار سطحية K . والتيار السطحى ينساب فى لوح ذى سمك متناهى الصغر ، وكثافة التيار J ، مقاسة بالأمبير لكل متر مربع ، تكون لذلك لانهائية . ولكن كثافة التيار السطحية تقاس بالأمبير لكل متر عرض ويرمز لها بـ K . اذا كانت كثافة التيار السطحية منتظمة ، يكون التيار الكلى I فى أى عرض b .

$$I = Kb$$

حيث قد فرضنا أن العرض b مقاس عموديا على الاتجاه الذى ينساب فيه التيار . والشكل الهندسى موضح بشكل ٨ ـ ٢ . ولكثافة تيار سطحية غير منتظمة ، يكون التكامل ضروريا :

$$I = \int K \, dn \qquad (٤)$$

حيث dn عنصر تفاضلى للمسار الذى يمر التيار عبره .



شكل ٨ ـ ٢ التيار الكلى I خلال عرض متعامد b توجد فيه كثافة تيار سطحية منتظمة K هو Kb

على ذلك عنصر التيار التفاضلى $Id\mathbf{L}$، حيث $d\mathbf{L}$ فى اتجاه التيار ، يمكن أن يعبر عنه بدلالة كثافة التيار السطحية K أو كثافة التيار J ،

(٥) $$I\, d\mathbf{L} = \mathbf{K}\, dS = \mathbf{J}\, dv$$

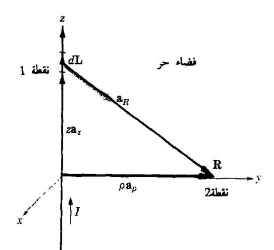
وصور بديلة لقانون بيو ـ سافار يحصل عليها ،

(٦) $$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{a}_R\, dS}{4\pi R^2}$$

و

(٧) $$\mathbf{H} = \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R\, dv}{4\pi R^2}$$

ويمكن أن نوضح تطبيق قانون بيو ـ سافار باعتبار فتيلة مستقيمة طولها لانهائى . سنطبق (٢) أولا ثم نكامل . وبالطبع هذا هو نفسه مثل استخدام الصورة التكاملية (٣) فى المقام الأول [١] .



شكل ٨ ـ ٣ : فتيلة مستقيمة لانهائية الطول تحمل تيارا مستمرا I . المجال عند النقطة 2 هو $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$

بالرجوع الى شكل ٨ ـ ٣ ، يجب أن نتعرف على تماثل هذا المجال . ولايمكن أن يوجد تغير مع z أو مع ϕ لذلك نختار نقطة 2 ، التى عندها سنعين المجال ، فى المستوى $z = 0$ ، ولدينا

$$\mathbf{R}_{12} = \rho\mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z$$

(١) المسار المغلق للتيار يمكن أن يعتبر أنه يشمل فتيلة رجوع موازية للفتيلة الأولى ومبعدة لانهائيا عنها . موصلا خارجيا متحد المحور نصف قطره لانهائى هو امكان نظرى آخر . عمليا ، المسألة هى مستحيلة ، ولكن يجب أن ندرك أن إجابتنا ستكون دقيقة الى حد بعيد بالقرب من سلك مستقيم طويل جدا له مسار عودة للتيار بعيد .

لذلك

$$\mathbf{a}_{R12} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

فى الاحداثيات الاسطوانية ، نحصل على

$$d\mathbf{L} = \rho \mathbf{a}_\rho + \rho\, d\phi \mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z$$

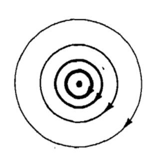
والمسار الذى يسرى فيه التيار مُعرف بـ $d\rho = 0$ و $d\phi = 0$. على ذلك ، تصبح (٢)

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I\, dz\mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

لأن التيار موجه فى اتجاه زيادة قيم z ، تكون النهايات ∞ — و ∞ على التكامل ، ونحصل على

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\, dz\mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\, dz\mathbf{a}_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$



شكل ٨ - ٤ : خطوط انسياب شدة المجال المغناطيسى حول فتيلة مستقيمة طولها لانهائى تحمل تيارا مستمرا I .

اتجاه I الى داخل الصفحة .

عند هذه النقطة يجب فحص وحدة المتجه $\mathbf{a}_\phi$ تحت علامة التكامل ، لأنها ليست ثابتة دائما ، كماهى وحدات المتجهات لنظام الاحداثيات الكرتيزية . المتجه يكون ثابتا عندما يكون مقداره واتجاهه كلاهما ثابتين . ووحدة المتجه بالتأكيد لها مقدار ثابت ،

ولكن اتجاهها قد يتغير . هنا $\mathbf{a}_\phi$ تتغير مع الاحداثى ϕ ولكن ليس مع ρ أو z . لحسن الحظ ، التكامل بالنسبة لـ z ، و $\mathbf{a}_\phi$ ثابتة فى هذه الحالة ويمكن أن تخرج من تحت علامة التكامل ،

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi}\left.\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{\infty}$$

و

$$\boxed{\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi} \qquad (٨)$$

مقدار المجال ليس دالة فى ϕ أو z ويتغير عكسيا مع المسافة من الفتيلة . اتجاه متجه شدة المجال المغناطيسى محيطى . ولذلك تكون خطوط الانسياب دوائر حول الفتيلة ، ويمكن أن يخطط المجال فى مقطع عرضى كما فى شكل ٨ ـ ٤ .

وفواصل خطوط الانسياب تتناسب مع نصف القطر ، أو تتناسب عكسيا مع مقدار H . لكى نكون محددين ، فقد رُسمت خطوط الانسياب والمربعات المنحنية الخطوط فى أذهاننا . الى آلآن ليس لدينا إسما لعائلة الخطوط[١] العمودية على هذه الخطوط الانسيابية الدائرة ، ولكن المسافات الفاصلة لخطوط الانسياب قد ضبطت بحيث ينتج اضافة هذه المجموعة الثانية من الخطوط مجموعة مرتبة من المربعات منحنية الخطوط .

مقارنة شكل ٨ ـ ٤ مع تخطيط المجال الكهربى حول خط شحنة لانهائى تبين أن خطوط انسياب المجال المغناطيسى تُناظر بالضبط متساويات الجهد للمجال الكهربى ، وعائلة الخطوط العمودية التى لم تُسمّ (ولم ترسم) فى المجال المغناطيسى تناظر خطوط انسياب المجال الكهربى . وهذا التناظر ليس صدفة ، ولكن هناك عدة مفاهيم أخرى يجب التمكن منها قبل أن يمكن تحرى التناظر بين المجالات الكهربية المغناطيسية بشمول أكثر .

استخدام قانون بيو ـ سافار لايجاد H هو فى أوجه عدة مشابه لاستخدام قانون كولوم لايجاد E . كل يتطلب تعيين مكامل متوسط التعقيد يحتوى على كميات متجهة ، متبوع بتكامل . عندما كنا معنيين بقانون كولوم قمنا بحل عدد من الأمثلة ، متضمنة مجالات الشحنة النقطية ، خط شحنة ، ولوح من الشحنة . ويمكن أن يستخدم قانون

(١) اذا لم تتمكن من الانتظار ، انظر قسم ٨ ـ ٦ .

بيو - سافار لحل مسائل مناظرة فى المجالات المغناطيسية ، وبعض هذه المسائل يظهر الآن كتمارين عند نهاية الفصل أفضل من أن تكون أمثلة هنا .

وأحد النتائج المفيدة هى مجال عنصر تيار محدود الطول ، المبين فى شكل ٨ - ٥ . ينتج (أنظر المسألة رقم ١١ عند نهاية الفصل) ان H يعبر عنها بأكبر قدر من السهولة بدلالة الزاويتين α_1 وα_2 ، بما يطابق ما فى الشكل . تكون النتيجة

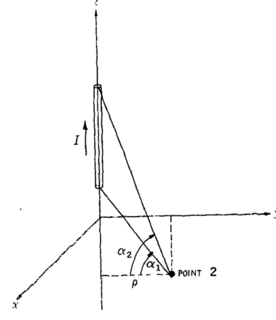
$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\mathbf{a}_\phi \qquad (٩)$$

اذا كانت احدى أو كلا النهايتين أسفل نقطة 2 ، فان α_1 أو كلا α_1 و α_2 يكون سالبا .

معادلة (٩) يمكن أن تستخدم لايجاد شدة المجال المغناطيسى المسبب بفتائل تيار مرتبة كتتابع لأجزاء خط مستقيم .

ت ٨ - ١ : أوجد المساهمة العنصرية التزايدية $\Delta\mathbf{H}$ لشدة المجال المغناطيسى عند نقطة الأصل ، المسببة بعنصر تيار فى فضاء حر $I\Delta\mathbf{L}$ مساو لـ : (أ) $3\pi\mathbf{a}_z\ \mu\text{Am}$ واقع عند : $(3, -4, 0)$ ، (ب) $3\pi\mathbf{a}_z\ \mu\text{A.m}$ واقع عند $(3, 2, -4)$ ، (جـ) $\pi(\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)\ \mu\text{Am}$ واقع عند $(5, 0, 0)$.

الاجابة : $9.60\mathbf{a}_x - 14.41\mathbf{a}_y$ nA/m , $-24\mathbf{a}_x - 18\mathbf{a}_y$ n A/m و $-20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z$ nA/m .



شكل ٨ - ٥ شدة المجال المغناطيسى المسببة بفتيلة تيار محدودة الطول على المحور Z هى : $(I/4\pi\rho)(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\mathbf{a}_\phi$.

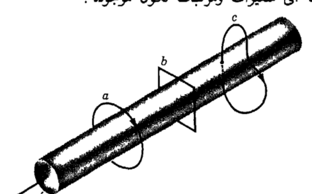
ت ٨ ـ ٢ : تيار مقداره 0.4A فى اتجاه a_z فى فتيلة موازيــة للمحـور z ومارة بالنقطة $(2,-4,0)$ فى فضاء حر . أوجد H عند $(0,1,0)$ اذا وقعت الفتيلة فى المســافة :
(أ) $-\infty < z < \infty$ ؛ (ب) $-3 < z < 3$ ؛ (جـ) $0 < z < \infty$

الاجابة :

$-5.49a_x - 2.20a_y$ mA/m ؛ $-5.34a_x - 2.14a_y$ mA/m ؛ $-10.98a_x - 4.39a_y$. mA/m

٨ ـ ٢ : قانون أمبير الدائرى :

بعد حل عدد من مسائل الكهروستاتيكية البسيطة بقانون كولوم ، وجدنا أن نفس المسائل يمكن أن تحل بسهولة اكثر باستخدام قانون جاوس كلما وجدت درجة عالية من التماثل . مرة أخرى توجد طريقة مناظرة فى المجالات المغناطيسية . هنا ، القانون الذى يساعدنا على أن نحل المسائل بسهولة أكثر معروف **بقانون أمبير الدائرى** ، أحيانا يسمى قانون الشغل لأمبير . وهذا القانون يمكن أن يستنتج من قانون بيو ـ سافار ، والاستنتاج قد أنجز فى قسم ٨ ـ ٧ . وللوقت الحاضر قد نتفق على أن نقبل قانون أمبير الدائرى مؤقتا كقانون آخر يمكن أن يُبرهن تجريبيا . واستخدامه سيتطلب أيضا اعتبار حذر لتماثل المسألة لتحديد أى متغيرات ومركبات تكون موجودة .



شكل ٨ ـ ٦ : موصل له تيار كلى I . التكامل الخطى لـ H حول المسارات المغلقة a و b يساوى I ، والتكامل حول المسار C أقل من I ، لأن التيار كله غير محصور بالمسار .

ينص قانون أمبير الدائرى على أن التكامل الخطى لـ H حول أى مسار مغلق يساوى بالضبط التيار المستمر المحصور بذلك المسار ،

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \qquad (١٠)$$

نُعرف التيار الموجب بأنه ينساب فى اتجاه تقدم بريمة يمينية مدارة فى الاتجاه الذى يعبر فيه المسار المغلق .

بالرجوع لشكل ٨ ـ ٦ ، الذى يبين سلكا دائريا يحمل تيارا مستمرا I ، التكامل الخطى لـ H حول المسارات المغلقة المرموز لها بالأحرف a و b ينتج اجابة مقدارها I ، والتكامل حول المسار المغلق C الذى يمر خلال الموصل يعطى اجابة أقل من I وهو بالضبط ذلك الجزءمن التيار الكلى المحصور بالمسار C . ومع أن المسارين a و b يعطيان نفس الاجابة ، فان المكامل مختلف بالطبع . ويوجهنا التكامل الخطى أن نضرب مركبة H فى اتجاه المسار بعنصر تزايد صغير من طول المسار عند نقطة من المسار ، نتحرك على طول المسار الى عنصر الطول التزايدى التالى ، ونكرر العملية ، مستمرين حتى يجتاز المسار كلية . لأن H سوف تختلف عامة من نقطة الى نقطة ، ولأن المسارين a و b ليسا متشابهين ، فان المساهمات للتكامل المعمولة بـ ، مثلا ، كل ملليمتر من طول المسار مختلفة تماما . الاجابات النهائية فقط هى نفسها .

ويجب أيضا أن نعتبر بالضبط ماذا يعنى بالتعبير « التيار المحصور بالمسار » . افترض أننا لحمنا دائرة معا بعد امرار الموصل مرة خلال شريط مطاط ، الذى سوف نستخدمه ليمثل المسار المغلق . بعض المسارات الغريبة والهائلة يمكن أن تنشأ بلى وعقد الشريط المطاط ، ولكن اذا لم يكسر شريط المطاط ولا الدائرة الموصلة ، فان التيار المحصور بالمسار هو ذلك المحمول بالموصل .

والآن دعنا نستبدل بشريط المطاط حلقة دائرية من فولاذ الزنبركات الذى يشد عبرها فرخ مطاط . والحلقة الصلب تكون المسار المغلق ، والموصل الحامل للتيار يجب أن يخترق فرخ المطاط اذا كان التيار سيحصر بالمسار . مرة أخرى ، يمكننا لىّ الحلقة الصلب ، ويمكننا أيضا أن نشوه فرخ المطاط بذفع قبضتنا فيه أو طيه بأى طريقة نشاء . موصل مفرد حامل للتيار لايزال يخترق الفرخ مرة ، وهذا هو المقياس الحقيقى للتيار المنحصر بالمسار . اذا أمررنا الموصل مرة خلال الفرخ من الأمام الى الخلف ومرة من الخلف الى الأمام ، فالتيار الكلى المحصور بالمسار هو المجموع الجبرى ، الذى يكون صفرا .

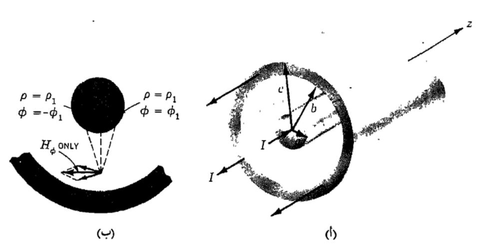
وبلغه أكثر عمومية ، اذا أعطينا مسارا مغلقا ، ندرك هذا المسار على أنه المحيط لعدد نهائى من الأسطح (ليست أسطحا مغلقة) . أى موصل حامل للتيار محصور بالمسار يجب أن يمر مرة خلال واحد من هذه الأسطح . وبالتأكيد يمكن أن تختار بعض هذه الأسطح بحيث يخترقهم الموصل مرتين فى اتجاه ومرة فى الاتجاه الآخر ، ولكن لايزال مجموع التيار الجبرى نفسه .

سنجد أن المسار المغلق عادة له طبيعة بسيطة للغاية ويمكن أن يرسم على مستوى . وعندئذ يكون أبسط الأسطح هو ذلك الجزء من المستوى المحصور بالمسار . ونحتاج فقط أن نجد التيار الكلى المار خلال هذه المنطقة من المستوى .

تطبيق قانون جاوس يشتمل على ايجاد الشحنة الكلية المحصورة بسطح مغلق ، تطبيق قانون أمبير الدائرى يشتمل على ايجاد التيار الكلى المحصور بمسار مغلق .

دعنا مرة أخرى نجد شدة المجال المغناطيسى الناتج عن فتيلة لانهائية الطول تحمل تيارا I . تقع الفتيلة على المحور z فى فضاء حر (كما فى شكل ٨ ـ ٣) ، ويمر التيار فى الاتجاه المعطى بـ$\mathbf{a}_z$. ويأتى فحص التماثل أولا ، مبينا أن ليس هناك تغير مع z أو ϕ . بعد ذلك نعين أى مركبات لـ $\mathbf{H}$ تكون موجودة باستخدام قانون بيو ـ سافار . ويدون الاستخدام الخاص بحاصل الضرب بعلامة X ، نستطيع أن نقول أن اتجاه $d\mathbf{H}$ عمودى على المستوى المحتوى على $d\mathbf{L}$و $\mathbf{R}$ وهو لذلك فى اتجاه $\mathbf{a}_\phi$. وعلى ذلك المركبة الوحيدة لـ $\mathbf{H}$ هى H_ϕ ، وهى دالة فى ρ فقط .

لذلك نختار مسارا بحيث تكون $\mathbf{H}$ اما عمودية أو مماسة لأى جزء منه وعلى طوله تكون H ثابتة . المطلوب الأول (التعامد أو التماس) يسمح لنا أن نستبدل الضرب بالنقطة فى قانون أمبير الدائرى بضرب مقادير مقياسية ، ماعدا على هذا الجزء من المسار حيث $\mathbf{H}$ عمودية على المسار وحاصل الضرب بالنقطة يساوى صفرا ، المطلوب الثانى (الثبات) يسمح لنا حينئذ أن نخرج شدة المجال المغناطيسى من علامة التكامل .



شكل ٨ ـ ٧ : (أ) مقطع عرضى لكابل محورى يحمل تيارا I منتظم التوزيع فى الموصل الداخلى و$-I$ فى الموصل الخارجى . ويمكن تعيين المجال المغناطيسى عند أى نقطة بأقصى السهولة بتطبيق قانون أمبير الدائرى حول مسار دائرى . (ب) فتيلة تيار عند $\rho = \rho_1$, $\phi = \pm \phi_1$ تولد مركبات H_ρ تلغى . وللمجال الكلى ، $\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{a}_\phi$.

والتكامل المطلوب عادة يكون بالغ البساطة ويتكون من إيجاد طول ذلك الجزء من المسار الذى توازيه $\mathbf{H}$.

وفى مثالنا يجب أن يكون المسار دائرة نصف قطرها ρ ويصبح قانون أمبير الدائرى

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho \, d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi\rho = I$$

أو

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

كما سبق .

وكمثال ثان على تطبيق قانون أمبير الدائرى ، اعتبر خط نقل محورى طوله لانهائى يحمل تيارا كليا I منتظم التوزيع فى الموصل المركزى و $-I$ فى الموصل الخارجى . الخط مبين فى شكل ٨ ـ ٧أ . ويبين التماثل أن H ليست دالة فى ϕ أو z . لكى نعين المركبات الموجودة ، يمكننا استخدام نتائج المثال السابق باعتبار الموصل المصمت على أنه مكون من عدد كبير من الفتائل . وليس لأى فتيلة مركبة لـ $\mathbf{H}$ فى اتجاه z . بالاضافة ، المركبة H_ρ عند $\phi = 0°$ ، الناتجة من فتيلة واقعة عند $\rho = \rho_1$, $\phi = \phi_1$ تلغى بالمركبة H_ρ الناتجة من فتيلة متماثلة الوقوع عند $\rho = \rho_1$, $\phi = -\phi_1$.

هذا التماثل موضح بشكل ٨ ـ ٧ب ومرة أخرى نجد فقط مركبة H_ϕ التى تتغير مع ρ .

ومسار دائرى نصف قطره ρ ، حيث ρ أكبر من نصف قطر الموصل الداخلى ولكن أقل من نصف القطر الداخلى للموصل الخارجى ، يؤدى حينئذ فى الحال الى

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (a < \rho < b)$$

اذا اخترنا ρ أقل من نصف قطر الموصل الداخلى ، يكون التيار المحصور

$$I_{\text{encl}} = I\frac{\rho^2}{a^2}$$

و

$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \qquad (\rho < a)$$

اذا كان نصف القطر ρ اكبر من نصف القطر الخارجى للموصل الخارجى ، فلايحصر تياراً و

$$H_\phi = 0 \qquad (\rho > c)$$

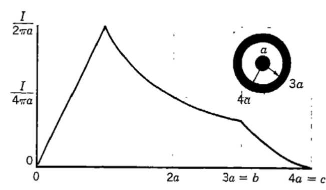
أخيرا ، اذا وقع المسار خلال الموصل الخارجى ، نحصل على

$$2\pi\rho H_\phi = I - I\left(\frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \qquad (b < \rho < c)$$

تغير شدة المجال المغناطيسى مع نصف القطر مبينة فى شكل ٨ ـ ٨ لكابل محورى فيه $C = 4a$, $b = 3a$. يجب أن يلاحظ أن شدة المجال المغناطيسى H مستمرة عند كل حدود الموصل . وبتعبير آخر ، فإن زيادة طفيفة فى نصف قطر المسار المغلق لايسبب حصر تيار مغاير كثيراً . لاتظهر قيمة H_ϕ قفزات مفاجئة .

المجال الخارجى يساوى صفرا . هذا ، كما نرى ، ينتج عن تيارات موجبة وسالبة متساوية محصورة بالمسار . وكُلًا ينتج مجالا خارجياً مقداره $I/2\pi\rho$ ، ولكن يحدث إلغاء تاما . وهذا مثال آخر للتدريع مثل هذا الكابل المحورى الحامل لتيارات عالية لايحدث أى تأثير ملحوظ فى دائرة مجاورة .



شكل ٨ ـ ٨ : شدة المجال المغناطيسى كدالة فى نصف القطر فى خط نقل محورى طوله لانهائى بالأبعاد المبينة .

وكمثال أخير ، دعنا نعتبر لوحا من تيار ماراً فى الاتجاه الموجب لـ y وموضوع فى المستوى $z = 0$. ويمكن أن نفكر فى التيار العائد على أنه مقسم بالتساوى بين لوحين بعيدين على كل من جانبى اللوح الذى نعتبره . ولوح ذو كثافة تيار سطحية منتظمة $\mathbf{K} \doteq K_y \mathbf{a}_y$ مبين فى شكل ٨ ـ ٩ . ولايمكن أن تتغير H مع x أو y . اذا قسم اللوح الى عدد من الفتائل ، فمن الواضح أن أى فتيلة لايمكنها أن تنتج مركبة H_y . بالاضافة الى ذلك ، يبين قانون بيو ـ سافار أن المساهمة فى H_z الناتجة من زوج من الفتائل متماثلة الوضع يلغى . على ذلك ، H_z صفر أيضاً ، وتوجد مركبة H_x فقط . ولذلك نختار المسار $1 - 1' - 2' - 2 - 1$ المتكون من أجزاء مستقيمة الخط إما موازية أو متعامدة على H_x . ويعطى قانون أمبير الدائرى

$$H_{x1}L + H_{x2}(-L) = K_y L$$

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

أو

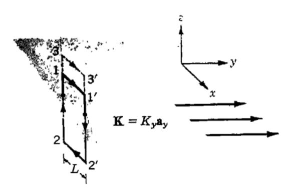
إذا اختير الآن المسار $3 - 2 - 2' - 3' - 3$ ، فإن نفس التيار يكون محصوراً و

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

ولذلك

$$H_{x3} = H_{x1}$$

ويتبع أن H_x هى نفسها لكل قيم z الموجبة . بالمثل ، H_x هى نفسها لكل قيم z السالبة . بسبب التماثل ، فإن شدة المجال المغناطيسى على جانب للوح التيار هو سالب تلك التى على الآخر .



شكل ٨ - ٩ لوح منتظم من تيار سطحى $\mathbf{K} = k_y\, \mathbf{a}_y$ فى المستوى $z' = 0$. يمكن ايجاد $\mathbf{H}$ بتطبيق قانون أمبير الدائرى حول المسارين $1 - 2 - 2' - 1' - 1$ و $3 - 2 - 2' - 3' - 3$

فوق اللوح ،

$$H_x = \tfrac{1}{2}K_y \qquad (z > 0)$$

بينما تحته

$$H_x = -\tfrac{1}{2}K_y \qquad (z < 0)$$

جاعلين $\mathbf{a}_N$ تكون وحدة متجه عمودى (للخارج) على لوح التيار ، يمكن كتابة النتيجة فى صورة صحيحة لكل قيم z كمايلى

$$\boxed{\mathbf{H} = \tfrac{1}{2}\mathbf{K} \times \mathbf{a}_N} \qquad (11)$$

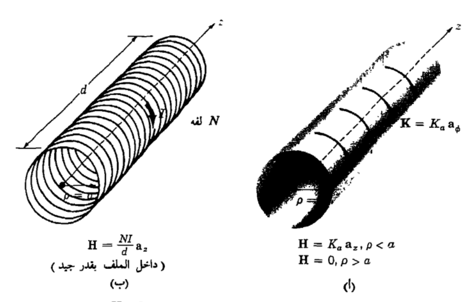
اذا وضع لوح ثان لتيار مارا فى الاتجاه المضاد $\mathbf{K} = -K_y\, \mathbf{a}_y$ ، عند $Z = h$ ، فان (١١) تبين أن المجال فى المنطقة بين لوحى التيار هو

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N \qquad (0 < z < h)} \quad (١٢)$$

ويكون صفرا فى أى مكان آخر ،

$$\boxed{\mathbf{H} = 0 \quad , \quad (z < 0, \quad z > h)} \quad (١٣)$$

وأكثر الأجزاء صعوبة فى تطبيق قانون أمبير الدائرى هو تعيين مركبات المجال الموجودة . وأكثر الطرق الموثوق فيها هى التطبيق المنطقى لقانون بيو ـ سافار ومعرفة للمجالات المغناطيسية للأشكال البسيطة .



$\mathbf{H} = \frac{NI}{d}\mathbf{a}_z$
(داخل الملف بقدر جيد)
(ب)

$\mathbf{H} = K_a \mathbf{a}_z , \rho < a$
$\mathbf{H} = 0, \rho > a$
(أ)

شكل ٨ ـ ١٠ : (أ) ملف لولبى مثالى ، ذو طول لانهائى مع قشرة تيار دائرى $\mathbf{K} = K_a \, \mathbf{a}_\phi$. (ب) ملف لولبى ذو N لفة وطول محدود d .

توجز مسألة (١٤) عند نهاية هذا الفصل الخطوات المتضمنة فى تطبيق قانون أمبير الدائرى على ملف لانهائى الطول له نصف قطره a وكثافة تيار منتظمة $K_a a_\phi$ ، كما هو مبين فى شكل ٨ ـ ١٠أ . وللمراجعة ، النتيجة هى

$$\mathbf{H} = K_a \mathbf{a}_z \qquad (\rho < a) \quad (١٤أ)$$

$$\mathbf{H} = 0 \qquad (\rho > a) \quad (١٤ب)$$

اذا كان للملف اللولبى طول محدود d ويتكون من N من اللفات المحكمة التجاور من فتيلة تحمل تيارا I ، عندئذ يعطى المجال عند نقط بداخل الملف بقدر جيد بدقة بـ

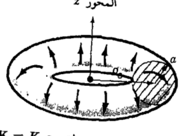
$$\mathbf{H} = \frac{NI}{d}\mathbf{a}_z \quad (\text{داخل الملف اللولبى بقدر جيد}) \quad (١٥)$$

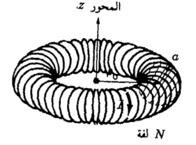
والتقريب مفيد اذا لم يطبق عند أقرب من ضعف نصف القطر الى الأطراف المفتوحة أو أقرب الى سطح الملف اللولبى من ضعف الفاصل بين اللفات .

وللملف الحلقى المبين فى شكل ٨ ـ ١١ ، يمكن بيان أن شدة المجال المغناطيسى للحالة المثالية ، شكل ٨ ـ ١١أ ، هى

$$H = K_a \frac{\rho_0 - a}{\rho} \mathbf{a}_\phi \quad \text{(داخل الملف الحلقى)} \qquad (١٦أ)$$

$$H = 0 \quad \text{(خارج)} \qquad (١٦ب)$$





$\mathbf{K} = K_a \mathbf{a}_z$ at $\rho = \rho_0 - a, z = 0$

$\mathbf{H} = K_a \frac{\rho_0 - a}{\rho} \mathbf{a}_\phi$ داخل الملف الحلقى

$\mathbf{H} = 0$ خارج

(أ)

$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$ داخل الملف الحلقى بقدر جيد

(ب)

شكل ٨ ـ ١١ : (أ) ملف حلقى مثالى يحمل تيارا سطحيا K فى الاتجاه المبين . (ب) ملف حلقى ذو N من اللفات يحمل تيارا فتيليا I .

للملف الحلقى ذى N من اللفات فى شكل ٨ ـ ١١ب ، لدينا التقريبات الجيدة ،

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \quad \text{(داخل الملف الحلقى)} \qquad (١٧أ)$$

$$H = 0 \quad \text{(خارج)} \qquad (١٧ب)$$

مادمنا نعتبر نقطا مبعدة عن سطح الملف الحلقى بعدة مرات قدر الفاصل بين اللفات .

والملفات الحلقية ذات المقطع العرضى المربع يمكن معالجتها ايضا مباشرة فعلا ، كما تستطيع أن ترى بنفسك بمحاولة المسألة رقم ١٢ .

والصيغ الدقيقة للملفات اللولبية ، والملفات الحلقية ، والملفات ذات أ°
أخرى يمكن الحصول عليها فى قسم ٢ فى :
Standard Handbood for Electrical Engineers
(انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس) .

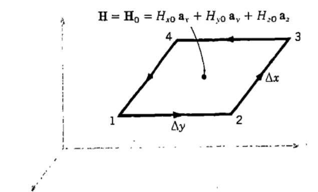
ت ٨ - ٣ : عين H بمركبات متعامدة عند $P\ (0,0.008,0)$ فى مجال : (أ) فتيلتا تيار لانهائيتان : 75mA على المحور z ، فى اتجاه $-a_z$ و 75 mA عند $x = 0$, $y = 1.01$ فى اتجاه a_z ، (ب) خط محورى : $a = 2$mm و $b = 7$mm , $C = 9$ mm , $I = 0.7$A و ممركز على المحور z ، اتجاه a_z فى الموصل المركزى ، (جـ) لوحا تيار : $8a_x$ A/m عند $y = 3$mm , $-2\pi a_x$ A/m عند $y = 1$cm ، (د) ملف لولبى : محوره عند $x = 1$cm , $y = 2$cm ممتد من $z = -10$cm الى $z = 25$cm قطره 5cm ، عدد لفاته 3,000 , $I = 1$mA فى اتجاه دوران عقرب الساعة عندما ينظر اليه من $z = 10$m ، (هـ) ملف حلقى : ممركز عند نقطة الأصل ، محوره على المحور :

$a = 3$mm , $I = 2$mA , $N = 200$, $\rho_o = 1$cm

فى اتجاه a_x عند نصف القطر الخارجى .

الاجابة :

$-8.57a_z$A/m , $7.14a_z$A/m , $-7.40a_x$ A/m , $7.46a_x$A/m , $-7.96a_z$A/m .



شكل ٨ - ١٢ : مسار مغلق عنصرى فى الاحداثيات الكرتيزية مختار لتطبيق قانون امبير الدائرى لتعيين معدل التغير الفراغى لـ H .

٨ - ٣ : التواء

أتممنا دراستنا لقانون جاوس بتطبيق هذا القانون على عنصر حجم تفاضلى واقتدنا الى مفهوم الانفراج . والآن نطبق قانون أمبير الدائرى على محيط عنصر سطح تفاضلى ، ونقابل ثالث وآخر المشتقات الخاصة بتحليل المتجهات ، والالتواء . وهدفنا الحالى هو أن نحصل على الصورة النقطيه لقانون أمبير الدائرى .

مرة أخرى سنختار الاحداثيات الكرتيزية ، ونختار مساراً مغلقا عنصرياً جوانبه Δx و Δy (شكل ٨ ـ ١٢) . نفرض أن بعض التيار ، غير محدد إلى الآن ، ينتج قيمة إسناد لـ H عند مركز هذا المستطيل الصغير ،

$$\mathbf{H}_0 = H_{x0}\,\mathbf{a}_x + H_{y0}\,\mathbf{a}_y + H_{z0}\,\mathbf{a}_z.$$

حينئذ يكون التكامل الخطى المغلق لـ H حول هذا المسار هو بالتقريب مجموع القيم الأربع لـ $\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{L}$ على كل جانب . نختار اتجاه الانتقال على أنه $1-2-3-4-1$ ، الذى يتوافق مع تيار فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ ، ولذلك تكون المساهمة الأولى هى

$$(\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{L})_{1-2} = H_{y,\,1-2}\,\Delta y$$

قيمة H_y على هذا القسم من المسار يمكن أن يعطى بدلالة قيمة المرجع H_{y0} عند مركز المستطيل ، معدل تغير H_y مع x ، والمسافة $\Delta x/2$ من المركز الى منتصف الجانب $1-2$:

$$H_{y,\,1-2} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}\,\Delta x\right)$$

على ذلك

$$(\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{L})_{1-2} \doteq \left(H_{y0} + \frac{1}{2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\,\Delta x\right)\Delta y$$

وعلى القسم التالى من المسار نحصل على

$$(\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{L})_{2-3} \doteq H_{x,\,2-3}(-\Delta x) \doteq -\left(H_{x0} + \frac{1}{2}\frac{\partial H_x}{\partial y}\,\Delta y\right)\Delta x$$

مستمرين للجزءين الباقيين وبجمع النتائج ،

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

من قانون أمبير الدائرى ، هذه النتيجة يجب أن تساوى التيار المحصور بالمسار ، أو التيار العابر لأى سطح محدود بالمسار . اذا فرضنا كثافة تيار عامة J ، يكون التيار المحصور عندئذ $\Delta I = J_z\Delta x\Delta y$ ، و

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y \doteq J_z\,\Delta x\,\Delta y$$

أو

$$\frac{\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}}{\Delta x\,\Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

كلما نجعل المسار المغلق ينكمش ، يصبح التعبير السابق أكثر قربا من الصحة ، وفى النهاية نحصل على التساوى

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \, \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \qquad (١٨)$$

بعد البدء بقانون أمبير الدائرى والذى يساوى بين التكامل الخطى المغلق لـ H والتيار المحصور ، نكون قد توصلنا الآن لعلاقة تشمل التكامل الخطى المغلق لـ H لكل وحدة مساحة محصورة ، والتيار لكل وحدة مساحة محصورة ، أو كثافة التيار ، ولقد أدينا تحليلا مماثلا فى الانتقال من الصورة التكاملية لقانون جاوس ، المشتمل على تدفق خلال سطح مغلق ، وشحنة محصورة ، الى الصورة النقطية ، التى تربط التدفق خلال سطح مغلق لكل وحدة حجم محصورة ، والشحنة لكل وحدة حجم محصور ، أو كثافة الشحنة الحجمية . وفى كل حالة أخذ النهاية ضرورى لاعطاء تساو .

اذا اخترنا مسارات مغلقة موجهة عموديا على كل من محورى الاحداثيات الباقيين ، فان اجراء مطابقا يؤدى الى تعبيرات لمركبات كثافة التيار فى اتجاهى y و z ،

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \, \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \qquad (١٩)$$

$$\lim_{\Delta z, \Delta x \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \, \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \qquad (٢٠)$$

بمقارنة (١٨) ، (١٩) و (٢٠) ، نرى أن مركبة لكثافة التيار تعطى بنهاية قسمة التكامل الخطى المغلق لـ H حول مسار صغير فى مستوى عمودى على تلك المركبة والمساحة المحصورة عندما ينكمش المسار الى الصفر . هذه النهاية لها مثيلها فى مجالات العلوم الأخرى وقد أعطيت منذ زمن بعيد الاسم التواء *curl* . والتواء أى متجه هو متجه ، وأى مركبة للالتواء تعطى بنهاية قسمة التكامل الخطى المغلق للمتجه حول مسار صغير عمودى على تلك المركبة المرغوبة والمساحة المحصورة ، عندما ينكمش المسار الى الصفر . ويجب أن يلاحظ أن التعريف السابق للالتواء لايخص نظام احداثيات خاص بالتحديد . والصورة الرياضية للتعريف هى

$$\boxed{(\text{curl } \mathbf{H})_n = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_n}} \qquad (٢١)$$

حيث $\Delta S n$ هى المساحة المستوية المحصورة بالتكامل الخطى المغلق ، و n تمثل أى مركبة فى أى نظام احداثيات . وهذا الرمز السفلى يبين أن مركبة الالتواء هى تلك المركبة العمودية على السطح المحصور بالمسار المغلق .

فى الاحداثيات الكرتيزية يبين التعريف (٢١) أن المركبات فى اتجاهات x , y و z لالتواء H تعطى بـ (١٨) ، (١٩) و (٢٠) ، ولذلك

$$\text{curl } \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z \qquad (٢٢)$$

هذه النتيجة يمكن أن تكتب فى صورة محددة

$$\text{curl } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \qquad (٢٣)$$

ويمكن أيضا أن تكتب بدلالة العامل المتجه ،

$$\text{curl } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} \qquad (٢٤)$$

المعادلة (٢٢) هى النتيجة لتطبيق التعريف (٢١) على نظام الاحداثيات الكرتيزية . وحصلنا على المركبة فى اتجاه z لهذا التعبير بتقدير ناتج قانون أمبير الدائرى حول عنصر مسار جوانبه Δx و Δy ، وقد كان يمكننا الحصول على المركبتين الأخريتين بنفس السهولة باختيار المسارات المناسبة . معادلة (٢٣) هى طريقة بارعة لحفظ تعبير الاحداثيات الكرتيزية للالتواء ، الصورة متماثلة ويمكن تذكرها بسهولة . معادلة (٢٤) أكثر اختصاراً وتؤدى إلى (٢٢) فور تطبيق تعريف الضرب بعلامة X والعامل الاتجاهى .

تعبيرات التواء H فى الاحداثيات الاسطوانية والكروية مستنتجة فى الملحق بتطبيق التعريف (٢١) . مع أنها يمكن أن تكتب فى صورة محددة ، كما هو مشروح هناك ، فالمحددات ليس لها صف من وحدات متجهة فى الصف العلوى وصف من المركبات فى الصف السفلى ، ويمكن تذكرها بسهولة . ولهذا السبب ، عادة يرجع الى مفكوكات الالتواء فى الاحداثيات الاسطوانية والكروية التى تظهر فيما يلى وداخل الغلاف فى آخر الكتاب حيثما تقتضى الضرورة .

كارتيزى

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z \qquad (٢٢)$$

(٢٥) إسطوانى

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$

(٢٦) كروى

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

مع اننا قد وصفنا الالتواء كتكامل خطى لكل وحدة مساحة ، فان هذا لايمد كل واحد بصورة فيزيائية مرضية لطبيعة عملية الالتواء ، لأن التكامل الخطى المغلق نفسه يتطلب تفسيرا فيزيائيا . هذا التكامل قوبل لأول مرة فى المجال الكهروستاتيكى ، حيث رأينا أن $\oint_s \mathbf{E}.d\mathbf{L} = 0$. نظرا لأن التكامل كان صفرا ، لم نعبأ بالصورة الفيزيائية . قد ناقشنا أخيرا التكامل الخطى المغلق لـ H ، $\oint \mathbf{H}.d\mathbf{L} = I$. أى من هذين التكامليين الخطيين المغلقين معروف أيضا باسم « دوران » ، وواضح أنه تعبير معار من مجال ديناميكا الموائع .

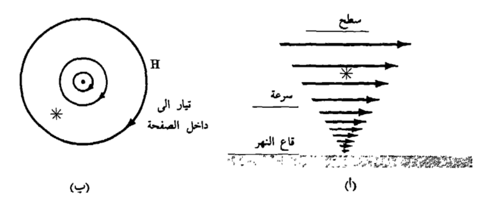
دوران H ، أو $\oint \mathbf{H}.d\mathbf{L}$ يحصل عليه بضرب مركبة H الموازية للمسار المغلق المحدد عند كل نقطة على طوله فى طول المسار التفاضلى وجمع النتائج عندما تقترب الأطوال التفاضلية من الصفر وعندما يصبح عددها لانهائيا . ولانتطلب مسارا متناهى الصغر . ويخبرنا قانون أمبير الدائرى أنه اذا كان لـ H دوران حول مسار معطى ، فان تيارا يمر خلال هذا المسار . فى الكهروستاتيكية نرى أن دوران E صفر حول كل مسار ، نتيجة مباشرة للحقيقة أن شغلا صفريا يتطلب لحمل شحنة حول مسار مغلق .

ويمكننا الآن أن نصف الالتواء كدوران **لكل وحدة مساحة** . المسار المغلق متناهى الصغر . والالتواء معرف عند نقطة . والتواء E يجب أن يكون صفرا ، لأن الدوران صفر . ولكن التواء H ليس صفرا ، دوران H لكل وحدة مساحة هى كثافة التيار من قانون أمبير الدائرى [أو(١٨) ، (١٩) ، (٢٠)] .

يقترح Skilling[١] استخدام عجلة تجديف صغيرة جدا « كمقياس للالتواء » وكميتنا المتجهة ، عندئذ ، يجب أن يفكر فيها على أنها قادرة ، على التأثير بقوة على كل

(١) انظر بيانات المراجع عند نهاية هذا الفصل .

ريشة من عجلة التجديف ، والقوة تكون متناسبة مع مركبة المجال عموديا على سطح تلك الريشة . ولكى نختبر مجالا للالتواء نغطس عجلة تجديفنا فى المجال ، مع محور عجلة التجديف موجهة مع اتجاه مركبة الالتواء المرغوبة ، ونلاحظ تأثير المجال على العجلة . وعدم الدوران يعنى انعدام الالتواء ، وسرعات زاوية أعلى تعنى قيما أعلى للالتواء . وانعكاسا فى اتجاه التدويم يعنى انعكاسا فى اشارة الالتواء .



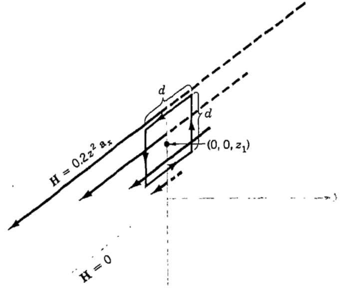
شكل ٨ ـ ١٣ : (أ) يبين مقياس الالتواء مركبة الالتواء لسرعة الماء الى داخل الصفحة . (ب) الالتواء لشدة المجال المغناطيسى حول فتيلة لانهائية الطول مبينة .

لكى نجد اتجاه متجه الالتواء وليس مجرد تقرير وجود أى مركبة معينة ، فيجب أن نضع عجلة تجديفنا فى المجال ونتصيد الاتجاه الذى ينتج أعلى عزم تدوير . عندئذ يكون اتجاه الالتواء على محور عجلة التجديف ، كما تعطيه قاعدة اليد اليمنى .

وكمثال ، اعتبر انسياب الماء فى نهر . يبين شكل (٨ ـ ١٣أ) المقطع الطولى لنهر عريض مأخوذ عند منتصف النهر . سرعة الماء صفر عند القاع وتزيد خطيا كلما اقترب من السطح . وعجلة تجديف موضوعة فى الوضع المبين ، مع محورها عمودى على الورقة ، ستدور فى اتجاه عقرب الساعة ، مظهرة وجود مركبة للالتواء فى اتجاه العمود الداخل على سطح الصفحة . اذا لم تتغير سرعة الماء بينما ننتقل مع أو ضد اتجاه المجرى وأيضا لاتظهر تغيرا عندما نذهب عبر النهر (أو حتى اذا تناقصت بنفس الطريقة فى اتجاه كلا الضفتين) ، فان هذه المركبة هى المركبة الوحيدة الموجودة عند منتصف المجرى ، ويكون لالتواء سرعة الماء اتجاه الى داخل الصفحة .

فى شكل (٨ ـ ١٣ب) خطوط انسياب شدة المجال المغناطيسى حول موصل فتيلى لانهائى الطول ، مبينة . ومقياس الالتواء الموضوع فى هذا المجال ذى الخطوط المنحنية يبين أن عدداً أكبر من الريش لها قوة فى اتجاه عقرب الساعة مؤثرة عليها ولكن هذه القوة عامة أصغر من القوة فى عكس عقرب الساعة المؤثرة على العدد الأقل من الريش الأقرب

من السلك . ويبدو ممكنا أنه اذا كان انحناء خطوط الانسياب صحيحا ، وأيضا اذا كان تغير شدة المجال مضبوطا حقا ، فان صافى عزم التدوير على عجلة التجديف يكون صفرا .



شكل ٨ - ١٤ مسار مربع ضلعه d ومركزه على المحور z عند $z > z_1$ مستخدم لتقدير قيمة $\oint H.dL$ وايجاد : $curl\ H$.

بالفعل ، لاتدور عجلة التجديف فى هذه الحالة ، لأنه بما أن $H = (I/2\pi\rho)a_\phi$ يمكننا التعويض فى (٢٥) ، حاصلين على

$$\text{curl } \mathbf{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho}\mathbf{a}_z = 0$$

وكمثال على تقدير قيمة $curl\ H$ من التعريف وتقدير قيمة تكامل خطى آخر ، دعنا نفترض أن $H = 0.2z^2a_x$ لـ $z > 0$ ، و $H = 0$ فى أى مكان آخر ، كما هو مبين فى شكل ٨ ـ ١٤ . ولمسار مربع ضلعه d ، مركزه عند $(0,0,z_1)$ فى المستوى $y = 0$ حيث $z_1 > ½d$ نقدر قيمة التكامل الخطى لـ H على طول الأجزاء الأربعة ، بادئين عند الأعلى :

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = 0.2(z_1 + \tfrac{1}{2}d)^2 d + 0 - 0.2(z_1 - \tfrac{1}{2}d)^2 d + 0$$
$$= 0.4z_1 d^2$$

فى النهاية عندما تقترب المساحة من الصفر ، نجد

$$(\nabla \times \mathbf{H})_y = \lim_{d\to 0}\frac{\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}}{d^2} = \lim_{d\to 0}\frac{0.4z_1 d^2}{d^2} = 0.4z_1$$

والمركبات الأخرى أصفار ، ولذلك $\nabla \times \mathbf{H} = 0.4z_1\mathbf{a}_y$.

ولتعيين قيمة الالتواء بدون محاولة توضيح التعريف أو تعيين قيمة تكامل خطى ، نأخذ ببساطة المشتقة الجزئية المبينة ب (٢٣) :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0.2z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}(0.2z^2)\mathbf{a}_y = 0.4z\mathbf{a}_y$$

التى تتفق مع النتيجة السابقة عند $z = z_1$.

وبالرجوع الآن لنكمل فحصنا الأصلى لتطبيق قانون أمبير الدائرى على مسار تفاضلى القدر ، يمكن أن نضم (١٨) ، (١٩) ، (٢٠) ، (٢٢) ، (٢٤) ،

$$\text{curl } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z = \mathbf{J} \quad (٢٧)$$

ونكتب الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى ،

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad (٢٨)$$

هذه هى ثانى معادلات ماكسويل الأربع ، كما تطبق على الحالات غير المتغيرة مع الزمن . ويمكن أيضا أن نكتب الآن الثالثة من هذه المعادلات ، وهى الصورة النقطية لـ $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{L} = 0$ ، أو

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \quad (٢٩)$$

المعادلة الرابعة تظهر فى قسم ٨ ـ ٥ .

ت ٨ ـ ٤ : (أ) احسب التكامل الخطى لـ $\mathbf{H} = 4\sin 0.40\pi z\mathbf{a}_y - (x+2)^2\mathbf{a}_z$ حول مسار مربع فى المستوى $x = 1$ طول ضلعه 0.6 وحدة ، أحرفه موازية للمحاور الاحداثية ، ممركز على $P\ (1, -3, 2)$. استخدم اتجاها عكس عقرب الساعة ، كمايرى من $x = \infty$. (ب) احسب قسمة التكامل الخطى السابق على المساحة المحصورة بالمسار ، كتقريب لـ $(\nabla \times \mathbf{H})_x$. (جـ) عين $(\nabla \times \mathbf{H})_x$ عند $P\ (1, -3, 2)$. (انظر ايضا المسألة رقم ٢١ عند نهاية هذا الفصل) .

الاجابة : 4.07 , 3.97 , 1.430 .

ت ٨ ـ ٥ : أوجد $\nabla\times \mathbf{H}$ اذا كانت $\mathbf{H}$ تساوى :

(أ) $y^2 z\mathbf{a}_x + 2(x+1)yz\mathbf{a}_y - (x+1)^2 z\mathbf{a}_z$ ،

(ب) $2\rho\cos\phi\mathbf{a}_\rho - 4\rho\sin\phi\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$ (جـ) $2r\cos\theta\mathbf{a}_r - 3r\sin\theta\mathbf{a}_\theta$.

الاجابة : $(y^2+z^2)\mathbf{a}_y + \ldots$; $-2(x+1)y\mathbf{a}_x$; $-6\sin\phi\mathbf{a}_z$; $-4\sin\theta\mathbf{a}_\phi$.

٨ ـ ٤ : نظرية ستوكس :

مع أن القسم الأخير خصص أساسا لمناقشة عملية الالتواء ،فالمساهمة لموضوع المجالات المغناطيسية يجب ألا يهمل . من قانون أمبير الدائرى أستخلصنا احدى معادلات ماكسويل ، $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$. هذه المعادلة الأخيرة يجب أن تعتبر الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى وتطبق على أساس « لكل وحدة مساحة » . فى هذا القسم سنخصص مرة أخرى النصيب الأكبر من المادة للنظرية الرياضية المعروفة بنظرية ستوكس ، ولكن أثناء الإجراء سنبين أنه يمكننا الحصول على قانون أمبير الدائرى من $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$ وبتعبير آخر ، نكون حينئذ مهيئين للحصول على الصورة التكاملية من الصورة النقطية أو للحصول على الصورة النقطية من الصورة التكاملية .

اعتبر السطح S بشكل ٨ ـ ١٥ المجزأ الى عناصر سطحية مساحتها ΔS . اذا طبقنا تعريف الالتواء على أحد هذه العناصر السطحية ، فحينئذ

$$\frac{\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla\times\mathbf{H})_n$$

حيث يشير الرمز السفلى n مرة أخرى الى العمود على السطح تبعا لقاعدة اليد اليمنى . الرمز السفلى على $d\mathbf{L}_{\Delta S}$ يشير الى أن المسار المغلق هو محيط عنصر مساحة ΔS . هذه النتيجة يمكن أيضا أن تكتب

$$\frac{\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{a}_n$$

أو

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}_{\Delta S} \doteq (\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{a}_n\,\Delta S = (\nabla\times\mathbf{H})\cdot\Delta\mathbf{S}$$

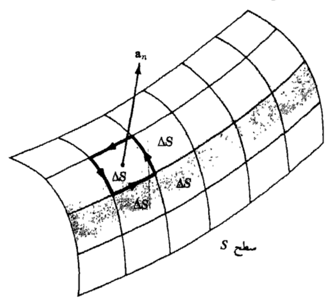
حيث $\mathbf{a}_n$ وحدة متجه فى اتجاه العمود على $\Delta\mathbf{S}$ تبعا لقاعدة اليد اليمنى .

والآن دعنا نعين هذا الدوران لكل ΔS المكونة لـ S ونجمع النتائج . عندما نحسب التكامل الخطى المغلق لكل ΔS ، سيحدث بعض الالغاء لأن كل حائط داخلى

مغطى مرة فى كل اتجاه . والحدود الوحيدة التى لايمكن أن يحدث عليها الغاء تكون الحدود الخارجية ، المسار المحتوى على S . ولذلك نحصل على

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \equiv \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \qquad (٣٠)$$

حيث $d\mathbf{L}$ مأخوذ فقط على محيط S .



شكل ٨ ـ ١٥ : مجموع التكاملات الخطية المغلقة حول محيط كل ΔS هو عينه كالتكامل الخطى المغلق حول محيط S بسبب الالغاء على كل مسار داخلى .

المعادلة (٣٠) هى متطابقة ، تنطبق على أى مجال متجه ، ومعروفة بنظرية ستوكس .

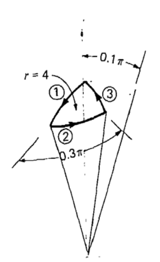
وقد يساعد مثال عددى على توضيح الهندسة المتضمنة فى نظرية ستوكس . اعتبر الجزء من كرة المبين فى شكل ٨ ـ ١٦ . والسطح يعين بـ $r = 4$, $0 \leqslant \theta \leqslant 0.1\pi$ ، $0 \leqslant \phi \leqslant 0.3\pi$ والمسار المغلق المكون لمحيطه يتكون من ثلاثة أقواس دائرية . والجزء الأول للمسار يوصف فى الاحداثيات الكروية بـ $r = 4$, $0 \leqslant \theta \leqslant 0.1\pi$, $\phi = 0$ ، الثانى بـ $r = 4$, $\theta = 0.1\pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 0.3\pi$ ، والأخير بـ : $r = 4$, $0 \leqslant \theta \leqslant 0.1\pi$, $\phi = 0.3\pi$. وأعطينا المجال :
$\mathbf{H} = 6r \sin \phi \mathbf{a}_r + 18r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\phi$ وسئلنا أن نوجد قيمة كل من طرفى نظرية ستوكس .

عنصر المسار التفاضلى $d\mathbf{L}$ هو المجموع الاتجاهى للأطوال التفاضلية الثلاثة لنظام الاحداثيات الكروية الذى قوبل لأول مرة فى قسم ١ ـ ٩ ،

$$d\mathbf{L} = dr\mathbf{a}_r + r\,d\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\mathbf{a}_\phi$$

الحد الأول صفر على أجزاء المسار الثلاثة لأن $r = 4$ و $dr = 0$ ، والثانى صفر على الجزء 2 لأن θ ثابتة ، والحد الثالث صفر على كلا الجزءين 1 و 3 . وعلى ذلك

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \int_1 H_\theta r\,d\theta + \int_2 H_\phi r\sin\theta\,d\phi + \int_3 H_\theta r\,d\theta$$



شكل ٨ - ١٦ جزء من غطاء كروى مستخدم كسطح ومسار مغلق لتوضيح نظرية ستوكس .

لأن $H_\theta = 0$ ، نحصل على

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \int_0^{0.3\pi} [18(4)\sin 0.1\pi\cos\phi]4\sin 0.1\pi\,d\phi$$

$$= 288\sin^2 0.1\pi\sin 0.3\pi = 22.2 \text{ A}$$

ثم نشرع فى عمل التكامل السطحى . أولا ، نستخدم (٢٦) لنجد

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{1}{r\sin\theta}(36r\sin\theta\cos\theta\cos\phi)\mathbf{a}_r$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}6r\cos\phi - 36r\sin\theta\cos\phi\right)\mathbf{a}_\theta$$

لأن $d\mathbf{S}= r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$ ، يكون التكامل

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{0.3\pi} \int_0^{0.1\pi} (36 \cos\theta \cos\phi) 16 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{0.3\pi} 576(\tfrac{1}{2} \sin^2\theta) \Big|_0^{0.1\pi} \cos\phi \, d\phi$$

$$= 288 \sin^2 0.1\pi \sin 0.3\pi = 22.2 \text{ A}$$

على ذلك ، تحقق النتائج نظرية ستوكس ، ونلاحظ أن تيارا قدره 22.2A يمر الى أعلى خلال هذا القسم من الغطاء الكروى .

بعد ذلك ، دعنا نرى كم هو سهل أن نحصل على قانون أمبير الدائرى من $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. ونضطر فقط أن نضرب بالنقطة كلا من الطرفين فى $d\mathbf{S}$ ، ونكامل كل طرف على نفس السطح(المفتوح) S ، ونطبق نظرية ستوكس :

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

تكامل كثافة التيار فوق السطح S هى التيار الكلى I المار خلال السطح ، ولذلك

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

هذا الاستنتاج القصير يبين بوضوح أن التيار I ، موصوف على أنه « محصور بالمسار المغلق » ، هو أيضا التيار المار خلال أى من الاسطح اللانهائية العدد التى لها المسار المغلق كمحيط .

تربط نظرية ستوكس تكاملا سطحيا بتكامل خطى مغلق . ويجب أن نتذكر أن نظرية الانفراج تربط تكاملا حجميا بتكامل سطحى مغلق . وكلا النظريتين تجد أن أكبر استخدام لهما فى البراهين المتجهة العامة . وكمثال ، دعنا نجد تعبيرا آخر لـ $\nabla . \nabla \times \mathbf{A}$ ، حيث يمثل A أى مجال متجه . النتيجة يجب أن تكون مقياسية (لماذا ؟) ، ويمكن أن ندع هذا المقياسى يكون T أو

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

بالضرب فى dv والتكامل خلال كل أى حجم v ،

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}) \, dv = \int_{\text{vol}} T \, dv$$

نطبق أولا نظرية الانفراج على الطرف الأيسر ، حاصلين على

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathrm{vol}} T\, dv$$

الطرف الأيسر هو التكامل السطحى لالتواء A على السطح المغلق المحيط بالحجم v . تربط نظرية ستوكس التكامل السطحى لالتواء A على سطح مفتوح محصور بمسار مغلق معطى . إذا فكرنا فى المسار على أنه فتحة شنطة غسيل ، والسطح المفتوح على أنه سطح الشنطة نفسها ، نرى أنه بينما تقترب تدريجياً من سطح مغلق بجذب رباط الشنطة ، يصبح المسار المغلق أصغر وأصغر ، ويختفى فى النهاية عندما يصبح السطح مغلقا .

وعلى ذلك فإن تطبيق نظرية ستوكس على سطح مغلق يعطى نتيجة صفرية ، ونحصل على

$$\int_{\mathrm{vol}} T\, dv = 0$$

ولأن هذا صحيح لأى حجم ، فانه صحيح لحجم تفاضلى dv .

$$T\, dv = 0$$

ولذلك

$$T = 0$$

أو

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0} \qquad (٣١)$$

المعادلة (٣١) هى متطابقة مفيدة فى حساب المتجهات[1] . وطبعا ، يمكن أيضا أن تبرهن بسهولة بالفك المباشر فى الاحداثيات الكرتيزية .

دعنا نطبق المتطابقة على المجال المغناطيسى غير المتغير مع الزمن الذى فيه

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

(١) هذه ومتطابقات متجهة أخرى مجدولة فى الملحق (أ٣٠) .

ثم تبين أن

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

التى هى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من قبل فى الفصل باستخدام معادلة الاستمرارية .

قبل ادخال كميات عديدة جديدة للمجال المغناطيسى فى القسم التالى ، يمكن أن نراجع ما حققناه حتى هذه النقطة . قبلنا فى البداية قانون بيو ـ سافار كنتيجة تجريبية

$$\mathbf{H} = \int \frac{I\, d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

وقبلنا مؤقتا قانون أمبير الدائرى ، رهن ببرهان يأتى بعد ،

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

ومن قانون أمبير الدائرى أدى تعريف الالتواء الى الصورة النقطية لهذا القانون نفسه ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

نرى الآن أن نظرية ستوكس تمكننا من أن نحصل على الصورة التكاملية لقانون أمبير الدائرى من الصورة النقطية .

ت ٨ ـ ٦ : بالعمل فى الاحداثيات الأسطوانية مع المجال $\mathbf{A} = 2\rho^2 (z+1)\sin^2\phi\, \mathbf{a}_\phi$ احسب كلا من طرفى نظرية ستوكس للجزء من السطح الأسطوانى المعرف بـ $\rho = 2$, $\pi/4 < \phi < \pi/2$, $1<z<1.5$ ، ولمحيطه .

الإجابة : -5.14 , -5.14 (لأن $d\mathbf{S} = +dS\mathbf{a}_\rho$)

٨ ـ ٥ : التدفق المغناطيسى وكثافة التدفق المغناطيسى

فى فضاء حر ، دعنا نعرف كثافة التدفق المغناطيسى B بـ

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{(فضاء حر فقط)} \qquad (٣٢)$$

حيث B مقاسة بالوبر لكل متر مربع ($\mathrm{Wb/m^2}$) أو بوحدة أحدث قررت فى النظام الدولى للوحدات ، تسلا (T) . ووحدة أقدم تستخدم كثيرا لكثافة التدفق المغناطيسى هى الجاوس (G) حيث $1\ \mathrm{Wb/m^2}$ هى مثل 10,000G . والثابت μ_0 ليس عديم الأبعاد وله القيمة المعرفة للفضاء الحر ، بالهنرى لكل متر(H/m)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{H/m} \tag{٣٣}$$

والاسم المعطى لـ μ_0 هو انفاذية الفضاء الحر .

يجب أن نلاحظ أنه لأن H مقاسة بالامبير لكل متر ، فان الوبر يساوى من حيث الوحدة حاصل ضرب الهنرى والأمبير . وباعتبار الهنرى كوحدة جديدة ، يكون الوبر مجرد اختصار مناسب لحاصل ضرب الهنرى والأمبير . وعندما تقدم المجالات المتغيرة مع الزمن ، سيبين أن الوبر يكافىء أيضا حاصل ضرب الفولت والثانية .

متجه كثافة المجال المغناطيسى B . كما يوحى الإسم ، هو عضو فى عائلة كثافة ـ التدفق للمجالات المتجهة . أحد التناظرات الممكنة بين المجالات الكهربية والمغناطيسية[1] يقارن قانونى بيو ـ سافار وكولوم ، منشئاً بذلك تناظرا بين H و E . عندئذ تؤدى العلاقات $B= \mu_0 H$ و $D= \epsilon_0 E$ الى تناظر بين B و D . اذا قيست B بالوبر لكل متر مربع ، فان التدفق المغناطيسى يجب أن يقاس بالوبر . دعنا نمثل التدفق المغناطيسى بـΦ ونعرف Φ على أنها التدفق المار خلال أى مساحة معينة ،

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Wb} \tag{٣٤}$$

وتناظرنا يجب أن يذكرنا الآن بالتدفق الكهربى Ψ ، المقاس بالكولوم ، وقانون جاوس ، الذى ينص على أن التدفق الكلى المار خلال اى سطح مغلق يساوى الشحنة المحصورة ،

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

الشحنة Q هى مصدر خطوط التدفق الكهربى وهذه الخطوط تبدأ وتنتهى على شحنة موجبة وسالبة ، بالترتيب .

لم يكتشف مصدر مثل هذا أبدا لخطوط التدفق المغناطيسى . فى مثال الفتيلة المستقيمة لانهائية الطول الحاملة لتيار مستمر I ، كون المجال H دوائر متحدة المركز حول الفتيلة . لأن $B= \mu_0 H$ ، فان المجال B له نفس الشكل . خطوط التدفق المغناطيسى مغلقة ولاتنتهى على « شحنة مغناطيسية » . ولهذا السبب فقانون جاوس للمجال المغناطيسى هو

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{٣٥}$$

---

(١) تناظر بديل مقدم فى قسم ١٠ ـ ٢ .

ويبين تطبيق نظرية الانفراج أن

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (٣٦)$$

اننا لم نبرهن (٣٥) أو (٣٦) ولكن فقط افترضنا صحة هذه التعبيرات باعتبار المجال الوحيد لفتيلة لانهائية . من الممكن أن نبين أن (٣٥) و (٣٦) تتبع من قانون بيو ـ سافار وتعريف B ، $B= \mu_0 H$ ولكن هذا برهان آخر سنؤجله الى قسم ٨ ـ ٧ .

معادلة (٣٦) هى الأخيرة من معادلات ماكسويل الأربع كماتطبق على المجالات الكهربية الاستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة .

وبتجميع هذه المعدلات ، يكون لدينا عندئذ للمجالات الكهربية الاستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (٣٧)$$

يمكننا أن نضيف الى هذه المعادلات التعبيرين اللذين يربطان D لـ E و B لـ H فى فضاء حر ،

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \qquad (٣٨)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad (٣٩)$$

ووجدنا من المفيد أن نعرف جهدا كهروستاتيكيا ،

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (٤٠)$$

وسنناقش جهدا للمجال المغناطيسى الثابت فى القسم التالى . بالاضافة ، قد مددنا تغطيتنا للمجالات الكهربية لتشمل المواد الموصلة والعوازل ، وقد قدمنا الاستقطاب P . وستطبق معالجة مماثلة على المجالات المغناطيسية فى الفصل القادم .

بالرجوع الى (٣٧) ، يمكن أن يلاحظ أن هذه المعادلات الأربعة تحدد الانفراج والالتواء لمجال كهربى ومغناطيسى . ومجموعة المعادلات التكاملية الأربع المناظرة التى تطبق على المجالات الكهربية الاستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة هى

$$
\begin{aligned}
&\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho \, dv \\
&\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \\
&\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\
&\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0
\end{aligned}
\quad (٤١)
$$

وقد كان يمكن لدراستنا للمجالات الكهربية والمغناطيسية أن تكون اسهل بكثير إذا أمكننا فرض أى من مجموعتى المعادلات ، (٣٧) أو (٤١) . وبمعرفة جيدة بتحليل المتجهات ، كالتى يجب أن تكون لدينا الآن ، فأى من المجموعتين يمكن أن يحصل عليها بسهولة من الأخرى بتطبيق نظرية الانفراج أو نظرية ستوكس . والقوانين التجريبية المختلفة كان يمكن الحصول عليها بسهولة من هذه المعادلات .

كمثال على استخدام التدفق وكثافة التدفق فى المجالات المغناطيسية ، دعنا نجد التدفق بين الموصلين فى الخط المحورى بشكل ٨ ـ ٧أ . وجد أن شدة المجال المغناطيسى هو

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (a < \rho < b)$$

ولذلك

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

والتدفق المغناطيسى المحتوى بين الموصلين فى طول d هو التدفق العابر لأى مستوى نصف قطرى من $\rho = a$ الى $\rho = b$ ومن ، مثلا ، $z = 0$ إلى $z = d$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot d\rho \, dz \mathbf{a}_\phi$$

أو

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (٤٢)$$

هذا التعبير سيستخدم فيما بعد للحصول على محاثة خط نقل محورى .

ت ٨ ـ ٧ : خط نقل محورى للقدرة العالية يعمل بماء تبريد مار خلال موصل داخلى أجوف

وخارج الموصل الخارجي . أفرض أن نصفي قطري الموصل الداخلي هما 5mm و 7mm بينما الموصل الخارجي له نصفا قطرين 19mm و 20mm . وكل موصل يحمل تيار كليا منتظم التوزيع مقداره 2,000A dc . بعد إيجاد H و B داخل كل موصل وبين الموصلين ، عين التدفق المغناطيسي الكلي في طول 1m من : (أ) الموصل الداخلي ، (ب) الفراغ بين الموصلين ، (جـ) الموصل الخارجي .

الإجابة : 59.8μWb ، 399μWb ، $10.43\ \mu$Wb .

٨ ـ٦ : الجهود المغناطيسية المقياسية والمتجهة

يسهل حل مسائل المجال الكهروستاتيكي بقدر كبير باستخدام الجهد الكهروستاتيكي المقياسي V . ومع أن هذا الجهد له معنى فيزيائي حقيقي جدا لنا ، فهو رياضيا ليس أكثر من حجر صعود يسمح لنا أن نحل مسألة بخطوات عديدة أقل . اذا أعطينا تشكيل شحنة ، يمكننا أولا أن نوجد الجهد ثم منها شدة المجال الكهربي .

ويجب أن نسأل ما اذا كانت مثل هذه المساعدة متاحة في المجالات المغناطيسية أم لا . هل نستطيع تعريف دالة جهد التي يمكن أن توجد من توزيع التيار ومنها يمكن تعيين المجالات المغناطيسية بسهولة ، هل يمكن تعريف جهد مغناطيسي مقياسي مشابه للجهد الكهروستاتيكي المقياسي ؟ سنبين في الصفحات القليلة القادمة أن الاجابة على السؤال الأول هي « نعم » ، ولكن الثاني يجب أن يجاب عنه بـ « أحيانا » . دعنا نواجه السؤال الأخير أولا بفرض وجود جهد مغناطيسي مقياسي ، الذي نرمز له بـ V_m ، الذي سالب تدرجه يعطي شدة المجال المغناطيسي

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

اختيار سالب التدرج سيمدنا بتناظر اقرب للجهد الكهربي وللمسائل التي قُمنا من قبل بحلها .

هذا التعريف يجب ألا يتعارض مع نتائجنا السابقة للمجال المغناطيسي ، ولذلك

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

على أن التواء التدرج لأي مقياسي تطابق الصفر ، وهذه متطابقة متجه وبرهانها متروك للحظة فراغ . ولذلك نرى أن اذا كانت H تعرف كتدرج جهد مغناطيسي مقياسي ، فان كثافة التيار يجب أن تكون صفرا في كل أنحاء المنطقة الذي يعرف فيها الجهد المغناطيسي المقياسي . يكون لدينا عندئذ

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla V_m \qquad (\mathbf{J} = 0)} \quad (٤٣)$$

لأن كثيرا من مسائل المغناطيسية تشتمل على أشكال هندسية يشغل فيها الموصل الحامل للتيار نسبة صغيرة نسبيا من المنطقة كلها موضع الاهتمام ، فانه واضح أن جهدا مغناطيسيا مقياسيا يمكن أن يكون مفيدا . الجهد المغناطيسي المقياسي يمكن تطبيقه أيضا فى حالة المغناطيسيات الدائمة . ووحدة V_m هى بوضوح الأمبير .

هذا الجهد المقياسي يحقق أيضا معادلة لابلاس . فى فضاء حر ،

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

وعلى ذلك

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

أو

$$\boxed{\nabla^2 V_m = 0 \qquad (\mathbf{J} = 0)} \quad (٤٤)$$

سنرى فيما بعد أن V_m يستمر فى أن يحقق معادلة لابلاس فى المواد المغناطيسية المتجانسة ، وهو لايعرف فى أى منطقة توجد فيها كثافة تيار .

مع أننا سنعتبر الجهد المغناطيسي المقياسي على نطاق أكثر اتساعا فى الفصل التالى ، عندما نقدم المواد المغناطيسية ونناقش الدائرة المغناطيسية ، فان فرقا واحدا بين V و V_m يجب الان أن نشير اليه : V_m ليست دالة وحيدة القيمة للموضع . الجهد الكهربى V وحيدة ـ القيمة ، بمجرد تحديد مرجع صفرى ، فان هناك قيمة واحدة فقط V مرتبطة مع كل نقطة فى الفراغ . وليست هذه هى الحالة مع V_m . اعتبر المقطع العرضى للخط المحورى المبين فى شكل ٨ ـ ١٧ . فى الحيز $a < \rho < b$ ، $J = 0$ ، ويمكن أن نوجد جهدا مغناطيسيا مقياسيا . قيمة $\mathbf{H}$ هى

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

حيث I التيار الكلى المار فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ فى الموصل الداخلى . بتطبيق (٤٣) ،

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\nabla V_m|_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

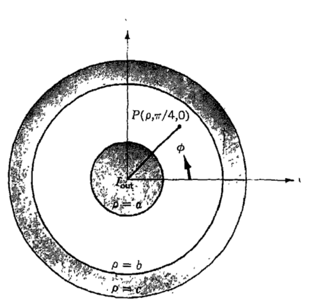
أو

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

على ذلك

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حيث قد وضع ثابت التكامل ، يساوى صفرا .



شكل ٨ ـ ١٧ الجهد المغناطيسى المقياسى V_m دالة متعددة القيمة فى φ فى المنطقة $a < \rho < b$ الجهد الكهروستاتيكى دائما وحيد ـ القيمة .

أى قيمة للجهد ترتفق بالنقطة ρ ، حيث $\phi = \pi/4$ ؟ . اذا جعلنا V_m صفرا عند $\phi = 0$ ونتقدم فى اتجاه عكس عقرب الساعة حول الدائرة ، فيصبح الجهد المغناطيسى سالبا خطيا . عندما نكون قد عملنا دورة ، يكون الجهد $-I$ ، ولكن تلك كانت النقطة التى عندها قلنا ان الجهد كان صفرا منذ لحظة . اذن عند P $\phi = \pi/4 , 9\pi/4 , 17\pi/4, \ldots$ أو $-7\pi/4, -15\pi/4 , -23\pi/4 , -23\pi/4$، أو

$$V_{mP} = \frac{I}{2\pi}(2n - \tfrac{1}{4})\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

أو

$$V_{mP} = I(n - \tfrac{1}{8}) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

السبب لهذا التعدد فى القيمة يمكن أن يُبين بمقارنة مع الحالة الكهروستاتيكية . هناك ، نعرف أن

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ولذلك فالتكامل الخطى

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

لايعتمد على المسار . ولكن فى الحالة المغناطيسية الاستاتيكية ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \qquad (\text{حيثما } \mathbf{J} = 0)$$

ولكن $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$

حتى اذا كان J صفرا على طول مسار التكامل . كل مرة نعمل دورة كاملة أخرى حول التيار ، تزيد نتيجة التكامل بـ I . اذا لم يحتو تيار I بالمسار ، حينئذ يمكن أن يعرف دالة جهد وحيدة ـ القيمة . على أنها عامة ،

$$V_{m,\,ab} = -\int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \qquad \text{(specified path)} \qquad (٤٥)$$

حيث يجب أن يختار مسار محدد ، أو مسار ذو نمط معين . يجب أن نتذكر أن الجهد الكهروستاتيكى V مجال محافظ ، الجهد المغناطيسى المقياسى V_m ليس مجالا محافظا . فى مسألة الخط المحورى دعنا نقيم حاجزا[1] عند $\phi = \pi$ ، ونتفق الا نختار مسارا يعبر هذا المستوى . لذلك لانستطيع الالتفاف حول I ، وجهد وحيد القيمة يكون ممكنا . ويظهر أن النتيجة هى

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \qquad (-\pi < \phi < \pi)$$

و

$$V_{mP} = -\frac{I}{8} \qquad (\phi = \pi/4)$$

الجهد المغناطيسى المقياسى هو بوضوح الكمية التى تكون أسطحها متساوية ـ الجهد مربعات منحنية الخطوط مع خطوط انسياب H فى شكل ٨ ـ ٤ . وهذا وجه اخر من أوجه التناظر بين المجالات الكهربية والمغناطيسية الذى سنفيض بالحديث عنه فى الفصل التالى .

---

(١) هذا يقابل التعبير الرياضى الأكثر دقة قطع تفرع "branch cut"

دعنا نترك مؤقتا الجهد المغناطيسى المقياسى الآن ونفحص جهدا مغناطيسيا متجها . هذا المجال المتجه هو واحد مفيد للغاية فى دراسة الاشعاع من الهوائيات ، من الفتحات ، واشعاع التسرب من خطوط النقل ، أدلة الموجات ، وأفران الموجات الدقيقة . يمكن أن يستخدم الجهد المغناطيسى المتجه فى مناطق حيث تكون كثافة التيار صفرا أوغير صفر ، وسنكون أيضا قادرين على أن نمدها لحالة التغير الزمنى فيما بعد .

واختيارنا للجهد المغناطيسى المتجه يبين بملاحظة أن

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

بعد ذلك ، تبين متطابقة متجهة اثبتناها فى قسم ٨ ـ ٤ أن انفراج الالتواء لأى مجال متجه يساوى صفرا . ولذلك نختار

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \qquad (٤٦)$$

حيث تعنى A جهدا مغناطيسيا متجها ، وتحقق آليا الشرط أن كثافة التدفق المغناطيسى سيكون لها إنفراج صفرى . المجال H هو

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

و

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

التواء الالتواء لمجال متجه لايساوى صفرا وتعطى بتعبير معقد الى حد ما[1] ، الذى لانحتاج ان نعرفه الآن فى صورة عامة . فى حالات معينة معروف لها صورة A ، يمكن أن تطبق عملية الالتواء مرتين لتعيين كثافة التيار .

المعادلة (٤٦) تخدم كتعريف مفيد للجهد المغناطيسى المتجه A . لأن عملية الالتواء تحوى تفاضلا بالنسبة لطول ، فان وحدات A هى وبر لكل متر .

الى الان رأينا فقط أن تعريف A لايتعارض مع أى نتائج سابقة . لايزال يبقى أن نبين أن هذا التعريف بالذات يمكن أن يساعدنا لتعيين مجالات مغناطيسية بسهولة أكثر . وبالتأكيد لانستطيع أن نماثل A بأى كمية تقاس بسهولة أو تجربة صنعت تاريخا .

---

(١) $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla . \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ فى الاحداثيات الكرتيزية ، يمكن بيان ان :
$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$.

سنبين فى القسم التالى أنه ، اذا أعطينا قانون بيو ـ سافار ، تعريف B ، وتعريف A ، فان A يمكن أن تعين من عنصر التيار التفاضلى بواسطة

$$\boxed{A = \int \frac{\mu_0 I \, dL}{4\pi R}} \qquad (٤٧)$$

معنى الحدود فى (٤٧) هى نفسها مثل التى فى قانون بيو ـ سافار ، تيار مستمر I يسرى فى موصل فتيلى فيه أى طول تفاضلى dL على بعد R من النقطة التى ستوجد عندها A . لأننا قد عرفنا A فقط خلال تعيين التوائها ، فانه من الممكن أن نضيف تدرج أى مجال مقياسى الى (٤٧) بدون تغيير B أو H ، لأن التواء التدرج تطابق الصفر . فى المجالات المغناطيسية الثابتة ، عادة نجعل هذا الحد الممكن اضافته يساوى صفرا .

والحقيقة أن A هو جهد مغناطيسى متجه تكون أكثر وضوحا عندما تقارن (٤٧) مع التعبير المشابه للجهد الكهروستاتيكى ،

$$V = \int \frac{\rho_L \, dL}{4\pi\epsilon_0 R}$$

كلا التعبيرين هو التكامل على خط منبع ، فى احدى الحالتين خط شحنة وفى الحالة الاخرى خط تيار ، وكلا المكاملين يتناسب عكسيا مع المسافة من المنبع الى نقطة الاهتمام ، وكلا يتضمن خاصية للوسط (هنا فضاء حر) ، الانفاذية أو السماحية .

يمكن كتابة المعادلة (٤٧) فى الصورة التفاضلية ،

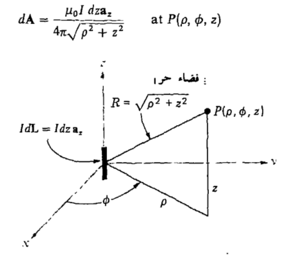
$$dA = \frac{\mu_0 I \, dL}{4\pi R} \qquad (٤٨)$$

لو اتفقنا مرة أخرى ألا ننسب أى معنى فيزيائى لأى مجالات مغناطيسية نحصل عليها من (٤٨) الى أن يعتبر كل المسار المغلق الذى يمر فيه التيار .

ومع هذا التحفظ ، دعنا نواصل ونعتبر مجال الجهد المغناطيسى المتجه حول فتيلة تفاضلية . نضع الفتيلة عند نقطة الأصل فى فضاء حر ، كما هو مبين فى شكل ٨ ـ ١٨ ، ونسمح لها أن تمتد فى الاتجاه الموجب لـ z بحيث $dL = dz\mathbf{a}_z$. نستخدم الاحداثيات الاسطوانية لنوجد dA عند النقطة (ρ, ϕ, z) .

$$dA = \frac{\mu_0 I \, dz\mathbf{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$dA = \frac{\mu_0 I\, dz\mathbf{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \qquad \text{at } P(\rho, \phi, z)$$



شكل ٨ ـ ١٨ عنصر التيار التفاضلى $Idz\mathbf{a}_z$ عند نقطة الأصل ينشىء مجال الجهد المغناطيسى المتجه ،

أو

$$dA_z = \frac{\mu_0 I\, dz}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \qquad dA_\phi = 0 \qquad dA_\rho = 0 \qquad (٤٩)$$

نلاحظ أولا اتجاه dA هو نفسه مثل ذاك لـ IdL . كل قسم صغير من موصل حامل للتيار ينتج اسهاما للجهد المغناطيسى المتجه الكلى الذى له نفس اتجاه التيار المار فى الموصل . يتغير مقدار الجهد المغناطيسى المتجه عكسيا مع المسافة لعنصر التيار ، يكون أقوى ما يمكن بجانب التيار ويتناقص تدريجيا الى الصفر عند النقط البعيدة . يصف Skilling[1] مجال الجهد المغناطيسى المتجه كـ « مثل توزيع التيار ولكن مشوش حول الأحرف ، أو مثل صورة للتيار غير مركزة » .

ولكى نوجد شدة المجال المغناطيسى ، يجب أن نأخذ التواء (٤٩) فى الاحداثيات الاسطوانية ، مؤدية الى

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times dA = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial\, dA_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{a}_\phi$$

أو

$$d\mathbf{H} = \frac{I\, dz}{4\pi}\,\frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{a}_\phi$$

التى يظهر بسهولة أنها نفس القيمة المعطاة بقانون بيو ـ سافار .

---

(١) انظر بيان المراجع عند نهاية هذا الفصل .

يمكن أيضا الحصول على تعبيرات للجهد المغناطيسى المتجه A لمنبع تيار موزع . بالنسبة للوح تيار K ، يصبح عنصر التيار التفاضلى

$$I\, d\mathbf{L} = \mathbf{K}\, dS$$

فى حالة مرور تيار فى كل أنحاء حجم بكثافة J ، يكون لدينا

$$I\, d\mathbf{L} = \mathbf{J}\, dv$$

فى كلا هذين التعبيرين قد أعطى التيار الصفة المتجهة للعنصر الفتيلى . من المعتاد ، مع أنه غير ضرورى ، أن نستخدم $Id\mathbf{L}$ بدلا من $\mathbf{I}dL$. لأن مقدار التيار الفتيلى ثابت ، فقد اخترنا الصورة التى تسمح لنا أن نخرج كمية من التكامل . والتعبيرات البديلة لـ A هى لذلك

$$\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K}\, dS}{4\pi R} \qquad (٥٠)$$

و

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \qquad (٥١)$$

تعبر المعادلات (٤٧) ، (٥٠) ، و (٥١) عن الجهد المغناطيسى المتجه كتكامل على كل منابعه . من مقارنة صور هذه التكاملات بتلك التى تعطى الجهد الكهروستاتيكى ، من الواضح مرة أخرى أن المرجع الصفرى لـ A عند مالانهاية ، لأنه لايمكن لعنصر تيار محدود أن يولد أى مساهمة عندما $R \to \infty$. يجب أن نتذكر أننا استخدمنا نادرا جدا التعبيرات المماثلة لـ V ، فكثيرا جدا اشتملت مسائلنا النظرية على توزيعات شحنة امتدت الى مالانهاية ، والنتيجة يجب أن تكون جهدا لانهائيا فى كل مكان . فى الحقيقة ، حسبنا مجالات جهد قليلة جدا الى أن حصل على الصورة التفاضلية لمعادلة الجهد $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon$ ، أو الأفضل ، $\nabla^2 V = 0$. وحينئذ كانت لنا حرية اختيار مرجعنا الصفرى الخاص .

التعبيرات المناظرة ل A ستستنتج فى القسم التالى ، وسيكمل مثال لحساب مجال الجهد المغناطيسى المتجه .

ت ٨ ـ ٨ : الملف الحلقى لشكل (٨ ـ ١١أ) معرف بـ $\rho_0 = 10$ cm ، $a = 3$ cm و $K_a = 140$ A/m . أوجد الجهد المغناطيسى المقياسى عند :
: اذا كان $z = 1.5$cm , $\phi = 2.2\pi$, $\rho = 12$cm

(أ) $V_m = 0$ عند $\phi = 0$ منشأ حاجز عند $\phi = \pi$ ، (ب) $V_m = 0$ عند $\phi = -\pi/2$ وموضوع حاجز عند $\phi = \pi$ ، (جـ) $V_m = 0$ عند $\phi = 0$ وموضوع حاجز عند $\phi = 0.1\pi$.

الاجابة : $55.4A$, $-21.6A$, $-6.16A$.

ت ٨ ـ ٩ : قيمة A فى موصل مصمت غير مغناطيسى نصف قطره a يحمل تيارا كليا I فى اتجاه a_z يمكن أن توجد بسهولة . باستخدام القيمة المعروفة لـ H أو B لـ $\rho < a$ ، فان (٤٦) يمكن أن تحل فى A . اختر $A = (\mu_0 I \ln 5)/2\pi$ عند $\rho = a$ (لتقابل مثالا فى القسم التالى) وأوجد A عند : (أ) $P = 0$ ، (ب) $\rho = 0.4a$ ، (جـ) $\rho = 0.9a$.

الاجابة : $0.422 I a_z \mu Wb/m$; $0.406 I a_z \mu Wb/m$; $0.341 I a_z$ $\mu Wb/m$.

٨ ـ ٧ : استنباط قوانين المجال المغناطيسى الثابت

سننفذ الآن وعدنا بأن نعطى البراهين الموعودة للعلاقات العديدة بين كميات المجال المغناطيسى . كل هذه العلاقات يمكن أن يحصل عليها من تعاريف H ،

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I\,d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \qquad (٣)$$

لـ B

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad (٣٢)$$

ولـ A ،

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (٤٦)$$

دعنا أولا نفرض أنه يمكننا التعبير عن Aبـ

$$\mathbf{A} = \int_{vol} \frac{\mu_0 \mathbf{J}\,dv}{4\pi R} \qquad (٥١)$$

ثم نبين صحة (٥١) ببيان أن (٣) تتبع منها . أولا يجب أن نضيف رموزا سفلية لتبين النقطة (x_1, y_1, z_2) التى يقع عندها عنصر التيار والنقطة (x_2, y_2, z_1) التى تعطى عندها A . عندئذ يكتب عنصر الحجم التفاضلى dv أنه dv_1 وفى الاحداثيات الكرتيزية يجب أن يكون $dx_1\, dy_1\, dz_1$. ومتغيرات التكامل هى x_1 ، y_1 و z_1 . عندئذ ، باستخدام هذه الرموز السفلية ،

$$(\text{٥٢})\quad A_2 = \int_{vol} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_1 \, dv_1}{4\pi R_{12}}$$

من (٣٢) و (٤٦) نحصل على

$$(\text{٥٣})\quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0}$$

لكى نبين أن (٣) تتبع من (٥٢) ، فمن الضرورى أن نعوض (٥٢) فى (٥٣) . هذه الخطوة تشتمل على أخذ التواء A_2 ، كمية معبر عنها بدلالة المتغيرات x_2 , y_2 و z_2 ، ولذلك يشتمل الالتواء على مشتقات جزئية بالنسبة لـ x_2 , y_2 و z_2 . نعمل هذا ، واضعين رمزا سفليا على عامل الدل ليذكرنا بالمتغيرات المشتملة فى عملية التفاضل الجزئى ،

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\nabla_2 \times \mathbf{A}_2}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_{vol} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_1 \, dv_1}{4\pi R_{12}}$$

وترتيب التفاضل الجزئى والتكامل غير هام ، و $\mu_0/4\pi$ ثابت ، سامحا لنا أن نكتب

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1 \, dv_1}{R_{12}}$$

تمثل عملية الالتواء داخل المكامل التفاضل الجزئى بالنسبة لـ x_2 , y_2 و z_2 . عنصر الحكم التفاضلى dv_1 مقياسى ودالة فى x_1 , y_1 و z_1 فقط . بناء على ذلك ، يمكن أن تخرج كعامل من عملية الالتواء كأى ثابت اخر ، تاركة

$$(\text{٥٤})\quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left(\nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \right) dv_1$$

التواء حاصل ضرب مقياس ومتجه تعطى بمتطابقة يمكن أن تختبر بالفك فى الاحداثيات الكرتيزية ،

$$(\text{٥٥})\quad \nabla \times (S\mathbf{V}) \equiv (\nabla S) \times \mathbf{V} + S(\nabla \times \mathbf{V})$$

تستخدم هذه المتطابقة فى فك مكامل (٥٤) ،

$$(\text{٥٦})\quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) \times \mathbf{J}_1 + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \times \mathbf{J}_1) \right] dv_1$$

الحد الثانى لهذا المكامل صفر ، لأن $\nabla_2 \times \mathbf{J}_1$ تبين مشتقة جزئية لدالة فى x_1 , y_1 و z_1 مأخوذة بالنسبة للمتغيرات x_2 , y_2 و z_2 ، المجموعة الأولى من المتغيرات ليست دالة فى المجموعة الثانية ، وكل المشتقات الجزئية أصفارا .

يمكن تعيين الحد الأول للمكامل بالتعبير عن R_{12} بدلالة القيم الاحداثية ،

$$R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وأخذ تدرج مقلوبها . تبين المسألة رقم ٤١ أن النتيجة هى

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} = -\frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} = -\frac{\mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2}$$

بتعويض هذه النتيجة فى (٥٦) ، نحصل على

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{a}_{R12} \times \mathbf{J}_1}{R_{12}^2}\, dv_1$$

أو

$$\mathbf{H}_2 = \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}\, dv_1$$

التى تكافىء (٣) بدلالة كثافة التيار . باستبدال $\mathbf{J}_1\, dv_1$ بـ $I_1\, d\mathbf{L}_1$ ، يمكننا اعادة كتابة التكامل الحجمى كتكامل خطى مغلق ،

$$\mathbf{H}_2 = \oint \frac{I_1\, d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

وعلى ذلك معادلة (٥١) صحيحة وتتفق مع المعادلات الثلاث (٣) ، (٣٢) و (٤٦) .

فيما يلى سنثبت قانون أمبير الدائرى فى الصورة النقطية

(٢٨) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

بضم (٣٢) و (٤٦) ، نحصل على

(٥٧) $\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$

الآن نحتاج مفكوك $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ فى الاحداثيات الكرتيزية . بإجراء التفاضلات الجزئية المبينة وتجميع الحدود الناتجة ، يمكننا كتابة النتيجة بالصورة ،

(٥٨) $\boxed{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}}$

حيث

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z} \quad (٥٩)$$

معادلة (٥٩) هى التعريف (فى الاحداثيات الكرتيزية) للابلاسى لمتجه .
بتعويض (٥٨) فى (٥٧) ، نحصل على

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] \quad (٦٠)$$

وتتطلب الآن تعبيرات للانفراج وللابلاسى لـ A .

يمكننا أن نوجد انفراج A بتطبيق عملية الانفراج على (٥٢) ،

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \, dv_1 . \quad (٦١)$$

واستخدام المتطابقة المتجهة (٤٤) لقسم ٤ ـ ٨ ،

$$\nabla \cdot (S\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V} \cdot (\nabla S) + S(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

منتجة

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1) \right] dv_1 \quad (٦٢)$$

الجزء الثانى من المكامل يساوى صفرا ، لأن J_1 ليست دالة فى x_2 , y_2 و z_2 . وقد استخدمنا سابقا النتيجة أن $\nabla_2 (1/R_{12}) = -\mathbf{R}_{12}/R^3_{12}$ وسهل تماما بيان أن ،

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{{R_{12}}^3}$$

أو أن $$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{12}}$$

لذلك يمكن أن تكتب معادلة (٦٢) بالصورة

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[-\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} \right) \right] dv_1$$

وتطبيق المتطابقة المتجهة مرة أخرى ،

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\frac{1}{R_{12}} (\nabla_1 \cdot \mathbf{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \right) \right] dv_1 \quad (٦٣)$$

لأننا مهتمون فقط بالمجالات المغناطيسية الثابتة ، تبين معادلة الاستمرارية أن الحد الأول فى (٦٣) يساوى صفرا . ويعطى تطبيق نظرية الانفراج على الحد الثانى

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \cdot d\mathbf{S}_1$$

حيث يحصر السطح S_1 الحجم الذى نكامل فى كل أنحائه . هذا الحجم يجب أن يحتوى على كل التيار ، لأن تعبير التكامل الأصلى لـ A كان تكاملا بحيث يحتوى على تأثير كل التيار . لأن ليس هناك تيار خارج هذا الحجم (وإلا لكنا قد اضطررنا أن نزيد الحجم ليحتويه) ، يمكننا أن نكامل على حجم أكبر قليلا أو سطحا يحتويه أكبر قليلا بدون تغيير A . على هذا السطح الأكبر يجب أن تكون كثافة التيار $\mathbf{J}_1$ صفرا ، ولذلك يكون التكامل السطحى المغلق صفرا ، لأن المكامل يساوى صفرا . وعلى ذلك انفراج A يساوى صفرا .

لكى نوجد اللابلاسى للمتجه A دعنا نقارن المركبة فى اتجاه x لـ ٥١ مع التعبير المشابه للجهد الكهروستاتيكى ،

$$A_x = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 J_x \, dv}{4\pi R} \qquad V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho \, dv}{4\pi\epsilon_0 R}$$

نلاحظ أن أحد التعبيرين يمكن أن يحصل عليه من الآخر بتغيير مباشر للمتغيرات ، J_x بدلا من ρ ، μ_0 بدلا من $1/\epsilon_0$ و A_x بدلا من V . مع ذلك ، قد استنبطنا بعض المعلومات الاضافية عن الجهد الكهروستاتيكى التى لن نضطر لاعادتها الآن عن المركبة فى اتجاه x للجهد المغناطيسى المتجه . وهذه تأخذ صورة معادلة بواسون ،

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

التى تصبح ، بعد تغيير المتغيرات ،

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

بالمثل ، لدينا

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

و $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$

أو $\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}}$ (٦٤)

بالرجوع الى (٦٠) ، يمكننا الآن أن نعوض عن الانفراج واللابلاسى لـ A ونحصل على الاجابة المرغوبة ،

(٢٨) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

قد بينا من قبل استخدام نظرية ستوكس فى الحصول على الصورة التكاملية لقانون أمبير الدائرى من (٢٨) ولا نحتاج لتكرار العمل هنا .

وعلى ذلك فقد نجحنا فى بيان أن كل نتيجة قد انتزعناها أساسا من الهواء الرفيع[١] للمجالات المغناطيسية تتبع من التعاريف الأساسية لـ H و B و A . والاستنباطات ليست بسيطة ، ولكنها يجب أن تفهم على أساس خطوة بخطوة . ونأمل أن الطريقة لن يلزم أبدا أن تحفظ عن ظهر قلب .

فى النهاية ، دعنا نعود لـ(٦٤) ونستعمل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية المتجهة من الرتبة الثانية الهائلة الصعوبة لنوجد الجهد المغناطيسى المتجه فى مثال واحد بسيط . نختار المجال بين موصلى كابل محورى ، مع نصفى قطريه a و b كالمعتاد ، وتيار I فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. وبين الموصلين ، $\mathbf{J} = 0$ ، ولذلك

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

وقد أخبرنا سابقا (وتتيح لنا المسألة رقم ٤٣ الفرصة للتحقق من النتائج لأنفسنا) أن اللابلاسى المتجه يمكن أن يفك على صورة المجموع المتجه للابلاسيات المقياسية للمركبات الثلاثة فى الاحداثيات الكرتيزية ،

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$$

ولكن مثل هذه النتيجة البسيطة نسبيا غير ممكنة فى نظم الاحداثيات الأخرى . أى أن فى الاحداثيات الاسطوانية ، مثلا ،

(١) فضاء حر .

$$\nabla^2 \mathbf{A} \neq \nabla^2 A_\rho \mathbf{a}_\rho + \nabla^2 A_\phi \mathbf{a}_\phi + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$$

على أنه ، ليس صعبا أن نبين للاحداثيات الاسطوانية أن المركبة فى اتجاه z للابلاسى المتجه هو اللابلاسى المقياسى للمركبة فى اتجاه z لـ $\mathbf{A}$ ، أو

$$\nabla^2 \mathbf{A} |_z = \nabla^2 A_z \quad (٦٥)$$

ولأن التيار هو كلية فى اتجاه z فى هذه المسألة ، فإن $\mathbf{A}$ لها مركبة فى اتجاه z فقط . لذلك

$$\nabla^2 A_z = 0$$

أو

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0$$

التفكير بأفكار مماثلة عن (٥١) يبين لنا أن A_z دالة فى ρ فقط ، وعلى ذلك

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dA_z}{d\rho}\right) = 0$$

وقد قمنا بحل هذه المعادلة من قبل ، والنتيجة هى

$$A_z = C_1 \ln \rho + C_2$$

اذا اخترنا مرجعاً صفرا عند $\rho = b$ فان

$$A_z = C_1 \ln \frac{\rho}{b}$$

لكى نربط C_1 بالمصادر فى مسألتنا ، نستطيع أخذ التواء $\mathbf{A}$ ،

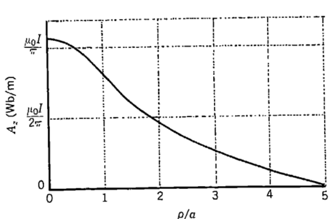
$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\mathbf{a}_\phi = -\frac{C_1}{\rho}\mathbf{a}_\phi = \mathbf{B}$$

نحصل على $\mathbf{H}$ ،

$$\mathbf{H} = -\frac{C_1}{\mu_0 \rho}\mathbf{a}_\phi$$

ونقدر التكامل الخطى

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_0^{2\pi} -\frac{C_1}{\mu_0 \rho}\mathbf{a}_\phi \cdot \rho\, d\phi \mathbf{a}_\phi = -\frac{2\pi C_1}{\mu_0}$$



شكل ٨ ـ ١٩ : الجهد المغناطيسى المتجه مبين داخل الموصل الداخلى وفى المنطقة بين الموصلين لكبل محورى فيه $b = 5a$ يحمل I فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. اخذ اختياريا $A_z = 0$ عند $\rho = b$.

على ذلك $C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$

أو

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{\rho} \qquad (٦٦)$$

و $H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$

كما سبق . رسم لـ A_z مع ρ لحالة $b = 5a$ مبين فى شكل ٨ ـ ١٩ ، وفيه واضح نقص $|\mathbf{A}|$ مع المسافة من مصدر التيار المركز الذى يمثله الموصل الداخلى . نتائج المسألة ت ٨ ـ ٩ قد أضيفت أيضا الى الرسم فى شكل ٨ ـ ١٩ . وامتداد المنحنى فى الموصل الخارجى ترك كمسألة رقم ٤٢ .

من الممكن أيضا أن نوجد A_z بين الموصلين بتطبيق عملية يسميها بعضنا لاعرفيا « فك الالتواء uncurling » . أى أن نعرف H أو B للكابل المحورى ، ونستطيع لذلك أن نختار المركبة فى اتجاه ϕ لـ $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ونكامل لنحصل على A_z . جربها ، ستحبها ! .

ت ٨ ـ ١٠ : واضح أن معادلة (٦٦) يمكن تطبيقها على خارج أى موصل مقطعه دائرى يحمل تيارا I فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ فى فضاء حر . وضع المرجع الصفرى اختياريا عند $\rho = b$.

الان اعتبر أربع موصلات ، كل نصف قطره 1cm ، موازية للمحور z اثنان ممركزان عند $(-3,-3)$cm و $(3,3)$cm وكلا يحمل 10mA فى اتجاه a_z ، بينما تلك عند $(-3,3)$cm و $(3,-3)$cm يحمل كلا منها 10mA — . ضع $A=0$ عند نقطة الأصل ، واحسب A عند : (أ) (2,2,0)cm ، (ب) (2,4,0)cm ، (جـ) لانهاية .

الاجابة : $1.911a_z$nWb/m ، $2.17a_z$nWb/m ، 0 nWb/m .

مراجع مقترحة

1 - Boast,W.B.: (انظر المراجع المقترحة للفصل الثانى)
الجهد المغناطيسى المقياسى معرف فى P.220 واستخدامه فى تخطيط المجالات المغناطيسية مناقش فى P.444 .

2 - Jordan. E.C, and K.G. Balmain: "Electromagnetic Waves and Radiation Systems" 2nd ed, Prentice- Hall, Inc, Englewood Cliffs N.J, 1968.
الجهد المغناطيسى المتجه مناقش فى pp. 90-96 .

3 - Skilling, H.H.: (انظر المراجع المقترحة للفصل الثالث)
قدمت «عجلة التجديف» فى pp. 23–25

مسائل

١ ـ فتيلة طولها لانهائى على المحور x تحمل تيارا 10mA فى اتجاه a_x أوجد H و |H| عند $P\ (3,2,1)$.

٢ ـ (أ) تيار سطحى ، $K=-a_x$ A/m ، يمر فى المستوى $z=0$ خلال المنطقة $-5<y<5$m . احسب H عند $(0,0,1)$ وقارن نتيجتك مع اجابة توزيع التيار المنفصل للمسألة ٣أ ، $0.435a_y$A/m . (ب) الآن اعتبر التيار كفتيلة على المحور x تحمل 10A فى اتجاه $-a_x$ ، واحسب H عند $(0,0,100)$. قارن اجابتك بتلك للمسألة رقم ٣ب $0.01590a_y$A/m .

٣ ـ عشر فتائل تيار لانهائية الطول فى المستوى $z=0$ توازى المحور x وتقع عند y تساوى -4.5 , -3.5 , ... , -0.5, 0.5 , ... و 4.5m . كل يحمل 1A فى اتجاه $-a_x$. احسب H عند : (أ) $(0,0,1)$ ، (ب) $(0,0,100)$.

٤ ـ أوجد H عند $P\ (0,0,1)$ لـ : (أ) دائرة فتيلية مربعة فى شكل ٨ ـ ٢٠أ ، (ب) دائرة فتيلية دائرية فى شكل ٨ ـ ٢٠ب .

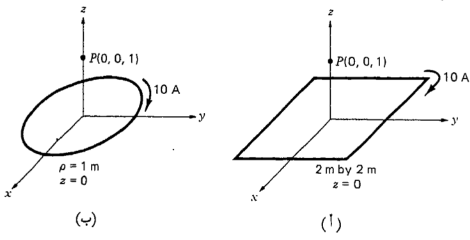
٥ ـ كلا من المحاور الاحداثية يحمل تيارا فتيليا 1A فى اتجاه a_x , a_y أو a_z أوجد H عند $(2,3,4)$.

٦ ـ أوجد H عند $Q(3,2,0)$ لتشكيل فتائل التيار الموضح فى شكل ٨ ـ ٢١ .

٧ ـ تيار سطحى $K = 4\rho a_\phi A/m$ ، يمر فى المستوى $z = 0$ خلال المنطقة الحلقية $2<\rho< 5m$. (أ) ما هو التيار العابر للمستوى $\phi = 0$ ؟ . (ب) أوجد H عند $P(0,0,h)$ ، (جـ) احسب قيمة H_z لـ $h = 5$.

٨ ـ أوجد H عند نقطة الأصل للوح تيار $K = K_0 a_\phi A/m$ على الاسطوانة $\rho = a$.

٩ ـ أوجد شدة المجال المغناطيسى المتجه عند $(0,0,5)$ المسبب بكثافة تيار منتظمة ، $K= 500a_y$ A/m ، على ذلك الجزء من المستوى $z = 0$ الذى فيه $0 < x < 10$ و $y > 0$.

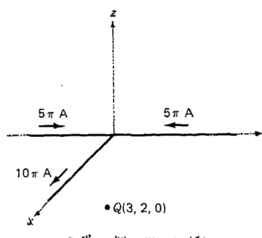


شكل ٨ ـ ٢٠ انظر مسألة ٤.

١٠ ـ عنصر تيار تفاضلى فيه $I = 0.5$A و $\Delta L= 10^{-6} a_L m$ موضوع عند $P_1 (-2,4,1)$ يمر التيار فى اتجاه خط مستقيم من P الى : $Q (-3, -1, -2)$. أوجد ΔH عند : (أ) نقطة الأصل ، (ب) $(2,3,4)$.

١١ ـ لعنصر التيار محدود الطول على المحور z ، كما هو مبين بشكل ٨ ـ ٥ ، استخدم قانون بيو ـ سافار لتستنبط معادلة (٩) بقسم ٨ ـ ١ .

١٢ ـ ملف حلقى ذو مقطع عرضى مربع معرف بالاسطوانتين $\rho = 5.1$ و $\rho = 7.1$cm والمستويين $z = 0$ و $z = 2$cm يحتوى الملف على 360 لفة من سلك رقيق مع تيار مستمر 50mA . دع اللفة الأولى تحمل تيارا فى اتجاه a_z عند $\phi = 0$ على السطح الخارجى ، وفى اتجاه $-a_z$ عند $\phi = 0.5°$ على السطح الداخلى ، وهكذا . (أ) أوجد H عند $\rho = 6$cm . (ب) ماكمية التيار المرتبط بالمسار الدائرى فى اتجاه a_ϕ عند $\rho = 6.5$cm , $z = 0.3$cm ؟ (جـ) ماكمية التيار المرتبط بالمسار المكون من أجزاء خطية مستقيمة من $(0,0,0)$ الى $(6,8,0)$cm الى $(6,8,20)$cm الى $(0,0,0)$ ، (د) باجزاء خطية مستقيمة من $(0,0,0)$ الى $(6,0,0)$cm الى $(6,8,0)$cm الى $(-6, 8, 0)$cm الى $(-6, 0,0)$cm الى $(0,0,0)$ ؟



شكل ٨ ـ ٢١ انظر مسألة ٦.

١٣ ـ الحيز $0 < x < 6$m يحمل كثافة التيار المنتظمة $J = 5a_zA/m^2$ و $J = 0$ فى أى مكان آخر . (أ) استخدم قانون أمبير الدائرى ومسارات قائمة فى المستوى $z = 0$ لتبين أن ، $H_{x<0} = -H_{x>6}$. (ب) أوجد H عند $(8,9,0)$. (جـ) عين H عند $(2,5,0)$.

١٤ ـ قشرة أسطوانية مجوفة نصف قطرها a ممركزة على المحور z وتحمل كثافة تيار سطحية منتظمة $K_a a_\phi$. (أ) بين أن H ليست دالة فى ϕ أو z . (ب) بين أن H_ϕ و H_ρ أصفاراً فى كل مكان .
(جـ) بين أن $H_z = 0$ لـ $\rho > a$. (د) بين أن $H_z = K_a$ لـ $\rho < a$. (هـ) قشرة ثانية ، $\rho = b$ ، تحمل تياراً $K_b a_\phi$. أوجد H فى كل مكان .

١٥ ـ أوجد H عند نقطة الأصل الناتجة عن : (أ) فتيلة تيار دائرية ، 7A فى اتجاه a_ϕ عند $\rho = 10$cm , $z = c$ ، (ب) خمس فتائل تيار دائرية كل منها 7A فى اتجاه a_ϕ عند $\rho = 10$cm , $z = 0$, $z = \pm 10$cm و$z = \pm 20$cm ، (جـ) فتيلة دائرية ، $I = 5 \times 7$A فى اتجاه a_ϕ عند $\rho = 10$cm , $z = 0$ ، (د) ملف لولبى لانهائى $K = (7/0.1)a_\phi$A/m ، عند $\rho = 10$cm .

١٦ ـ الملف الحلقى لشكل ٨ ـ ١١ ب له600 لفة مع $I = 0.5$A , $\rho_0 = 2.5$cm و $a = 1$cm محوره هو المحور x ، و I أساسا فى اتجاه a_x عند نصف القطر الخارجى . الملف اللولبى لشكل ٨ ـ ١٠ ب له1,000 لفة مع $I =$, $a = 5$cm 0.6A و $d = 50$cm . محوره هو المحور z ، و I أساسا فى اتجاه a_ϕ . كلا الملفين ممركز على نقطة الأصل . أوجد |H| عند : (أ) $(0,0,0)$ ، (ب) $(0,0.025,0)$ ، (جـ) $(0,-0.025,0)$ ، (د) $(0,0,0.25)$.

١٧ ـ تيار يمر فى اتجاه a_y ولايتغير مع x . دع كل متر عرض فى اتجاه x يحمل 100A . أوجد H عند $z = 3.11$m إذا كان توزيع التيار مع z كمايلى :

(أ) لوح عند 0 = $K= 100a_y$ A/mz ،
(ب) عشرة ألواح عند 4.5 ,... ,$Z = -4.5, -3.5$, $K = 10a_y$ A/m
(جـ) مائة لوح عند 4.95 , ... , $z = 4.95, -4.85, -4.75$, $K= a_y$ A/m على
كل ، (د) $J= 10aA/m^2$, $-5< z < 5$ و $J= 0$ فى أى مكان آخر .
١٨ ـ سلك نصف قطره $3mm$ له مادة لها $\sigma = 10^7$ ℧/m لـ $0 < \rho\ 2mm$ و℧/m لـ 2 $< \rho < 3mm$. إذا حمل السلك تيارا مستمرا كليا $100A$ ، احسب وارسم H مع ρ , $0 < \rho < 8mm$.
١٩ـ تيار مقداره $2.5A$ يمر فى اتجاه a_z فى فتيلة على المحور السالب لـ z . عند نقطة الأصل يمر خارجا والى أعلى كتيار سطحى على السطح المخروطى $\theta = 45°$. استخدم قانون أمبير الدائرى لايجاد H فى كل مكان .
٢٠ ـ يبين شكل ٨ ـ ٢٢ قيما لـ H_x (الى اليسار) و H_y (الى اليمين) بالأمبير لكل متر عند عدد من النقط على شبكة مربعة $1mm$ فى المستوى $z = 0$ بداخل موصل معين . قدر التيار العابر لمساحة دائرية $10^{-6}m^2$ ممركزة عند P .
٢١ ـ فى المسألة ت ٨ ـ ٤ ، ناتج قسمة التكامل الخطى المغلق لـ H والمساحة المحصورة به هو 3.97 بينما $(\nabla \times H)_x = 4.07$. نصف أبعاد المسار المربع حول $P (1, -3, 2)$ وبين أن ناتج القسمة الجديد هو تقريب أحسن لـ $(\nabla \times H)_x$.
٢٢ ـ إذا أعطيت شدة المجال المغناطيسى :
$H= [\ 1/\rho - (40 + \rho^{-1})e^{-40\rho}]a_\phi A/m$ ، أوجد :
(أ) H عند نقطة الأصل . (ب) J عند نقطة الاصل .

شكل ٨ ـ ٢٢ انظر مسألة ٢٠.

٢٣ - أوجد $\nabla^2 V$ و $\nabla \times \mathbf{E}$ لمجالات الجهد :
(أ) $V = 10\,(x^2 - y^2)$ ، (ب) $V = 10\,(x^2 - 2y^2)$. (جـ) أوجد $\nabla \times \mathbf{E}$ كدالة في الزمن للمجال المتغير مع الزمن التالي في خط نقل محوري
$\mathbf{E} = 10^4 \rho^{-1} \cos(10^8 t - 0.5z)\mathbf{a}_\rho$ V/m .

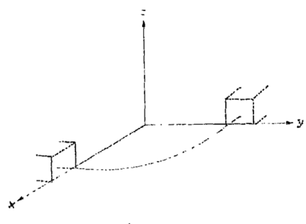
٢٤ - موصل مصمت ذو مقطع عرضي دائري نصف قطره 5mm له موصلية تتغير مع نصف القطر . الموصل طوله 20m وهناك فرق جهد قدره 0.1V dc بين طرفيه . خلال الموصل ، $\mathbf{H} = 10^5 \rho^2 \mathbf{a}_\phi$ A/m . (أ) أوجد σ كدالة في ρ . (ب) ما هي المقاومة بين الطرفين ؟

٢٥ - إذا أعطيت المجال المتجه $\mathbf{G} = (2x^2 + y)\mathbf{a}_x + 8 \times yz\mathbf{a}_y + (x^2y/z)\mathbf{a}_z$ ، احصل على قيمة عددية لـ $(\nabla \times \mathbf{G})_z$ عند $P\,(0.5, 2, 0.4)$ بطريقتين مختلفتين : (أ) احسب $\oint \mathbf{G}.d\mathbf{L}$ حول مسار مربع صغير مساحته $2a + 2a$ حول النقطة P في المستوى $z = 0.4$ ، اقسم على المساحة ، وخذ النهاية حينما $a \to 0$ ، (ب) استخدم معادلة (٢٢) لقسم ٨ - ٣ .

٢٦ - للمجال $\mathbf{H}$ المعطى في مسألة ٢٢ ، أوجد التيار الكلي المار خلال الاسطوانة $\rho = 1$cm بطريقتين مختلفتين .

٢٧ - قدر طرفي نظرية ستوكس للمجال $\mathbf{H} = (y^2z/x)\mathbf{a}_x + (0.5y^2z^2/x^2)\mathbf{a}_z$ وأوجد التيار في اتجاه $\mathbf{a}_y$ العابر للسطح المربع في المستوى $y = 2$ المحدود بـ $x = z = 1$ و $x = z = 2$.

٢٨ - عندما تكون x و y و z موجبة وأقل من 5 ، يمكن التعبير عن شدة مجال مغناطيسي معين بالصورة $\mathbf{H} = [x^2yz/(y+1)]\mathbf{a}_x + 3 \times 132^2 z^2 \mathbf{a}_y - [xyz^2/(y+1)]\mathbf{a}_z$.
أوجد التيار الكلي في اتجاه $\mathbf{a}_x$ الذي يعبر الشريط $x = 2$, $1 \leqslant y \leqslant 4$ و $3 \leqslant z \leqslant 4$ بطريقة مستخدما : (أ) تكامل سطحي ، (ب) تكامل خطي مغلق .



شكل ٨ - ٢٣ انظر مسألتي ٣٠ و ٣١.

٢٩ ـ شدة مجال مغناطيسى معين فى الاحداثيات الكروية معطى بالصورة $H= 10^6 r \sin \theta a_\phi$ A/m (أ) أوجد التيار فى اتجاه a_r خلال الغطاء الكروى $0 < \phi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi/6$, $r = 1$mm باستخدام أيا من طرفى نظرية ستوكس الذى تفضله أكثر . (ب) تحقق من النتيجة السابقة باستخدام طرف نظرية ستوكس الذى لاتفضله .

٣٠ ـ جزء من ملف حلقى مملوء بالهواء له مقطع عرضى 1cm × 1cm ونصف قطر داخلى 3cm مبين بشكل ٨ ـ ٢٣ . هناك 800 لفة كلا تحمل 5A الى الخارج نصف قطريا على السطح العلوى . (أ) ماقيمة B عند مركز المقطع العرضى ؟ . (ب) ماهو التدفق الكلى المار خلال المقطع العرضى ؟

٣١ ـ الملف الحلقى المخطط بشكل ٨ ـ ٢٣ مملوء بالهواء ، وله مقطع عرض : 1cm× 1cm نصف القطر الداخلى هو 3cm ، والتيار السطحى هناك هو $500 a_z$A/m . احسب : (أ) H عند $\rho = 2$cm , $\phi = 0.1\pi$, $z = 0$ ، (ب) H عند $\rho = 3.2$ cm , $\phi = 0.2\pi$, $z = 0.2$cm ،

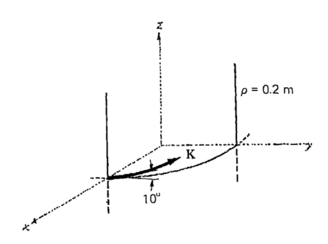
(جـ) $B(\rho_1,\phi,z)$ ، (د) التدفق الكلى داخل الملف الحلقى .

٣٢ ـ تيار فتيلى قدره 0.4A يمر نحو نقطة الأصل على المحور x فى المدى $0 < x < \infty$.
(أ) أوجد $B(x,y,0)$. (ب) ماكمية التدفق التى تعبر المستوى $z = 0$ فى المنطقة $1 < y < 2$, $1 < x < 2$ ؟

٣٣ ـ فى الجزء الأوسط من الولايات المتحدة ، قيمة ممثلة للمركبة الأفقية للمجال المغناطيسى للأرض هى 0.2G أو 2×10^{-5}Wb/m^2 ، لكى نقدر التأثير الذى قد يكون لنظام كهربى ذاتى الحركة على بوصلة لوحة أجهزة قياس ، احسب المسافة من سلك مستقيم طويل يحمل 5A d.c التى عندها التأثير على البوصلة يكون مساوياً ذاك للأرض .

٣٤ ـ توجد كثافة التيار $J= 5a_y$ A/m^2 حيثما $|z| < 2$cm . (أ) أوجد H فى $|z| < 2$m و $|z| > $m . (ب) أوجد B فى كل مكان . (جـ) عين V_m فى $z < -2$ اذا كانت $V_m = 0$ عند $P(0,0,-2)$. (د) أوجد A لـ $|z| < 2$ اذا كانت $A= 0$ عند نقطة الأصل .

٣٥ ـ فى الملف اللولبى المملوء بالهواء المبين فى شكل ٨ ـ ١٠أ ، دع $K_a = 800$A/m و $a = 3$cm (أ) أوجد فرق الجهد المغناطيسى المقياسى بين النقطتين : $P(\rho = 1$cm, $\phi = 0, z = 4$cm) و $Q(\rho = 2$cm , ϕ 1.5π , $z = 8$cm .
(ب) استخدم $B = \nabla \times A$ لايجاد A ثم عين فرق الجهد المغناطيسى المتجه بين النقط ρ و Q إذا كانت $A= 0$ عند $\rho = 0$.



شكل ٨ - ٢٤ انظر مسألة ٣٨.

٣٦ - ثلاثة ألواح تيار لانهائية موضوعة فى فضاء حر كما يلى : $100\mathbf{a}_x$ A/m عند $z = 0$ ، $-50\mathbf{a}_x$ عند $z = 4$m ، $-50\mathbf{a}_x$ عند $z = -4$. (أ) دع $V_m = 0$ عند $P\ (1,2,3)$ وأوجد V_m عند $Q\ (1.5,2.6,3.7)$. (ب) دع $\mathbf{A} = 0$ عند P وأوجد A عند Q . (اقتراح : استخدم المركبة المناسبة لـ A × ∇ = B زيادة على معلوماتك عن اتجاه A)

٣٧ - ثلاثة أفرخ تيار اسطوانية موضوعة فى فضاء حر كمايلى : $100\mathbf{a}_z$A/m عند : $\rho = 2$m ، $20\mathbf{a}_z$ عند $\rho = 3$ و $-65\mathbf{a}_z$ عند $\rho = 4$ ضع $V_m = 0$ عند $\phi = 0$ واختر حاجزا عند $\phi = \pi$ أوجد : (أ) V_m عند $P\ (2.5,70^\circ,0)$ ، (ب) V_m عند $Q(3.5,\ 210^\circ)$.

٣٨ - يبين شكل ٨ - ٢٤ جزءاً من سطح أسطوانى ، $\rho = 0.2$m عليه تيار سطحى منتظم قدره $1,600$A/m يسرى بحيث يعمل اتجاهه فى كل مكان زاوية قدرها 10° مع مستوى z = ثابت . (أ) اكتب تعبيرا لـ K فى الاحداثيات الاسطوانية . (ب) أوجد H فى كل مكان . (جـ) أوجد V_m لـ $\rho < 0.2$ اذا كانت $V_m = 0$ عند نقطة الأصل . (د) أوجد V_m لـ $\rho > 0.2$ إذا كانت $V_m = 0$ عند $(1,0^\circ,0)$.

٣٩ - تيار فتيلى مقداره 6mA يسرى فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ عند $x = -2$m , $y = 0$ و 6mA فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ — موجود عند $x = 2$, $y = 0$. أوجد V_m على المحور y إذا كان $V_m = 0$ عند نقطة الأصل .

٤٠ - دع $\mathbf{J} = 6 \times 10^9(\rho - 0.001)^2\mathbf{a}_z$ A/m^2 فى $0 \leqslant \rho \leqslant 1$mm و $\mathbf{J} = 0$ فى أى مكان آخر . اذا كان $\mathbf{A} = 0$ عند $\rho = 1$cm واذا كان A مستمرا عند $\rho = 1$mm ، ارسم منحنيات لـ : (أ) |H| مع P , $0 \leqslant \rho \leqslant 5$ (ب) |A| مع ρ; $0 \leqslant \rho \leqslant 5$mm .

٤١ - بين أن $\nabla_2\ (1/R_{12}) = -\ \nabla\ (1/R_{12}) = \mathbf{R}_{21}\ /\ R^3_{12}$.

٤٢ ـ احسب الجهد المغناطيسى داخل الموصل الخارجى لخط محورى الذى جهده المغناطيسى المتجه مبين فى شكل ٨ ـ ١٩ إذا كان نصف القطر الخارجى للموصل الخارجى هو $7a$. اختر المرجع الصفرى المناسب ، وارسم النتائج تخطيطياً على الشكل .

٤٣ ـ بفك معادلة (٥٨) ، قسم ٨ ـ ٧ ، فى الاحداثيات الكرتيزية ، بين أن (٥٩) صحيحة .

الفصل التاسع

القوى المغناطيسية ، المواد ، والمحاثة

كميات المجال المغناطيسي H , B , Φ , V_m و A التي قدمت في الفصل الأخير لم تعط بعد أهمية فيزيائية كبيرة . كل من هذه الكميات معرف فقط بدلالة توزيع منابع التيار في كل مواضع الفضاء . وإذا عرف توزيع التيار ، يجب أن نشعر أن H , B و A معينة في كل نقطة في الفراغ ، بالرغم من أننا قد نكون غير قادرين على إيجاد قيم التكاملات المعرفة بسبب تعقيد رياضي .

نحن الآن مستعدون لمعالجة النصف الثاني لمسألة المجال المغناطيسي ، ذاك لتعيين القوى وعزوم التدوير المؤثرة بالمجال المغناطيسي على شحنات أخرى . يسبب المجال الكهربي قوة لتؤثر على شحنة التي قد تكون إما ساكنة أو في حركة ، سنرى أن المجال المغناطيسي الثابت قادر على التأثير بقوة على شحنة متحركة فقط . تبدو هذه النتيجة معقولة ، مجال مغناطيسي يمكن أن ينتج عن شحنات متحركة ويمكن أن يؤثر بقوى على شحنات متحركة ، مجال مغناطيسي لايمكن أن ينشأ من شحنات ساكنة ولايمكن أن يؤثر بأي قوة على شحنة ساكنة .

يعتبر هذا الفصل في البداية القوى وعزوم التدوير على الموصلات الحاملة للتيار التي يمكن أن تكون إما ذات طبيعة فتيلية أو لها مقطع عرضي محدود مع توزيع كثافة تيار معروف . المسائل المرتبطة بحركة الجسيمات في فراغ متجنبة عامة .

بفهم للتأثيرات الأساسية الناتجة عن المجال المغناطيسي ، يمكننا حينئذ أن نعتبر الأنواع المتنوعة للمواد المغناطيسية ، تحليل الدوائر المغناطيسية الأولية ، القوى على المواد المغناطيسية ، وأخيراً ، مفهوم الدوائر الكهربية الهام للمحاثة .

٩ ـ ١ القوة على شحنة متحركة :

في مجال كهربي يبين لنا تعريف شدة المجال الكهربي أن القوة على جسيم مشحون هي :

$$\boxed{\mathbf{F} = Q\mathbf{E}} \qquad (١)$$

القوة تكون في نفس الاتجاه كشدة المجال الكهربي (بالنسبة لشحنة موجبة) وتتناسب طردياً مع كلا E و Q . إذا كانت الشحنة في حركة ، فحينئذ تعطى القوة عند أي نقطة في مسارها بـ (١) .

وقد وجد تجريبياً أن جسيماً مشحوناً متحركاً فى مجال مغناطيسى ذو كثافة تدفق B يلاقى قوة يتناسب مقدارها مع حاصل ضرب مقادير الشحنة Q ، سرعتها v ، وكثافة التدفق B ، ومع جيب الزاوية بين المتجهين v و B . اتجاه القوة عمودى على كل من v و B ويعطى بوحدة متجه فى اتجاه $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. لذلك يمكن أن يعبر عن القوة بالصورة

$$\boxed{\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \quad (٢)$$

فرق أساسى فى تأثير المجالات الكهربية والمغناطيسية على الجسيمات المشحونة ظاهر الان ، لأن قوة تؤثر دائماً فى اتجاه على زوايا قائمة مع الاتجاه الذى يتقدم فيه الجسيم لايمكن أبداً أن تغير مقدار سرعة الجسيم . بتعبير آخر ، **متجه العجلة** يكون دائماً عمودى على متجه السرعة . على ذلك تبقى طاقة الحركة للجسيم غير متغيرة ، ولذلك يكون المجال المغناطيسى الثابت غير قادر على نقل طاقة للشحنة المتحركة . المجال الكهربى ، فى الناحية الأخرى ، يؤثر بقوة على الجسيم لاتعتمد على الاتجاه الذى يتقدم فيه الجسيم ولذلك يسبب عامة انتقال طاقة بين المجال والجسيم .

المسألتان الأوليتان فى نهاية هذا الفصل توضحان التأثيرات المختلفة لمجالات كهربية ومغناطيسية على طاقة حركة جسيم مشحون فى فضاء حر .

القوة على جسيم متحرك نتيجة مجالات كهربية ومغناطيسية مجمعة يحصل عليها بسهولة بالتراكب ،

$$\boxed{\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \quad (٣)$$

هذه المعادلة معروفةبمعادلة « لورنز » للقوة وحلها مطلوب فى تعيين مدارات الالكترون فى المغنطرون ، مسارات البروتون فى السيكلوترون ، خصائص البلازما فى مولد هيدروديناميكى مغناطيسى (MHD) ، أو ، عامة ، حركة جسيم مشحون فى مجالات كهربية ومغناطيسية مجمعة .

ت ٩ ـ ١ : شحنة نقطية ذات $-1.2C$ لها سرعة $5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z \text{m/s}$. أوجد مقدار القـوة المؤثـرة عليها فى المجـال : (أ) $\mathbf{E} = -18\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 10\mathbf{a}_z$ V/m ، (ب) $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \text{Wb/m}^2$ ، (جـ) كلا E و B .

الاجابة : 21.7N , 40.1N , 25.4N .

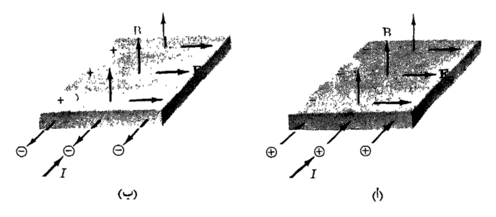
٩ ـ ٢ القوة على عنصر تيار تفاضلى :

القوة على جسيم مشحون يتحرك خلال مجال مغناطيسى ثابت يمكن أن تكتب على أنها القوة التفاضلية المؤثرة على عنصر تفاضلى للشحنة ،

(٤) $dF = dQ\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

فيزيائياً ، يتكون عنصر الشحنة التفاضلى من عدد كبير من شحنات منفصلة صغيرة جداً تحتل حجماً ، مع أنه صغير ، فهو أكبر بكثير من متوسط الفاصل بين الشحنات . القوة التفاضلية المعبر عنها بـ (٤) هى على ذلك مجرد المجموع للقوى على الشحنات المفردة . هذا المجموع ، أو القوة المحصلة ، ليست قوة مؤثرة على جسم مفرد . وبطريقة مناظرة ، يمكن أن نعتبر قوة الجاذبية التفاضلية التى يلاقيها حجم صغير مأخوذ فى وابل من رمال ساقطة . يحتوى الحجم الصغير على عدد كبير من حبيبات الرمل ، والقوة التفاضلية هى مجموع القوى على الحبيبات المفردة داخل الحجم الصغير .

على أنه إذا كانت شحناتنا الكترونات فى حركة فى موصل ، يمكن أن نبين أن القوة تنتقل للموصل ، وأن مجموع هذا العدد البالغ الكبر للقوى البالغة الصغر ذو أهمية عملية . خلال الموصل ، تكون الالكترونات فى حركة فى كل المواضع من منطقة أيونات موجبة لاتتحرك وهى تكون مجموعة مرتبة بللورية معطية الموصل صفاته الصلبة . مجال مغناطيسى الذى يؤثر بقوى على الالكترونات يتجه لتسبيب إزاحة موضعها طفيفاً وينتج إزاحة بسيطة بين مراكز ثقل الشحنات الموجبة والسالبة . على أن القوى الكولومية بين الالكترونات والأيونات الموجبة تميل الى أن تقاوم مثل هذه الازاحة .



شكل ٩ ـ ١   تيارات متساوية موجهة الى داخل المادة معطاة بشحنات موجبة تتحرك الى الداخل فى (أ) وشحنات سالبة تتحرك الى الخارج فى (أ) . الحالتان يمكن أن يميزا بفولتيات هول متضادة الاتجاه ، كما هو مبين .

لذلك أى محاولة لتحريك الالكترونات ، تنتج قوة تجاذب بين الالكترونات والأيونات الموجبة فى النظام الشبكى البللورى . وبذلك تنتقل القوة المغناطيسية للنظام الشبكى البللورى ، أو للموصل نفسه . والقوى الكولومية أكبر بكثير من القوى المغناطيسية فى

الموصلات الجيدة حتى أن إزاحة الالكترونات الفعلية لايمكن قياسها تقريبا . مع ذلك ، فاصل الشحنة الذى ينتج فعلا ، يفصح عنه وجود فرق جهد طفيف عبر عينة الموصل فى اتجاه عمودى على كل من المجال المغناطيسى وسرعة الشحنات . وتعرف الفولتية **بفولتية هول** ، والتأثير نفسه يسمى **تأثير هول** *Hall effect* .

شكل ٩ ـ ١ يوضح اتجاه فولتية هول لكلا شحنات موجبة وسالبة فى حركة . لاحظ أن تيارات متساوية معطاة بالفجوات والالكترونات يمكن أن تميز بفولتية هول لها . هذه طريقة لتعيين ما إذا كان شبه موصل معطى سالب النوع n — type أو موجب النوع p — type .

تستخدم أجهزة تأثير هول لتقيس كثافة التدفق المغناطيسى ، وفى بعض التطبيقات حيث يمكن جعل التيار خلال الجهاز يتناسب مع المجال المغناطيسى عبرة ، تستخدم كمقاييس قدرة الكترونية ، عناصر تربيع ، وهلم جرا .

بالرجوع لـ (٤) ، يمكننا لذلك القول بأنه اذا اعتبرنا عنصر شحنة متحركة فى حزمة الكترونية تكون القوة مجرد مجموع القوى على الالكترونات المفردة فى ذلك العنصر الحجمى الصغير ، ولكن اذا كنا نعتبر عنصر شحنة متحركة خلال موصل ، تكون القوة الكلية مؤثرة على الموصل الصلب نفسه . سنقصر الآن اهتمامنا على القوى على الموصلات الحاملة للتيار .

فى الفصل الخامس عرفنا كثافة تيار الحمل بدلالة سرعة كثافة الشحنة الحجمية ،

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}}\ .$$

يمكن أيضاً أن يعبر عن عنصر الشحنة التفاضلى فى (٤) بدلالة كثافة الشحنة الحجمية[1] ،

$$dQ = \rho\ dv$$

على ذلك

$$d\mathbf{F} = \rho\ dv\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

أو

$$\boxed{d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}\ dv} \qquad (٥)$$

رأينا فى الفصل السابق أن $\mathbf{J}dv$ يمكن أن تفسر كعنصر تيار تفاضلى ، أى أن ،

$$\mathbf{J}\ dv = \mathbf{K}\ dS = I\ d\mathbf{L}$$

(١) تذكر أن dv عنصر حجم تفاضلى وليس زيادة تفاضلية فى السرعة .

وعلى ذلك يمكن أن تطبق معادلة لورنز للقوة على كثافة تيار سطحى ،

(٦) $$dF = K \times B\, dS$$

أوعلى فتيلة تيار تفاضلية ،

(٧) $$dF = I\, dL \times B$$

بتكامل (٥) ، (٦) ، أو (٧) على حجم ، سطح يمكن أن يكون مفتوحا أو مغلقا (لماذا ؟) أو مسار مغلق ، على الترتيب ، يؤدى الى الصيغ التكاملية

(٨) $$F = \int_{vol} J \times B\, dv$$

(٩) $$F = \int_S K \times B\, dS$$

و

(١٠) $$F = \oint I\, dL \times B = -I \oint B \times dL$$

نتيجة بسيطة يحصل عليها بتطبيق (٧) أو (١٠) على موصل مستقيم فى مجال مغناطيسى منتظم ،

(١١) $$F = IL \times B$$

مقدار القوة معطى بالمعادلة المألوفة

(١٢) $$F = BIL \sin \theta$$

حيث θ هى الزاوية بين المتجهات الممثلة لاتجاه سريان التيار واتجاه كثافة التدفق المغناطيسى . المعادلة (١١) أو (١٢) تنطبق فقط على جزء من الدائرة المغلقة ، وباقى الدائرة يجب أن يعتبر فى أى مسألة عملية .

ت ٩ - ٢ : موصل فتيلى لانهائى على المحور z يحمل تيارا مقداره 2A فى اتجاه a_z . أوجد مقدار القوة على طول 1in من الموصل فى المجال :
(أ) $B = 0.1a_x - 0.2a_z$ Wb/m^2 (ب) $B = 0.3a_x - 0.4a_y$ Wb/m^2 ،
(جـ) $B = 0.2a_x$ Wb/m^2 و $E = 0.3a_y$ m V/m .

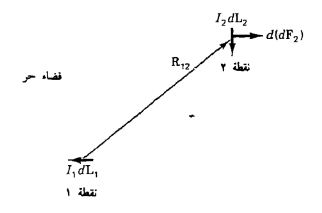
الاجابة : 5.08mV , 25.4mB , 10.16mN .

ت ٩ ـ ٣ : عينة من جرمانيوم سالب النوع مبينة فى شكل ٩ ـ ١ب . بفرض أن لها أبعاد مقطع عرضى 1.5cm × 1.2mm وطول مقداره 2.8cm ، دع حركية الالكترون تساوى $0.39 m^2/V.s$ المجال المغناطيسى $0.08 Wb/m^2$ ، والمجال الكهربى فى اتجاه سريان التيار $1,200$V/m . أوجد : (أ) سرعة الانسياق ، (ب) فولتية هول ، (جـ) الفولتية عبر طول العينة .

الاجابة : 468m/s , 0.562V , 33.6V — .

٩ ـ ٣ القوة بين عناصر تيار تفاضلية

لقد قدم مفهوم المجال المغناطيسى لكى نقسم مسألة إيجاد الفعل المتبادل لتوزيع تيار على توزيع تيار ثان إلى جزءين . من الممكن أن نعبر عن القوة على عنصر تيار واحد مباشرة بدلالة عنصر تيار ثان بدون إيجاد المجال المغناطيسى . ولأننا قد ادعينا أن مفهوم المجال المغناطيسى يسهل عملنا ، يتعين علينا حينئذ أن نبين أن تجنب هذه الخطوة المتوسطة يؤدى إلى تعبيرات أكثر تعقيداً .



شكل ٩ ـ ٢ · معطيا P_1 $(5,2,1)$, P_2 $(1,8,5)$, $I_1 dL_1 = -3a_y$ A.m , $I_2 dL_2 = -4a_z$ A.m ، تكون القوة على $I_2 dL_2$ هى 8.56nN فى اتجاه a_y .

المجال المغناطيسى عند النقطة 2 بسبب عنصر تيار عند النقطة 1 قد وجد أنه

$$dH_2 = \frac{I_1 \, dL_1 \times a_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

الآن ، القوة التفاضلية على عنصر تيار تفاضلى هى

$$dF = I\, dL \times B$$

ونطبق هذه على مسألتنا بأن ندع B تكون dB_2 (كثافة التدفق التفاضلية عند النقطة 2 المسببة بعنصر التيار 1) ، بجعل IdL على أنه I_2dL_2 ، وبالرمز الى القدر التفاضلى لقوتنا التفاضلية على العنصر 2 بالصورة $d(dF_2)$:

$$d(dF_2) = I_2\, dL_2 \times dB_2$$

لأن $dB_2 = \mu_0 dH_2$ نحصل على القوة بين عنصرى تيار تفاضليين ،

$$d(dF_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}{}^2} dL_2 \times (dL_1 \times a_{R12}) \quad (١٣)$$

لتوضيح استخدام (وسوء استخدام) هذه النتائج ، اعتبر عنصرى التيار التفاضليين المبينين فى شكل ٩ - ٢ . لدينا $I_1\, dL_1 = -3a_y$ A.m عند $P_1\ (5,2,1)$ و $I_2dL_2 = -4a_z$ A.m عند $P_2\ (1,8,5)$. وعلى ذلك $R_{12} = 4a_x + 6a_y + 4a_z$ ، ويمكن أن نعوض هذه النتائج فى (١٣) ،

$$d(dF_2) = \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi} \frac{(-4a_z) \times [(-3a_y) \times (-4a_x + 6a_y + 4a_z)]}{(16 + 36 + 16)^{1.5}}$$
$$= 8.56 a_y \text{ nN}$$

قبل عدة فصول عندما ناقشنا القوة المؤثرة بشحنة نقطية على شحنة نقطية أخرى وجدنا أن القوة على الشحنة الأولى كانت السالب لتلك على الثانية . أى أن ، القوة الكلية على النظام كانت صفراً . هذه ليست الحالة مع عناصر التيار التفاضلية ، و $d(dF_1) = -12.84 a_z$nN فى المثال آنفاً . وسبب ذلك التصرف المختلف يقع فى الطبيعة غير الفيزيائية لعنصر التيار . بينما يمكن أن تقرب الشحنات النقطية جيداً جداً بشحنات صغيرة ، تتطلب استمرارية التيار اعتبار دائرة كاملة . هذا سنفعله الآن .

القوة الكلية بين دائرتين فتيليتين يحصل عليها بالتكامل مرتين :

$$F_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[dL_2 \times \oint \frac{dL_1 \times a_{R12}}{R_{22}{}^2} \right] \quad (١٤)$$
$$= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{a_{R12} \times dL_1}{R_{12}{}^2} \right] \times dL_2$$

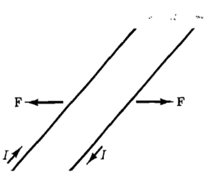
معادلة (١٤) صعبة جداً ، ولكن التعود المكتسب فى الفصل السابق على المجال

المغناطيسى يجب أن يمكننا من التعرف على التكامل الداخلى على أنه التكامل اللازم لإيجاد المجال المغناطيسى عند النقطة 2 بسبب عنصر التيار عند النقطة 1 .

مع أننا سنعطى النتيجة فقط ، إنه ليس صعباً جداً أن نستفيد من (١٤) لايجاد قوة التنافر بين موصلين فتيليين لهما طول لانهائى ، مستقيمين ، متوازيين مع فاصل d ، ويحملان تيارين I متساويين ، ولكنهما متضادان ، كما هو مبين فى شكل ٩ - ٣ . التكاملات بسيطة ، وأغلب الأخطاء ترتكب فى تعيين تعبيرات مناسبة لـ $\mathbf{a}_{R12}$ ، $d\mathbf{L}_1$ ، $d\mathbf{L}_2$ مع ذلك ، لأن شدة المجال المغناطيسى عند أى من السلكين بسبب الآخر معروف فى الحال أنها $I/2\pi d$ ، فإنه واضح تماماً أن الاجابة هى قوة مقدارها $\mu_0 I^2/2\pi d$ نيوتن لكل متر طول .

ت ٩ - ٤ : فتيلة تيار مارة بـ $P_1\ (0,0,0)$ تحمل تياراً مقداره 4A فى اتجاه $\mathbf{a}_x$ ، وفتيلة ثانية تمر بـ $P_2\ (2,5,1)$ ، تحمل أيضاً 4A ، ولكن فى اتجاه $\mathbf{a}_y$. (أ) أوجد متجه القوة المؤثرة على عنصر طول تزايدى ΔL_1 من الفتيلة الثانية ، واقعة عند P_2 ، بواسطة عنصر طول تزايدى ΔL_1 من الموصل الأول ، عند P_1 . (ب) أوجد القوة على ΔL_1 عند P_1 المسببة بـ ΔL_2 عند P_2 .

الاجابة : $48.7\ \Delta L_1\ \Delta L_2 \mathbf{a}_x$, $- 19.47\ \Delta L_1\ \Delta L_2 \mathbf{a}_y$ nN .



شكل ٩ - ٣ فتيلتان لانهائيتان متوازيتان مع فاصل d وتيارات متساوية ولكن متضادة I تلاقى قوة تنافر مقدارها $\mu_0 I^2/(2\pi d)$N/m .

٩ - ٤ القوة وعزم التدوير على دائرة مغلقة

قد حصلنا سابقا على تعبيرات عامة للقوى المؤثرة على نظم تيار . حالة خاصة يحسم فيها بسهولة ، لأنه إذا أخذنا علاقتنا للقوة على دائرة مغلقة فتيلية ، كما هو معطى بمعادلة (١٠) ، قسم ٩ - ٢ ،

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

ونفرض كثافة تدفق مغناطيسى منتظمة ، حينئذ يمكن أن تخرج B خارج التكامل :

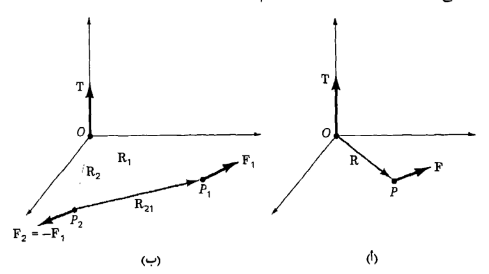
$$\mathbf{F} = -I\mathbf{B} \times \oint d\mathbf{L}$$

على أننا ، اكتشفنا خلال بحثنا للتكاملات الخطية المغلقة فى مجال جهد كهروستاتيكى أن $\oint d\mathbf{L} = 0$ ، ولذلك تكون القوة على دائرة فتيلية مغلقة فى مجال مغناطيسى منتظم صفرا .

اذا كان المجال غير منتظم ، فلايكون ضروريا أن تكون القوة الكلية صفرا .

النتيجة للمجالات المنتظمة لايلزم أن تقتصر على الدوائر الفتيلية فقط . يمكن أن تحتوى الدائرة على تيارات سطحية أو كثافة تيار حجمية كذلك . اذا قسم التيار الكلى الى فتائل ، تكون القوة على كل واحد صفرا ، كما بينا آنفا ، وتكون القوة الكلية صفرا مرة اخرى . لذلك فان أى دائرة مغلقة حقيقية تحمل تيارات مستمرة تلاقى متجه قوة كلية تساوى صفرا فى مجال مغناطيسى منتظم .

مع أن القوة تساوى صفرا ، عزم التدوير لايساوى صفرا عامة .



شكل ٩ ـ ٤ : (أ) معطيا ذراع رافعة R ممتدة من نقطة أصل O لنقطة P حيث تؤثر قوة F ، يكون عزم التدوير حول O هو $\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$. (ب) إذا كان $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ ، فان عزم التدوير $T = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1$ لايعتمد على اختيار نقطة الأصل لـ $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$.

فى تعريف عزم التدوير ، أو العزم ، لقوة ، من الضرورى أن نعتبر كلا من نقطة أصل عندها أو حولها يحسب عزم التدوير ، بالاضافة الى النقطة التى تؤثر عندها القوة . فى شكل ٩ ـ ٤أ ، نطبق قوة F عند نقطة P ، وننشىء نقطة أصل عند O مع ذراع رافعة R ممتدة من O الى P عزم التدوير حول نقطة O متجه مقداره هو حاصل ضرب مقادير R

و F ، وجيب الزاوية بين هذين المتجهين . اتجاه متجه عزم التدوير T عمودى على كل من القوة F وذراع الرافعة R ويكون فى اتجاه تقدم بريمة يمينية عندما يدار ذراع الرافعة نحو متجه القوة خلال الزاوية الصغرى . عزم التدوير يمكن أن يُعبر عنه كحاصل الضرب بعلامة x ،

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

الان دعنا نفرض أن قوتين ، F_1 عند P_1 و F_2 عند P_2 ، لهما ذراعا رافعة R_1 و R_2 ممتدتان من نقطة أصل مشتركة 0 كما هو مبين بشكل ٩ ـ ٤ب ، تؤثران على جسم ذى شكل ثابت ، وأن الجسم لايقوم بأى انتقال . حينئذ يكون عزم التدوير حول نقطة الأصل

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2$$

حيث $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$

ولذلك

$$\mathbf{T} = (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1$$

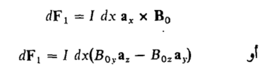
المتجه $R_{21} = R_1 - R_2$ يصل نقطة تأثير F_2 بتلك لـ F_1 ولايعتمد على اختيار نقطة اصل للمتجهين R_1 و R_2 . لذلك ، لايعتمد عزم التدوير ايضا على اختيار نقطة الأصل ، بشرط أن تكون القوة الكلية صفرا . وهذا يمكن أن يعمم لأى عدد من القوى .

اعتبر التأثير بقوة متجهة رأسيا الى أعلى عند نهاية ذراع تدوير أفقية فى سيارة قديمة . هذه لايمكن أن تكون القوة المؤثرة الوحيدة ، لأنه إذا كانت كذلك ، فيجب أن تعجل الذراع كلها فى اتجاه الى أعلى . قوة ثانية ، مساوية فى المقدار لتلك المؤثرة عند نهاية الذراع ، تؤثر فى اتجاه الى اسفل بواسطة سطح التحميل عند محور الدوران . بالنسبة لقوة 40N على ذراع تدوير طولها 0.3m ، يكون عزم التدوير 12N.m . هذا الرقم يحصل عليه سواء اعتبرت نقطة الأصل على محور الدوران (مؤدية الى 12N.m زائد 2N.m) ، عند منتصف الذراع (مؤدية الى 6N.m زائد 6N.m) ، أو عند نقطة ما ليست حتى على الذراع أو امتداد الذراع .

لذلك يمكننا أن نختار نقطة الأصل الأكثر ملاءمة ، وعادة تكون هذه على محور الدوران وفى المستوى المحتوى على القوى المؤثرة إذا كانت القوى المتعددة فى مستوى واحد .

وبهذه المقدمة لمفهوم عزم التدوير ، دعنا الان نعتبر عزم التدوير على عروة تيار تفاضلية فى مجال مغناطيسى B . تقع العروة فى المستوى xy (شكل ٩ ـ ٥) ؛ جوانب العروة توازى المحاور x و y وذات أطوال dx و dy . قيمة المجال المغناطيسى عند مركز العروة مأخوذ أنه B_0 . لأن العروة ذات قدر تفاضلى ، يمكن أخذ قيمة B عند كل نقط العروة على أنها B_0 . (لماذا لم يكن هذا ممكنا فى مناقشة الالتواء والانفراج ؟) . لذلك تكون القوة الكلية على العروة صفرا ، ولنا حرية اختيار نقطة الأصل لعزم التدوير عند مركز العروة .

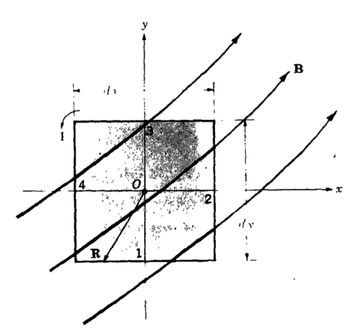
متجه القوة على الجانب 1 هو



$$d\mathbf{F}_1 = I\ dx\ \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0$$

أو

$$d\mathbf{F}_1 = I\ dx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y)$$



شكل ٩ ـ ٥ عروة تيار تفاضلية فى مجال مغناطيسى B عزم التدوير على العروة هو $d\mathbf{T} = I\ (dxdy\mathbf{a}_z) \times \mathbf{B}_0 = Id\mathbf{S} \times \mathbf{B}$.

لهذا الجانب من العروة تمتد ذراع الرافعة R من نقطة الأصل الى منتصف الجانب $\mathbf{R}_1 = 1/2dy\mathbf{a}_y$ ، وتكون المساهمة لعزم التدوير الكلى هى

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 \\ &= -\tfrac{1}{2}dy\ \mathbf{a}_y \times I\ dx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y) \\ &= -\tfrac{1}{2}dx\ dy\ IB_{0y}\mathbf{a}_x \end{aligned}$$

مساهمة عزم التدوير على الجانب 3 يتبين أنها هى نفسها ،

$$dT_3 = R_3 \times dF_3 = \tfrac{1}{2}dy\, a_y \times (-I\, dx\, a_x \times B_0)$$
$$= -\tfrac{1}{2}dx\, dy\, IB_{0y} a_x = dT_1$$

و
$$dT_1 + dT_3 = -dx\, dy\, IB_{0y} a_x$$

بتقدير عزم التدوير على الجانبين 2 و 4 ، نجد

$$dT_2 + dT_4 = dx\, dy\, IB_{0x} a_y$$

وحينئذ يكون عزم التدوير الكلى

$$dT = I\, dx\, dy(B_{0x} a_y - B_{0y} a_x)$$

الكمية بين القوسين يمكن أن تمثل بحاصل ضرب بعلامة x ،

$$dT = I\, dx\, dy(a_z \times B_0)$$

أو

$$\boxed{dT = I\, dS \times B} \qquad (١٥)$$

حيث dS هى المساحة المتجهة لعروة التيار التفاضلية والرمز السفلى لـ B_0 قد أسقط .

نُعرف الآن حاصل ضرب تيار العروة مع المساحة المتجهه للعروة بعزم ثنائى القطب المغناطيسى التفاضلى dm ، بوحدات $A.m^2$. على ذلك

$$\boxed{dm = I\, dS} \qquad (١٦)$$

و

$$\boxed{dT = dm \times B} \qquad (١٧)$$

إذا مددنا النتائج التى حصلنا عليها فى قسم ٤ - ٧ لثنائى القطب الكهربى التفاضلى بتعيين عزم التدوير المؤثر عليه بمجال كهربى ، نرى نتيجة مشابهة ،

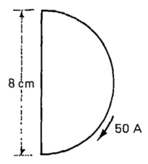
$$dT = dp \times E$$

معادلات (١٥) و (١٧) نتائج عامة تنطبق على عروات تفاضلية ذات أى شكل ، ليست مجرد المستطيلة منها . عزم التدوير على عروة دائرية أو مثلثية يعطى أيضا بدلالة السطح المتجه أو العزم بـ (١٥) أو (١٧) .

لأننا اخترنا عروة تيار تفاضلية حتى أمكننا فرض ثبات B فى كل موضع فيها ، وأنه يتبع أن عزم التدوير على عروة مستوى بأى قدر أو شكل فى مجال مغناطيسى منتظم يعطى بنفس التعبير ،

$$\boxed{T = IS \times B = m \times B} \qquad (١٨)$$

يجب أن نلاحظ أن عزم التدوير على عروة التيار يتجه دائما أن يدير العروة لكى يتحاذى المجال المغناطيسى الناتج من العروة مع المجال المغناطيسى المؤثر المسبب لعزم التدوير . ربما تكون هذه أبسط طريقة لتحديد اتجاه عزم التدوير .



شكل ٩ ـ ٦ انظر مسألة ت ٩ ـ ٥

ت ٩ ـ ٥ : عروة التيار نصف الدائرة المبينة فى شكل ٩ ـ ٦ تقع فى المستوى $z = 0$. فى المجال المغناطيسى المنتظم $B = 0.8a_x - 0.7a_y + a_z Wb/m^2$ أوجد : (أ) القوة على الجانب المستقيم (ب) عزم التدوير على العروة حول ذراع رافعة لها نقطة أصل عند مركز الجانب المستقيم .

الاجابة : $4a_x - 3.2a_z N$, $-0.0880a_x - 0.10051a_y N.m$

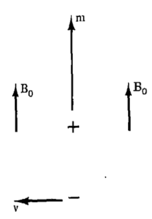
٩ ـ ٥ : طبيعة المواد المغناطيسية

نحن الآن فى وضع يسمح بتجميع معرفتنا عن فعل مجال مغناطيسى على عروة تيار مع نموذج بسيط لذرة ، ونحصل على بعض الادراك للاختلاف فى التصرف لأنواع المواد المختلفة مغناطيسية .

مع أن نتائج كمية دقيقة يمكن أن يتنبأ بها فقط من خلال استخدام نظرية الكم ، فالنموذج الذرى البسيط الذى يفرض أن هناك نواة مركزية موجبة محاطة بالكترونات فى مدارات دائرية مختلفة يعطى نتائج كمية معقولة ويعطى نظرية كيفية مرضية . الكترون فى مدار يناظر عروة تيار صغيرة (التى فيها التيار موجه مضادا لاتجاه انتقال الالكترون) وبهذه الصورة يلاقى عزم تدوير فى مجال مغناطيسى خارجى ، عزم التدوير متجه الى

جعل المجال المغناطيسى الناتج من الالكترون المدارى يتحاذى مع المجال المغناطيسى الخارجى . إذا لم يكن هناك أى عزوم مغناطيسية أخرى لتعتبر ، لاستنتجنا حينئذ أن كل الالكترونات المدارية فى المادة ستغير اتجاهها بحيث تجمع مجالاتها المغناطيسية مع المجال المؤثر ، وعلى ذلك فان المجال المغناطيسى المحصل عند أى نقطة فى المادة سيكون أكبر مما يكون عليه عند تلك النقطة اذا لم تكن المادة موجودة .

مع ذلك ، عزم ثان يعزى للدوران المغزلى للالكترون . مع أنه من المُغزى أن يعمل نموذج لهذه الظاهرة باعتبار الالكترون كأنه يدور مغزليا حول محوره وبذلك يولد عزم ثنائى قطب مغناطيسى ، فانه لايحصل على نتائج كمية مرضية من مثل هذه النظرية . بدلا من ذلك ، من الضرورى استيعاب رياضيات نظرية الكم النسبية لتبين أن الكترونا يمكن أن يكون له عزم مغناطيسى مغزلى حوالى $\pm 9 \times 10^{-24}$ ، والاشارات الزائد والناقص تبين أن المحاذاة يمكن أن تكون مساعدة أو مضادة لمجال مغناطيسى خارجى .



شكل ٩ - ٧ الكترون فى مدار مبين له عزم مغناطيسى m فى نفس اتجاه مجال مؤثر B_0 .

فى ذرة موجود بها عديد من الالكترونات ، نجد أنه فقط الدورانات المغزلية لتلك الالكترونات فى الطبقات غير المملوءة تماما ستساهم فى عزم مغناطيسى للذرة .

مساهمة ثالثة لعزم ذرة ينشأ بدوران مغزلى نووى ، ولكن هذا العامل يعطى تأثيرا مهملا على الخواص المغناطيسية الكلية للمادة وسوف لانعتبره أكثر من هذا .

على ذلك تحتوى كل ذرة على عدة مركبات عزوم مختلفة ، ومجموعها يحدد الخصائص المغناطيسية للمادة ويعطى تصنيفها المغناطيسى العام . سنشرح باختصار ستة أنواع مختلفة من المادة : دايا مغناطيسية ، بارامغناطيسية ، فرومغناطيسية (عالية

الانفاذية المغناطيسية) ، ضديد الفرومغناطيسية ، فرى مغناطيسية ، وفائقة البارامغناطيسية .

دعنا أولا نعتبر تلك الذرات التى فيها المجالات المغناطيسية الصغيرة الناتجة من حركة الالكترونات فى مداراتها ، وتلك الناتجة من الدوران المغزلى للالكترون تتجمع لتعطى مجالا صافيا يساوى صفرا . لاحظ أننا نعتبر هنا المجالات الناتجة من حركة الالكترون نفسه فى غياب أى مجال مغناطيسى خارجى ، ويمكننا أيضا أن نصف هذه المادة كواحدة فيها العزم المغناطيسى الدائم m_0 لكل ذرة يساوى صفرا . مثل هذه المادة تُدعى دايامغناطيسية . لذلك يبدو ، أن مجالا مغناطيسيا خارجيا سوف لايحدث أى عزم تدوير على الذرة ، فلا إعادة اصطفاف لمجالات ثنائى القطب ، وبالتبعية مجالا مغناطيسيا داخليا يكون هو نفس المجال المؤثر . وهذا صحيح بخطأ يؤدى فقط الى حوالى جزء من مائة الف .

دعنا نختار الكترونا فى مدار عزمه m فى نفس اتجاه المجال المؤثر B_0 (شكل ٩ ـ ٧) . المجال المغناطيسى ينتج قوة الى الخارج على الالكترون المدارى . وحيث أن نصف القطر المدارى مكمى ولايستطيع التغير ، فان القوة كولومية للجذب الى الداخل لاتتغير أيضا .

وعدم التوازن للقوة الناتج من القوة المغناطيسية الى الخارج يجب لذلك تعويضه بنقص السرعة المدارية . ومن ثم ، يتناقص العزم المدارى ، وينتج مجالا داخليا أقل .

إذا كنا قد اخترنا ذرة لها m و B_0 متضادان ، لكانت القوة المغناطيسية الى الداخل ، ولزادت السرعة ، ولزاد العزم المدارى ، ولحدثت ملاشاة أكبر لـ B_0 . مرة أخرى سوف ينتج مجال داخلى أقل .

يبين البزموث المعدنى تأثيرا دايامغناطيسيا أعلى من أغلب المواد الدايامغناطيسية الأخرى ، من بينها الهيدروجين ، الهليوم ، الغازات « الخاملة » الأخرى ، كلوريد الصوديوم ، النحاس ، الذهب ، السيليكون ، الجرمانيوم ، الجرافيت ، والكبريت . يجب أيضا أن ندرك ان التأثير الدايامغناطيسى موجود فى كل المواد ، لأنه ينتج من تبادل فعل المجال المغناطيسى الخارجى مع كل الكترون مدارى ، مع ذلك ، فهو يُحجب بتأثيرات أخرى فى المواد التى سوف نعتبرها فيما بعد .

الآن دعنا نناقش ذرة فيها تأثير الدوران المغزلى للالكترون ، والحركة المدارية لايتلاشيان تماما . الذرة ككل لها عزم مغناطيسى صغير ، ولكن التوجيه العشوائى للذرات فى عينة أكبر يعطى عزما مغناطيسيا متوسطا يساوى صفرا . المادة لاتظهر تأثيرات مغناطيسية فى غياب مجال خارجى . عندما يؤثر مجال خارجى ، مع ذلك ، هناك عزم

تدوير صغير على كل عزم ذرى ، وهذه العزوم تتجه لأن تصبح محاذية للمجال الخارجى . هذا التحاذى يعمل على أن تزيد قيمة B خلال المادة عن القيمة الخارجة . لكن ، التأثير الدايامغناطيسى مازال يعمل على الالكترونات المدارية وقد يضاد الزيادة الآنفة . إذا كانت النتيجة الصافية هى نقص فى B ، فلاتزال المادة تسمى دايامغناطيسية . لكن ، إذا كان هناك زيادة فى B ، تدعى المادة بارامغناطيسية . البوتاسيوم ، الأكسجين ، التنجستن ، العناصر الأرضية النادرة وكثير من أملاحها ، مثل كلوريد الايربيوم ، أكسيد النيوديميرم ، وأكسيد اليوتربوم ، أحد المواد المستخدمة فى الميزرات ، هى أمثلة من المواد البارمغناطيسية .

الأنواع الأربعة المتبقية للمواد ، الفرومغناطيسية ، وضديد الفرومغناطيسية ، الفرى مغناطيسية ، وفائقة البارامغناطيسية ، كلها لها عزوم ذرية قوية . علاوة على ذلك ، الفعل المتبادل للذرات المتجاورة يسبب تحاذى للعزوم المغناطيسية للذرات إما بطريقة مساعدة أو مضادة تماما .

فى المواد **الفرومغناطيسية** كل ذرة لها عزم ثنائى قطب عال نسبيا ، مسبب أساسا بعزوم دوران مغزلى للالكترون غير معادلة . والقوى الذرية المتبادلة تسبب اصطفاف هذه العزوم بطريقة متوازية فى مناطق تحتوى على عدد كبير من الذرات . هذه المناطق تسمى **مقاطعات** ، ويمكن أن يكون لها أشكال ومقاسات متباينة تتراوح من ميكرومتر الى عدة سنتيمترات ، معتمدة على المقاس ، الشكل ، المادة ، والتاريخ المغناطيسى للعينة . المواد البكر الفرومغناطيسية سيكون لها مقاطعات كل منها له عزم مغناطيسى قوى ، عزوم المقاطعة ، مع ذلك ، تتغير فى الاتجاه من مقاطعة الى مقاطعة . لذلك يكون التأثير الكلى هو التلاشى ، والمادة ككل ليس لها عزم مغناطيسى . عند تطبيق مجال مغناطيسى خارجى ، مع ذلك ، تلك المقاطعات التى لها عزوم فى اتجاه المجال المؤثر يزيد حجمها على حساب جيرانها ، ويزيد المجال المغناطيسى الداخلى كثيرا عن ذاك للمجال الخارجى بمفرده . عند ازالة المجال الخارجى ، لايتحقق عادة صف عشوائى تماما للمقاطعات ، ويتبقى مجال ثنائى قطب فى التكوين الماكروسكوبى . الحقيقة أن العزم المغناطيسى للمادة مختلف بعد إزالة المجال ، أو أن الحالة المغناطيسية للمادة دالة فى تاريخها المغناطيسى ، تسمى **تخلفية** ، وهو موضوع سيناقش مرة أخرى عندما تدرس الدوائر المغناطيسية بعد صفحات قليلة من الآن .

المواد الفرومغناطيسية ليست موحدة الخواص فى بللورات مفردة ، ولذلك سنقصر مناقشتنا على المواد متعددة البللورات ، فيما عدا ذكر أن إحدى خصائص المواد المغناطيسية غير موحدة الخواص هو التخصر بالمغناطيسية ، أو التغير فى أبعاد البللورة عندما يسلط مجال مغناطيسى عليها .

العناصر الوحيدة التى تكون فرومغناطيسية عند درجة حرارة الغرفة هى الحديد ، النيكل ، والكوبالت ، وتفقد كل خصائصها الفرومغناطيسية فوق درجة حرارة تسمى درجة حرارة كورى ، التى هى *1,043*K للحديد . بعض سبائك هذه المعادن مع بعضها ومع معادن أخرى تكون أيضا فرومغناطيسية ، على سبيل المثال الالنيكو (alnico) ، سبيكة ألومنيوم ـ نيكل ـ كوبالت مع قدر قليل من النحاس . عند درجات حرارة أقل تكون بعض العناصر الأرضية النادرة ، مثل جادولينيوم (gadolinium) وديسبروزيوم (dusprosium) ، فرومغناطيسية . وهام أيضا أن بعض سبائك المعادن غير الفرومغناطيسية تكون فرومغناطيسية ، مثل بزموث ـ منجنيز ونحاس ـ منجنيز ـ قصدير .

فى **المواد ضديد الفرومغناطيسية** ، تسبب القوى بين الذرات المتجاورة أن تصطف العزوم الذرية بشكل عكسى التوازى . ويكون العزم المغناطيسى الصافى صفرا ، وتتأثر المواد ضديد الفورمغناطيسية طفيفا فقط بوجود مجال مغناطيسى خارجى . هذا التأثير اكتشف أولا فى أكسيد المنجنيز ، ولكن عدة مئات من المواد ضديد الفرومغناطيسية قد عينت منذ ذلك الوقت . وتتضمن أكاسيد عدة ، كبريتيدات ، وكلوريدات ، مثل أكسيد النيكل(NiO) ، كبريتيد الحديد (FeS) وكلوريد الكوبلت (CoCls) . توجد ضديد الفرومغناطيسية فقط عند درجات الحرارة المنخفضة نسبيا ، غالبا أقل من درجة حرارة الغرفة بكثير . التأثير ليس ذو أهمية هندسية حاليا .

المواد الفرى مغناطيسية تظهر أيضا اصطفافا عكسى التوازى للعزوم الذرية المتجاورة ، ولكن العزوم ليست متساوية . ولذلك تحدث استجابة عالية لمجال مغناطيسى خارجى ، مع أنه ليس عاليا مثل ذاك فى المواد الغرومغناطيسية . وأكثر مجموعة من المواد الفرومغناطيسية أهمية هى **الفريتات** ، التى تكون فيها الموصلية منخفضة ، بعدد من رتبة العظم أقل من تلك لأشباه الموصلات . وحقيقة أن هذه المواد ذات مقاومة أعلى من المواد الفرومغناطيسية تنتج تيارات منتجة بالحث أصغر بكثير فى المادة عندما تؤثر مجالات مترددة ، على سبيل المثال فى قلوب المحولات التى تعمل عند الترددات الأعلى . التيارات المخفضة (تيارات دوامية) تؤدى الى فقد أومى (ohmic) أقل فى قلب المحول . أكسيد المغنيتيتى ($Fe_3 0_4$ ، نيكل ـ زنك فيريت ($N_i1/2\ Z_n1/2\ F_{e2}\ 0_4$) ، ونيكل فيريت ($N_iF_{e2}\ 0_4$ هى أمثلة لذلك النمط من المواد . تختفى أيضا الفرى مغناطيسية فوق درجة حرارة كورى .

المواد فائقة البارمغناطيسية تتكون من تجميع لجسيمات فرومغناطيسية فى مصفوفة غير فرومغناطيسية . مع أن هناك مقاطعات موجودة داخل الجسيمات المفردة ، لاتستطيع حوائط المقاطعة أن تخترق مصفوفة المادة المتخللة الى الجسيم المجاور . ومثال هام هو الشريط المغناطيسى المستخدم فى المسجلات الشريطية الصوتية والتليفزيونية .

٩ ـ ٦ : التمغنط والانفاذية :

لكى نضع وصفنا للمواد المغناطيسية على أساس كمى أكثر ، سنخصص الآن صفحة أو ما يقرب من ذلك لبيان كيف تتصرف ثنائيات القطب المغناطيسية كمصدر موزع للمجال المغناطيسى . ستكون نتيجتنا معادلة تشبه كثيرا قانون أمبير الدائرى ، $\oint \mathbf{H}.d\mathbf{L}=I$ لكن التيار سيكون حركة الشحنات المقيدة (الالكترونات المدارية ، الدوران المغزلى للالكترون . والدوران المغزلى للنواة) ، والمجال ، الذى له أبعاد H سيسمى التمغنط M . التيار الناتج من الشحنات المقيدة يسمى تيار مقيد ، أو تيار أمبيرى .

دعنا نبدأ بتعريف التمغنط M بدلالة عزم ثنائى القطب المغناطيسى m . يدور التيار المقيد I_b حول مسار يحصر مساحة تفاضلية $d\mathbf{S}$ منشئا عزما ثنائيا قطبيا ،

$$\mathbf{m} = I_b\, d\mathbf{S}$$

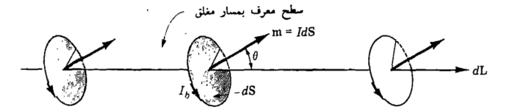
إذا كان هناك n من ثنائيات قطب مغناطيسية لكل وحدة حجوم ونعتبر حجما Δv ، فان العزم الكلى لثنائيات القطب المغناطيسى توجد بالمجموع المتجه ،

$$\mathbf{m}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \qquad (١٩)$$

كلا من الـ $\mathbf{m}_i$ يمكن أن يكون مختلفا . بعد ذلك ، نعرف التمغنط M على أنه عزم ثنائى القطب المغناطيسى لكل وحدة حجوم .

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i$$

ونرى أن وحداتها يجب أن تكون مثل تلك لـ H ، أمبير لكل متر .



شكل ٩ ـ ٨ جزء $d\mathbf{L}$من مسار مغلق الذى على طوله قد تحاذت جزئيا قطب مغناطيسية بواسطة مجال مغناطيسى خارجى . قد سبب التحاذى زيادة التيار المقيد العابر للسطح المعرف بالمسار المغلق بمقدار $nI_b d\mathbf{S}.d\mathbf{L}$ أمبير .

الآن دعنا نعتبر تأثير بعض التحاذى لثنائيات القطب المغناطيسية كنتيجة لتأثير مجال مغناطيسى . سنفحص هذا التحاذى على طول مسار مغلق ، جزء قصير منه مبين فى

شكل ٩ ـ ٨ . يبين الشكل عدة عزوم مغناطيسية m والتى تعمل زاوية θ مع عنصر المسار $d\mathbf{L}$ ، كل عزم يتكون من تيار مقيد I_b يدور حول مساحة $d\mathbf{S}$. نعتبر لذلك حجما صغيرا ، $dS\cos\theta\, dL$ ، أو $d\mathbf{S}.d\mathbf{L}$ ، يوجد خلاله $nd\mathbf{S}.d\mathbf{L}$ ثنائيات قطب مغناطيسية . أثناء التغيير من توجيه عشوائى الى هذا التحاذى الجزئى ، قد زاد التيار المقيد العابر للسطح المحصور بالمسار (على يسارنا عندما نسير فى اتجاه $\mathbf{a}_L$ فى شكل ٩ ـ ٨) بمقدار I_b لكل من الـ $nd\mathbf{S}.d\mathbf{L}$ ثنائيات القطب . على ذلك

$$dI_b = nI_b\, d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \qquad (٢٠)$$

وخلال محيط كامل مغلق ،

$$I_b = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \qquad (٢١)$$

إن مجرد ماتقوله معادلة (٢١) أنه إذا ذهبنا حول مسار مغلق ووجدنا عزوم ثنائيات قطب تذهب مع طريقنا أكثر غالبية من العكس ، فسيكون هناك تيار مناظر يتكون من ، على سبيل المثال ، الكترونات مدارية عابرة للسطح الداخلى .

هذا التعبير الأخير يحمل بعض الشبه مع قانون أمبير الدائرى ، ويمكننا الآن تعميم العلاقة بين B و H بحيث تنطبق على أوساط غير الفضاء الحر . مناقشتنا الحالية للتيار مؤسسة على القوى وعزوم التدوير على دوائر تيار تفاضلية فى مجال B ، ولذلك نأخذ B على أنها كميتنا الأساسية ونبحث عن تعريف محسن لـ H .

وعلى ذلك نكتب قانون أمبير الدائرى بدلالة التيار الكلى ، مقيد زائد حر ،

$$\oint \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{L} = I_T \qquad (٢٢)$$

حيث $\quad I_T = I_b + I$

و I هو التيار الحر الكلى المحصور بالمسار المغلق . لاحظ أن التيار الحر يظهر بدون رمز سفلى لأنه نوع التيار ذو الأهمية العظمى وسيكون التيار الوحيد الظاهر فى معادلات ماكسويل .

بضم هذه المعادلات الثلاث الأخيرة ، نحصل على تعبير للتيار الحر المحصور ،

$$I = I_T - I_b = \oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) \cdot d\mathbf{L} \qquad (٢٣)$$

يمكننا الآن تعريف H بدلالة B و M ،

$$(٢٤)\quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

ونرى أن $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ فى الفضاء الحر حيث يساوى التمغنط صفرا . هذه العلاقة تكتب عادة فى صورة تتجنب الكسور والاشارات السالبة :

$$(٢٥)\quad \boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})}$$

يمكننا الآن استخدام مجالنا H الجديد التعريف فى (٢٣) ،

$$(٢٦)\quad I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

حاصلين على قانون أمبير الدائرى بدلالة التيارات الحرة .

باستخدام كثافات التيار العديدة ، نحصل على

$$I_b = \oint_S \mathbf{J}_b \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_T = \oint_S \mathbf{J}_T \cdot d\mathbf{S}$$

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

بمساعدة نظرية ستوكس ، يمكننا بذلك تحويل (٢١) ، (٢٦) ، و (٢٢) الى علاقات الالتواء المكافئة :

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_b$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_T$$

$$(٢٧)\quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

سنؤكد فقط على (٢٦) و (٢٧) ، التعبيرين المشتملين على الشحنة الحرة ، فى العمل الذى يلى .

العلاقة بين H , B و M المعبر عنها بـ (٢٥) يمكن أن تُبسط للأوساط موحدة الخواص الخطية حيث يمكن تعريف قابلية التأثر المغناطيسية χ_m

$$(٢٨)\quad \boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}}$$

على ذلك يكون لدينا

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H})$$
$$= \mu_0 \mu_R \mathbf{H}$$

أو

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}} \quad (٢٩)$$

حيث الانفاذية μ ،

$$\boxed{\mu = \mu_0 \mu_R} \quad (٣٠)$$

معرفة بدلالة انفاذية نسبية μ_R ،

$$\boxed{\mu_R = 1 + \chi_m} \quad (٣١)$$

مرتبطة بقابلية التأثر .

كمثال على استخدام هذه الكميات المغناطيسية العديدة ، دعنا نختار مادة فريت لها $\mu_R = 50$ ونعمل بكثافات تدفق كافية الانخفاض بحيث يكون معقولا استخدام علاقة خطية .

لدينا

$$\chi_m = \mu_R - 1 = 49$$

وإذا أخذنا $B = 0.05\text{Wb/m}^2$ ، فان

$$B = \mu_R \mu_0 H$$

و

$$H = \frac{0.05}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 796 \text{ A/m}$$

التمغنط هو $\chi_m H$ ، أو $39{,}000\text{A/m}$. الطرق المختلفة لربط B و H هى ، أولا ،

$$B = \mu_0(H + M)$$

أو

$$0.05 = 4\pi \times 10^{-7}(796 + 39{,}000)$$

ونرى أن التيارات الامبيرية تنتج 49 مرة كثافة المجال المغناطيسى بالنسبة لما تنتجه الشحنات الحرة ، وثانيا ،

$$B = \mu_R \mu_0 H$$

أو

$$0.05 = 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 796$$

حيث نستخدم إنفاذية نسبية قيمتها 50 وندع هذه الكمية تأخذ فى الحساب تماما حركة الشحنات المقيدة . سنؤكد على التفسير الأخير فى الفصول التالية .

القانونان الأولان اللذان فحصناهما للمجالات المغناطيسية كانا قانون بيو ـ سافار وقانون أمبير الدائرى . كلاهما كانا مقصورين على الفضاء الحر فى تطبيقهما . ويمكننا الآن مد إستخدامهما لأى مادة مغناطيسية متجانسة ، خطية موحدة الخواص التى يمكن أن توصف بدلالة إنفاذية نسبية μ_R .

بالضبط مثلما وجدنا للمواد العازلة غير موحدة الخواص ، يجب أن توصف مادة مغناطيسية غير موحدة الخواص بدلالة إنفاذية ممتدة :

$$B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z$$

$$B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z$$

$$B_z = \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z$$

بالنسبة للمواد غير موحدة الخواص ، تكون μ كمية ممتدة فى العلاقة $B = \mu H$ ومع ذلك تبقى $B = \mu_0(H + M)$ صحيحة ، مع أن B , H و M لم تعد عامة متوازية . المادة المغناطيسية غير الموحدة الخواص الأكثر شيوعا هى بللورة مفردة فرومغناطيسية ، مع أن الأغشية الرقيقة المغناطيسية تبدى أيضا عدم وحدة فى الخواص . معظم تطبيقات المواد الفرومغناطيسية ، مع ذلك ، تشتمل على تنظيم متعدد البللورات والذى يصنع بأكثر سهولة بدرجة كبيرة .

تعاريفنا لقابلية التأثر والانفاذية تعتمد أيضا على افتراض الخطية . لسوءالحظ ، هذا صحيح فقط فى المواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية الأقل أهمية التى نادراً ما تختلف الإنفاذية النسبية لها عن الوحدة بأكثر من جزء فى الألف . بعض القيم

النموذجية لقابلية التأثر لمواد دايامغناطيسية هى الهيدروجين ، 10^{-5} × 2 — ، النحاس ، 10^{-5} × 0.9 — ، الجرمانيوم ، 10^{-5} × 0.8 — ، السيليكون ، -0.3×10^{-5} ، والجرافيت ، 10^{-5} × 12 — . عدة قابليات تأثر بارامغناطيسية ممثلة هى الأكسجين ، 10^{-6} × 2 ، تنجستن ، 10^{-5} × 6.8 ، أكسيد الحديديك : Fe_2O_3 1.4×10^{-3} ، وأكسيد اليتريوم Y_2O_3 0.35×10^{-6} إذا أخذنا ببساطة نسبة B الى $\mu_0 H$ على أنها الانفاذية النسبية لمادة فرومغناطيسية ، فقيم نموذجية لـ μ_R ستمتد من 10 الى 100,000 . المواد الدايامغناطيسية ، البارامغناطيسية ، وضديد الفرومغناطيسية يقال عامة أنها غير مغناطيسية .

ت ٩ ـ ٦ : أوجد مقدار شدة المجال المغناطيسى داخل مادة فيها : (أ) كثافة التدفق المغناطيسى 4nWb/m^2 والانفاذية النسبية 1.008 ، (ب) قابلية التأثر المغناطيسية — 0.006 والتمغنط 19 A/m ، (جـ) هناك $8.1 \times 10^{28}\text{atoms/m}^3$ ، كل ذرة لها عزم ثنائى قطب 4×10^{-30} و $\chi_m = 10^{-4}$.

الاجابة : $3,160\text{A/m}^2$, $3,170\text{A/m}^2$, $3,240\ \text{A/m}^2$

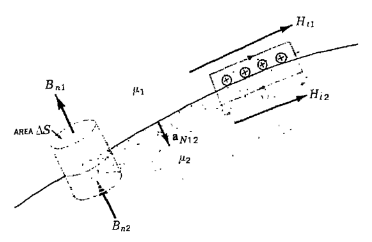
ت ٩ ـ ٧ : فى مادة مغناطيسية معينة ، $H = 5\rho^2 a_\phi A/m$ و $\mu = 4 \times 10^{-6}\text{H/m}$. عند $\rho = 2$ ، أوجد : (أ) J_b ، (ب) J_T ، (جـ) J .

الاجابة : $174.6a_z\ \text{A/m}^2$, $255a_z\ \text{A/m}^2$, $80a_z\ \text{A/m}^2$.

٩ ـ ٧ : شروط الحدود المغناطيسية

يجب ألا يكون لدينا أى صعوبة فى الوصول الى شروط الحدود السليمة لتطبق على H , B و M عند السطح البينى بين مادتين مغناطيسيتين مختلفتين ، لأننا قد قمنا بحل مسائل مماثلة لكلا المواد الموصلة والعوازل . فلانحتاج إلى طريقة تقنية جديدة .

يبين شكل ٩ ـ ٩ حدا بين مادتين خطيتين موحدتى الخواص متجانستين مع إنفاذية μ_1 و μ_2 .



شكل ٩ ـ ٩ ؛ سطح جاوسى ومسار مغلق منشآن عن الحدين الوسطين 1 و 2 ، لهما الانفاذية μ_1 و μ_2 ، بالترتيب . من هذا نعين شروط الحدود $B_{n1} = B_{n2}$ و $H_{t1} - H_{t2} = K$.

شرط الحدود على المركبات العمودية يعين بالسماح للسطح أن يقطع سطح جاوسى اسطوانى صغير . بتطبيق قانون جاوس للمجال المغناطيسى من قسم ٨ ـ ٥ ،

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

نجد أن

$$B_{n1}\ \Delta S - B_{n2}\ \Delta S = 0$$

أو

$$\boxed{B_{n2} = B_{n1}} \qquad (٣٢)$$

على ذلك

$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1} \qquad (٣٣)$$

المركبة العمودية لـ B مستمرة ، ولكن المركبة العمودية لـ H غير مستمرة بمقدار النسبة μ_1/μ_2 .

العلاقة بين المركبات العمودية لـ M ، بالطبع ، محددة مادامت العلاقة بين المركبات العمودية لـ H معروفة . للمواد المغناطيسية الخطية ، تكتب النتيجة ببساطة بالصورة

$$M_{n2} = \frac{\chi_{m2}\,\mu_1}{\chi_{m1}\mu_2} M_{n1} \qquad (٣٤)$$

بعد ذلك ، نطبق قانون أمبير الدائرى

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

حول مسار مغلق صغير فى مستوى عمودى على سطح الحدود ، كما هو مبين على اليمين فى شكل ٩ ـ ٩ . نجد أن

$$H_{t1}\ \Delta L - H_{t2}\ \Delta L = K\ \Delta L$$

حيث نفرض أن الحد يمكن أن يحمل تيارا سطحيا K الذى مُركبته عموديا على مستوى المسار المغلق هى K . على ذلك

$$H_{t1} - H_{t2} = K \qquad (٣٥)$$

تحدد الاتجاهات بأكثر انضباط باستخدام الضرب بعلامة × لتمييز المركبات المماسة ،

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{N12} = \mathbf{K}$$

حيث $\mathbf{a}_{N12}$ هى وحدة العمودى على الحد موجها من المنطقة 1 الى المنطقة 2 بالنسبة لـ B المماسة ، لدينا

$$\frac{B_{t1}}{\mu_1} - \frac{B_{t2}}{\mu_2} = K \qquad (٣٦)$$

شرط الحدود على المركبة المماسة للتمغنط بالنسبة لمواد خطية هى لذلك

$$M_{t2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{t1} - \chi_{m2} K \qquad (٣٧)$$

شرط الحدود الثلاثة الأخيرة على المركبات المماسة تكون طبعا أكثر بساطة بقدر كبير ، إذا كانت كثافة التيار السطحية صفرا . هذه كثافة تيار حر ، ويجب أن تكون صفرا إذا لم يكن أى من المادتين موصلا .

ت ٩ ـ ٨ : مادتان موحدتا الخواص ، متجانستان ، خطيتان لهما سطح بينى عند : $x = 0$ عليه تيار سطحى ، $\mathbf{K} = 200\mathbf{a}_y$ A/m . لـ $x < 0$ ، $\mu_{R1} = 2$ و $\mathbf{H}_1 = 150\mathbf{a}_x - 400\mathbf{a}_y + 250\mathbf{a}_z$ A/m . فى المنطقة 2 ، $x > 0$ و $\mu_{R2} = 5$ أوجد : (أ) $\mathbf{H}_2$ ، (ب) $|\mathbf{B}_1|$ ، (جـ) $|\mathbf{B}_2|$.

الاجابة : $60\mathbf{a}_x - 400\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z$ ، 1.244m Wb/m^2 ، 2.56m Wb/m^2 .

٩ ـ ٨ : الدائرة المغناطيسية

فى هذا القسم سننحرف قليلا عن الموضوع الرئيسى لنناقش الطرق التقنية الأساسية المشتملة فى حل نوع من المسائل المغناطيسية معروف بالدوائر المغناطيسية . كما سنرى بعد قليل ، الاسم ينبع من الشبه الكبير مع تحليل دوائر التيار المستمر المقاومية والمفترض أننا جميع متمكنين منها . الفرق الهام الوحيد يقع فى الطبيعة غير الخطية للأجزاء الفرومغناطيسية للدائرة المغناطيسية ، الطرق التى يجب اتخاذها تشبه تلك المطلوبة فى دوائر كهربية غير خطية التى تحتوى صمامات ثنائية ، ثرمستورات ، فتائل متوهجة ، وعناصر غير خطية أخرى .

وكنقطة بداية مناسبة ، دعنا نميز معادلات المجال التى يؤسس عليها تحليل دائرة مقاومية . فى نفس الوقت سنبين أو نستنبط المعادلات المناظرة للدائرة المغناطيسية . سنبدأ بالجهد الكهروستاتيكى وعلاقته بشدة المجال الكهربى ،

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (\text{أ}\,٣٨)$$

الجهد المغناطيسى المقياسى قد عرف سابقا ، وعلاقته المناظرة بشدة المجال المغناطيسى هى

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla V_m} \qquad (\text{ب}\,٣٨)$$

فى التعامل مع دوائر مغناطيسية ، من المناسب أن نسمى V_m القوة الدافعة المغناطيسية ،أو ق د م ، وسنعترف بالتناظر مع القوة الدافعة الكهربية ، أو (ق د ك) بعمل ذلك . وحدات الـ (ق د م) هى ، بالطبع ، الأمبير ، ولكن من المعتاد أن ندرك أن ملفات من عدة لفات تستخدم كثيرا باستخدام التعبير« أمبير ـ لفة » . تذكر أنه لايمكن لتيار المرور فى منطقة فيها V_m معرفة .

فرق الجهد الكهربى بين نقطتى A و B يمكن أن يكتب بالصورة

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \qquad (\text{أ}\,٣٩)$$

والعلاقة المقابلة بين الـ (ق د م) وشدة المجال المغناطيسى ،

$$\boxed{V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}} \qquad (\text{ب}\,٣٩)$$

استنبطت فى الفصل الثامن ، حيث تعلمنا أن المسار المختار يجب ألا يقطع سطح الحاجز المختار .

قانون أوم للدائرة الكهربية له الصورة النقطية

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad (\text{٤٠أ})$$

ونرى أن كثافة التدفق المغناطيسى ستكون المناظرة لكثافة التيار ،

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \qquad (\text{٤٠ب})$$

لايجاد التيار الكلى ، يجب أن نكامل :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\text{٤١أ})$$

عملية مقابلة ضرورية لتعيين التدفق المغناطيسى الكلى المار خلال المقطع العرضى لدائرة مغناطيسية :

$$\boxed{\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} \qquad (\text{٤١ب})$$

عرفنا حينئذ المقاومة على أنها النسبة بين فرق الجهد والتيار ، أو

$$V = IR \qquad (\text{٤٢أ})$$

وسنعرف الآن الممانعة على أنها النسبة بين القوة الدافعة المغناطيسية والتدفق الكلى ، على ذلك

$$\boxed{V_m = \Phi \mathscr{R}} \qquad (\text{٤٢ب})$$

حيث تُقاس الممانعة بالأمبير - لفة لكل وبر (A.T/Wb) .

فى المقاومات المصنوعة من مواد متجانسة موحدة الخواص خطية ذات موصلية σ ولها مقطع عرضى منتظم مساحته S وطول d ، تكون المقاومة الكلية

$$R = \frac{d}{\sigma S} \qquad (\text{٤٣أ})$$

إذا كنا محظوظين بما فيه الكفاية ليكون لدينا مثل هذه المادة المغناطيسية المتجانسة موحدة الخواص الخطية ذات طول d ومقطع عرضى منتظم S ، فحينئذ تكون الممانعة الكلية

$$\mathcal{R} = \frac{d}{\mu S} \quad (٤٣ب)$$

الوحيدة لمثل هذه المادة التى ستنطبق عامة عليها هذه العلاقة هى الهواء .

فى النهاية ، دعنا نعتبر المناظر لفولتية المنبع فى دائرة كهربية نعرف أن التكامل الخطى المغلق لـ E هو صفر ،

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

بتعبير آخر ينص قانون كيرشوف للجهد أن الارتفاع فى الجهد خلال المنبع يساوى بالضبط الانخفاض فى الجهد خلال الحمل . التعبير للظاهرة المغناطيسية يتخذ صورة مختلفة طفيفا ،

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{total}}$$

لأن التكامل الخطى المغلق ليس صفرا . وحيث أن التيار الكلى المرتبط بالمسار يتم الحصول عليه عادة بالسماح لتيار I بأن يمر خلال ملف ذى N لفة ، يمكننا أن نعبر عن هذه النتيجة بالصورة

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI \quad (٤٤)$$

فى دائرة كهربية يكون منبع الفولتية جزءا من المسار المغلق ، فى الدائرة المغناطيسية سيحيط أو يرتبط الملف الحامل للتيار بالدائرة المغناطيسية . عند تتبع دائرة مغناطيسية سوف لانستطيع أن نحدد زوجا من الأطراف عندها تؤثر قوة دافعة مغناطيسية . التناظر هنا أقرب لزوج من الدوائر المقرنة يوجد فيها فولتية مولدة بالحث (وفيها سنرى فى الفصل العاشر أن التكامل الخطى المغلق لـ E هو أيضا ليس صفرا) .

دعنا نُجرب بعض هذه الأفكار على دائرة مغناطيسية بسيطة . لكى نتجنب تعقيدات المواد الفرومغناطيسية فى هذا الوقت سنفرض أن لدينا ملفا حلقيا ذا قلب هوائى مع *500* لفة ، ومساحة مقطع عرضى 6cm^2 ، نصف قطر متوسط *15*cm ، وتيار ملف مقداره *4*A . كما نعرف سابقا ، المجال المغناطيسى محصور فى داخل الملف الحلقى ، وإذا اعتبرنا المسار المغلق لدائرتنا المغناطيسية على طول نصف القطر المتوسط ، نرتبط ب *2,000*A.t ،

$$V_{m,\,\text{source}} = 2{,}000 \text{ A} \cdot \text{t}$$

مع أن المجال فى الملف الحلقى ليس منتظما تماما ، يمكن أن نفرض أنه كذلك لكل الأغراض العملية ونحسب الممانعة الكلية للدائرة كما يلى

$$\mathscr{R} = \frac{d}{\mu S} = \frac{2\pi 0.15}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}}$$

على ذلك

$$= 1.25 \times 10^{9} \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

$$\Phi = \frac{V_{m,s}}{\mathscr{R}} = \frac{2{,}000}{1.25 \times 10^{9}} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

هذه القيمة للتدفق الكلى فى خطأ بأقل من *1/4* فى المائة ، بالمقارنة مع القيمة المتحصل عليها عندما يستخدم التوزيع المضبوط للتدفق على المقطع العرضى .

على ذلك

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.6 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 2.67 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

وأخيرا ،

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{2.67 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}} = 2{,}120 \text{ A} \cdot \text{t/m}$$

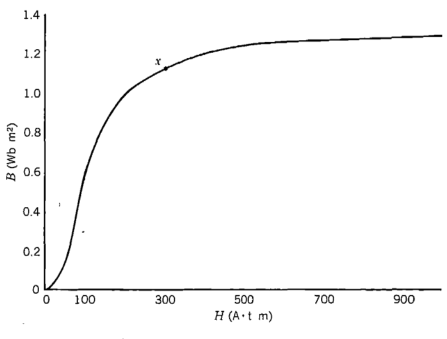
كتحقق ، يمكننا تطبيق قانون أمبير الدائرى مباشرة فى هذه المسألة المتماثلة ،

$$H_{\phi} 2\pi r = NI$$

ونحصل على

$$H_{\phi} = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{500 \times 4}{6.28 \times 0.15} = 2{,}120 \text{ A/m}$$

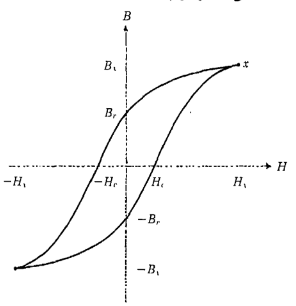
عند نصف القطر المتوسط .



شكل ٩ ـ ١٠ : منحنى تمغنط لعينة من لوح صلب سيليكونى .

دائرتنا المغناطيسية فى هذا المثال لاتعطينا أى فرصة لايجاد الـ (ق د م) عبر العناصر المختلفة فى الدائرة ، لأن هناك نوعا واحدا من المواد فقط . الدائرة الكهربية المناظرة هى ، بالطبع ، منبع مفرد ومقاوم مفرد . على ذلك نستطيع أن نجعلها تبدو طويلة تماما مثل التحليل آنفا إذا أوجدنا كثافة التيار ، شدة المجال الكهربى ، التيار الكلى ، المقاومة ، وفولتية المنبع .

مسائل هامة أكثر وعملية أكثر تظهر عندما توجد مواد فرومغناطيسية فى الدائرة . دعنا نبدأ باعتبار العلاقة بين B و H فى مثل هذه المادة . يمكننا فرض أننا ننشىء منحنى لـ B مع H لعينة من مادة فرومغناطيسية والتى أزيل تمغنطها تماما ، كلا B و H صفرا . بينما نبدأ استعمال (ق د م) ، ترتفع كثافة التدفق أيضا ، ولكن ليس خطيا ، كما تبين النتائج التجريبية لشكل ٩ ـ ١٠ بالقرب من نقطة الأصل . بعد وصول H قيمة حوالى 100A.t/m ، ترتفع كثافة التدفق ببطء أكثر وتبدأ تتشبع عندما تكون H عدة مئات من A.t/m . أما وقد وصل إلى تشبع جزئى ، دعنا الآن نهتم بشكل ٩ ـ ١١ ، حيث يمكننا أن نستمر فى تجربتنا عند نقطة x بتخفيض H . بينما نفعل هذا ، تبدأ تأثيرات التخلفية فى الظهور ، ولانرجع على منحنانا الأصلى . حتى بعد أن تكون H صفرا ، $B = B_y$ ، كثافة التدفق المتبقية . عندما نُعكس H ، ثم ترجع ثانية الى الصفر ، وتتبع الدورة الكاملة عدة مرات ، يحصل على دورة التخلفية لشكل ٩ ـ ١١ . الـ (ق د م) المطلوبة لتخفيض كثافة التدفق الى صفر يرمز لها بـ H_c ، « القوة » القهرية .



شكل ٩ ـ ١١ عروة تخلفية لصلب سيليكونى . القوة القهرية H_c ، وكثافة التدفق المتبقية B_r مبينان .

لقيم عظمى أصغر لـ H يحصل على دورات تخلفية أصغر ، والمحل الهندسى للأطراف تقريبا مثل منحنى التمغنط البكر لشكل ٩ ـ ١٠ .

دعنا نستخدم منحنى التمغنط للصلب السيليكونى لحل مسألة دائرة مغناطيسية مختلفة طفيفا عن مثلنا السابق . سنستخدم قلب صلب فى الملف الحلقى ، فيما عدا ثغرة هوائية ذات 2mm . توجد دوائر مغناطيسية بثغرات هوائية لأن الثغرات تدخل عن قصد فى بعض الأجهزة ، مثل ملفات المحاثة التى يجب أن تحمل تيارات مستمرة عالية لأنها لايمكن تجنبها فى أجهزة أخرى مثل الآلات الدوارة ، أو بسبب مشاكل لايمكن تجنبها فى التجميع . مازال هناك *500* لفة حول المف الحلقى ، ونسأل ما هو التيار المطلوب لإنشاء كثافة تدفق مقدارها 1Wb/m^2 فى كل موضع فى القلب . هذه الدائرة المغناطيسية تناظر دائرة كهربية تحتوى على منبع فولتية ومقاومين ، أحدهما غير خطى . لأننا قد أعطينا « التيار » فمن السهل إيجاد « الفولتية » عبر كل عنصر على التوالى ، ومن ثم (ق د م) الكلية . فى الثغرة الهوائية ،

$$\mathscr{R}_{\text{air}} = \frac{d_{\text{air}}}{\mu S} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 2.65 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

بمعرفة التدفق الكلى

$$\Phi = BS = 1(6 \times 10^{-4}) = 6 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

التى هى نفسها فى كل من الصلب والهواء ، يمكننا أن نوجد الـ (ق د م) المطلوبة للثغرة ،

$$V_{m,\text{ air}} = (6 \times 10^{-4})(2.65 \times 10^6) = 1{,}590 \text{ A} \cdot \text{t}$$

بالرجوع إلى شكل ٩ ـ ١٠ ، شدة مجال مغناطيسى مقدارها *200*A.t/m مطلوبة لتنتج كثافة تدفق مقدارها 1Wb/m^2 فى الصلب . على ذلك

$$H_{\text{steel}} = 200 \text{ A} \cdot \text{t}$$

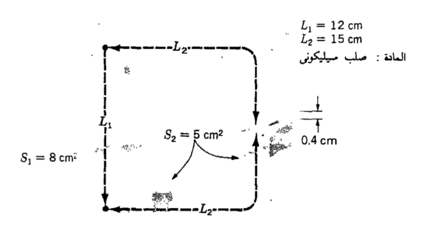
$$V_{m,\text{ steel}} = H_{\text{steel}} d_{\text{steel}} = 200 \times 0.30\pi$$
$$= 188 \text{ A} \cdot \text{t}$$

ال ق د م الكلية تكون لذلك *1,778*A.t ، ومطلوب تيار ملف قيمته *3.56*A .

يجب أن نتبين أننا قد عملنا عدة تقريبات فى الحصول على هذه الاجابة . قد ذكرنا سابقا عدم وجود مقطع عرضى منتظم تماما ، أو تماثل اسطوانى ، مسار كل خط تدفق ليس بنفس الطول . اختيار طول مسار « متوسط » يمكن أن يساعد فى تعويض هذا الخطأ فى مسائل قد يكون فيها أكثر أهمية منها فى مثالنا . تدفق التهدب فى الثغرة الهوائية هو مصدر آخر للخطأ ، ومتاح صيغ يمكن بواسطتها أن نحسب طولا فعالا ومساحة مقطع عرضى للثغرة التى ستعطى نتائج أكثر دقة . هناك أيضا تسرب تدفق بين لفاتْ السلك ، وفى اجهزة تحتوى على ملفات مركزة على قسم واحد من القلب ، تعبر خطوط تدفق قليلة داخل الملف الحلقى . التهدب والتسرب مشكلتان نادرا ماتبرزان فى

الدائرة الكهربية لأن نسبة موصليات الهواء والمواد الموصلة أو المقاومة عالية جدا . على العكس ، يبين منحنى التمغنط للصلب السيليكونى أن نسبة H الى B فى الصلب حوالى 200 حتى « الركبة » فى منحنى التمغنط ، هذا يقارن مع نسبة فى الهواء حوالى $800,000$. على ذلك ، مع أن التدفق يفضل الصلب عن الهواء بنسبة مسيطرة مقدارها $4,000$ الى 1 ، هذه ليست قريبة جدا لنسب الموصليات ذات ، مثلا ، 10^{15} لموصل جيد وعازل مقبول .

كمثال أخير ، دعنا نعتبر المسألة العكسية . اذا أُعطيت تيار ملف مقداره 4A فى الدائرة المغناطيسية السابقة ، كم ستكون كثافة التدفق ؟ أولا دعنا نحاول أن نقرب خطيا منحنى التمغنط بخط مستقيم من نقطة الأصل الى $H = 200 , B = 21$. يكون لدينا حينئذ $B = H/200$ فى الصلب و $B = \mu_0 H$ فى الهواء الممانعتان يوجد أنهما 0.314×10^6 للمسار الصلب و 2.65×10^6 للثغرة الهوائية ، أو كليا 2.96×10^6 A.t/Wb لأن V_m هو $2,000$A.t ، يكون التدفق 6.76×10^{-4}Wb و $B = 1.13$Wb/m^2 . يمكن الحصول على حل أكثر دقة بفرض عدة قيم لـ B وحساب الـ (ق د م) اللازمة . رسم النتائج يمكننا أن نعين القيمة الصحيحة لـ B بالاستكمال من الداخل . بهذه الطريقة تحصل على $B = 1.10$Wb/m^2 . الدقة الجيدة للنموذج الخطى تنتج من الحقيقة أن ممانعة الثغرة الهوائية فى دائرة مغناطيسية تكون غالبا أكبر بكثير من ممانعة الجزء الفرومغناطيسى من الدائرة .



شكل ٩ ـ ١٢ انظر مسألة ت ٩ ـ ٩ .

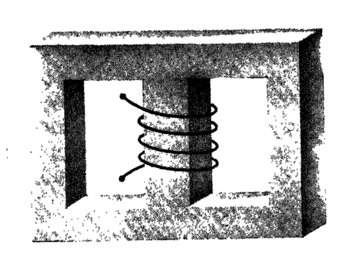
على ذلك يمكن التغاضى عن تقريب سىء نسبيا للحديد أو الصلب .

ت ٩ ـ ٩ : اذا أعطيت الدائرة المغناطيسية لشكل ٩ ـ ١٢ ، افترض $B = 0.8$Wb/m^2 عند منتصف الساق اليسرى وأوجد : (أ) V_mهواء ، (ب) V_mصلب ، (جـ) التيار المطلوب فى ملف له $1,500$ لفة حول الساق اليسرى .

الاجابة : $4,070$ A.t ; 290A.t ; 2.91 .

ت ٩ ـ ١٠ : بالنسبة لقيم B تحت الركبة على منحنى التمغنط للصلب السيليكونى ، من الممكن فرض تعامل خطى بـ $\mu_R = 4,000$. القلب المبين فى شكل ٩ ـ ١٣ له مساحات قيمها 1cm^2 وأطوال قيمها 10cm فى كلا الساقين الخارجيتين ، ومساحة قيمتها 2.4cm^2 وطول 3cm فى الساق المركزية . ملف ذو $1,200$ لفة يحمل 9mA وضع حول الساق المركزية . وأوجد B فى : (أ) الساق المركزية ، (ب) الساق اليسرى ، (جـ) الساق اليمنى إذا قطعت ثغرة هوائية طولها 0.2mm فى كل فرع رأسى .

الاجابة : 0.362 Wb/m^2 , 0.434 Wb/m^2 , 0.0341 Wb/m^2 .



شكل ٩ ـ ١٣ . انظر مسألة ت ٩ ـ ١٠

٩ ـ ٩ : طاقة الجهد والقوى على المواد المغناطيسية

فى المجال الكهروستاتيكى قدمنا أولا الشحنة النقطية والقانون التجريبى للقوة بين الشحنات النقطية . بعد تعريف شدة المجال الكهربى ، كثافة التدفق الكهربى ، والجهد الكهربى ، كنا قادرين على إيجاد تعبير للطاقة فى مجال كهروستاتيكى بإيجاد الشغل اللازم لإحضار الشحنات النقطية المطلوبة من مالانهاية الى مواضع سكونها النهائى . والتعبير العام للطاقة هو

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv \qquad (٤٥)$$

حيث فُرضت علاقة خطية بين D و E .

هذا لايعمل بمثل هذه السهولة للمجال المغناطيسى الثابت . قد يبدو أننا يمكن أن نفرض مصدرين بسيطين ، ربما لوحا تيار ، نجد القوة على أحدهما نتيجة الآخر ، حرك

اللوح مسافة تفاضلية ضد هذه القوة ، وساوى الشغل اللازم بالتغير فى الطاقة . اذا فعلنا ، سنكون بالتأكيد مخطئين ، لأن قانون فارادای (الذى سيظهر فى الفصل التالى) يبين أن سيكون هناك فولتية منتجة بالحث فى لوح التيار المتحرك والتى يجب أن يحافظ على التيار ضدها . مهما يكن المصدر المغذى للوح التيار ينتج أنه يتلقى نصف الطاقة التى نضعها فى الدائرة بتحريكها .

بتعبير آخر ، يمكن تعيين كثافة الطاقة فى المجال المغناطيسى بسهولة أكثر بعد أن تناقش المجالات المتغيرة مع الزمن . سنستنبط التعبير المناسب أثناء مناقشة نظرية بوينتنج فى الفصل الحادى عشر .

مع ذلك ، طريقة بديلة تكون ممكنة فى هذا الوقت ، لأنه يمكننا أن نعرف مجالا مغناطيسيا استاتيكيا مؤسسا على ثنائيات قطب مغناطيسية (أو « شحنات مغناطيسية ») مفترضة . باستخدام الجهد المغناطيسى المقياسى ، نستطيع حينئذ استنباط تعبير للطاقة بطرق مماثلة لتلك التى استخدمت فى الحصول على علاقة الطاقة الكهروستاتيكية . هذه الكميات المغناطيسية الاستاتيكية التى نضطر أن ندخلها قد تكون ثمنا باهضا لندفعه مقابل نتيجة بسيطة ، ولذلك سنقدم النتيجة فقط فى هذا الوقت ونبين أن نفس التعبير يظهر فى نظرية بوينتنج فيما بعد . الطاقة الكلية المختزنة فى مجال مغناطيسى ثابت فيه B ترتبط خطيا مع H هى

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{vol} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv \qquad (٤٦)$$

بجعل $B = \mu H$ ، نحصل على الصيغ المكافئة .

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{vol} \mu H^2\, dv \qquad (٤٧)$$

أو

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{vol} \frac{B^2}{\mu}\, dv \qquad (٤٨)$$

مرة أخرى من المناسب أن نفكر فى هذه الطاقة على أنها موزعة خلال الحجم بكثافة طاقة مقدارها $\frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$ J/m^3 ، مع أنه ليس لدينا تبرير رياضى لمثل هذا التعبير .

بالرغم من الحقيقة أن هذه النتائج صحيحة فقط للأوساط الخطية ، يمكننا أن نستخدمها لحساب القوى على مواد مغناطيسية غير خطية إذا ركزنا اهتمامنا على الأوساط الخطية (عادة هواء) التى قد تحيط بها . مثلا ، افترض أن لدينا ملفا لولبيا طويلا مع قلب من صلب سيليكونى . يحيط به ملف يحتوى على n لفة لكل متر مع تيار I . لذلك تكون شدة المجال المغناطيسى فى القلب nIA.t/m ، ويمكن الحصول على كثافة

التدفق المغناطيسى من منحنى التمغنط للصلب السيليكونى . دعنا نسمى هذه القيمة B_{st} ، افترض أن القلب مكون من اسطوانتين كل منهما نصف ـ لانهائية[1] وهما يكادان يتلامسان . الآن نؤثر بقوة ميكانيكية لفصل هذين القسمين من القلب بينما نحتفظ بكثافة التدفق ثابتة . نؤثر بقوة F خلال مسافة dL ، على ذلك يبذل شغل FdL . هنا لاحاجة لتطبيق قانون فاراداى ، لأن المجالات فى القلب لم تتغير ، ونستطيع لذلك أن نستخدم مبدأ الشغل الافتراضى لتعيين أن الشغل الذى قد عملناه فى تحريك قلب واحد يظهر كطاقة مختزنة فى الثغرة الهوائية التى أوجدناها . بواسطة (٤٨) انفا ، هذه الزيادة هى

$$dW_H = F\,dL = \frac{1}{2}\frac{B_{st}^2}{\mu_0} S\,dL$$

حيث S مساحة المقطع العرضى للقلب . على ذلك

$$F = \frac{B_{st}^2 S}{2\mu_0}$$

مثلا ، إذا كانت شدة المجال المغناطيسى كافية لتنتج تشبعا فى الصلب ، تقريبا : $1 - 4$Wb/m^2 ، تكون القوة

$$F = 7.80 \times 10^5 S \text{ N}$$

أو 113 Ib$_f$/in^2 تقريبا .

ت ٩ ـ ١١ : متابع كهرومغناطيسى معين يمكن تقريبه بجزء من الحديد طوله 10cm ومقطعه 1cm^2 مع $\mu_R = 1,500$ ، على التوالى مع ثغرة هوائية ذات طول 1mm عندما يكون المتابع مفتوحا . افرض أن مساحة الثغرة هى أيضا 1cm^2 يحتوى الملف على $5,000$ لفة ويحمل 15mA . أوجد القوة المؤثرة على حافظة المغناطيس (الجزء المتحرك من الدائرة المغناطيسية) عندما يكون طول الثغرة : (أ) 1mm ، (ب) 0.3mm ، (جـ) 0.1mm .

الاجابة : 0.311N ، 2.63N ، 12.72N .

٩ ـ ١٠ : المحاثة والمحاثة المتبادلة

المحاثة هى الأخيرة من البارامترات الثلاث المألوفة من نظرية الدوائر التى نعرفها بتعبيرات أكثر تعميما . المقاومة عرفت فى الفصل الخامس كنسبة فرق الجهد بين

---

(١) اسطوانة نصف لانهائية هى اسطوانة ذات طول لانهائى احدى النهايتين واقعة فى فراغ محدود .

السطحين متساويى ـ الجهد لمادة موصلة الى التيار الكلى العابر لأى من السطحين المتساويى ـ الجهد . المقاومة دالة فى هندسة الموصل والموصلية فقط . السعة عرفت فى نفس الفصل كنسبة الشحنة الكلية على أى من سطحين موصلين متساويى ـ الجهد الى فرق الجهد بين السطحين . السعة دالة فقط فى الشكل الهندسى للسطحين الموصلين وسماحية الوسط العازل بينهما أو المحيط بهما . شرح المقاومة والسعة كعناصر دائرة سيفحص بشمول أكثر فى قسم ١٣ ـ ١ .

كمقدمة لتعريف المحاثة ، نحتاج أولا أن نقدم مفهوم وصلية التدفق . دعنا نعتبر ملفا حلقيا ذا N لفة فيه تيار I ينتج تدفقا كلياً Φ . سنفرض أولا أن هذا التدفق يربط أو يلتف حول كل من اللفات N ، ونرى أيضا أن كلا من اللفات N تتصل بالتدفق الكلى Φ . تعرف وصلية التدفق $N\Phi$ كحاصل ضرب عدد اللفات N والتدفق Φ الذى يربط كل منها[1] . لملف له لفة مفردة ، وصلية التدفق تساوى التدفق الكلى .

نعرف الآن المحاثة (أوالمحاثة الذاتية) كنسبة وصليات التدفق الكلية الى التيار الذى يربطها

$$\boxed{L = \frac{N\Phi}{I}} \qquad (٤٩)$$

التيار I المار فى الملف ذى الـ N من الملفات ينتج تدفقا كلية Φ و $N\Phi$ وصلية تدفق ، حيث نفرض حاليا أن التدفق Φ يربط كل لفة . هذا التعريف يمكن تطبيقه فقط على الأوساط المغناطيسية الخطية ، لكى يكون التدفق متناسبا مع التيار .

إذا وجدت مواد فرومغناطيسية ، فليس هناك تعريف مفرد للمحاثة بحيث يكون مفيدا فى كل الحالات ، وسنقصر اهتمامنا على المواد الخطية .

وحدة المحاثة هى الهنرى (H) ، مكافئة لوبر ـ لفة لكل أمبير .

دعنا نطبق (٤٩) بطريقة مباشرة لنحسب المحاثة لكل متر طول لكابل محورى ذى نصف قطر داخلى a ونصف قطر خارجى b . يمكننا أخذ تعبير التدفق الكلى المستنبط كما فى معادلة (٤٢) فى الفصل الثامن ،

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

ونحصل على المحاثة بسرعة لطول d ،

$$L = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H}$$

---

(١) الرمز λ يستخدم عامة لوصليات التدفق مع ذلك سنستفيد من هذا المفهوم أحيانا ، وكيفما كان سنستمر فى كتابتها $N\Phi$.

أو ، على أساس كل متر ،

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H/m} \qquad (٥٠)$$

فى هذه الحالة ، لفة $N = 1$ ، وكل التدفق يربط كل التيار .

فى المسألة الخاصة بملف حلقى ذى N لفة وتيار I ، كماهو مبين فى شكل ٨ - ١١ب ، لدينا

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}$$

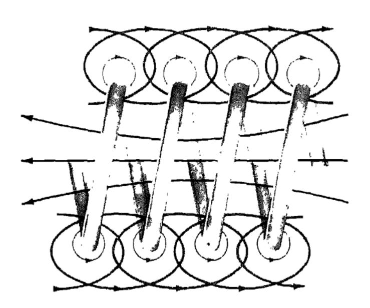
إذا كانت أبعاد المقطع العرضى صغيرة بالنسبة لنصف القطر المتوسط ρ_0 للملف الحلقى ، حينئذ يكون التدفق الكلى

$$\Phi = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi\rho_0}$$

حيث S هى مساحة المقطع العرضى . بضرب التدفق الكلى فى N ، نحصل على وصلية التدفق ، وبالقسمة على I ، نحصل على المحاثة

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi\rho_0} \qquad (٥١)$$

مرة أخرى قد فرضنا أن كل التدفق يربط كل اللفات ، وهذا فرض جيد لملف حلقى ذى لفات عديدة ملفوفة بإحكام من بعضها . افترض ، مع ذلك ، أن ملفنا الحلقى له فاصل محسوس بين اللفات ، جزء قصير منه قد يبدو كما فى شكل ٩ - ١٤ .



شكل ٩ - ١٤ جزء من ملف يبين وصليات تدفق جزئية . وصليات التدفق الكلية يحصل عليها بجمع التدفقات الرابطة كل لفة .

وصليات التدفق لم تعد حاصل ضرب التدفق عند نصف القطر المتوسط مع العدد الكلى للفات . لكى نحصل على وصليات التدفق الكلية يجب أن ننظر الى الملف على أساس لفة بلفة .

$$(N\Phi)_{total} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_i + \cdots + \Phi_N$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

حيث Φ_i هو التدفق الرابط للفة i . أفضل من عمل هذا . نعتمد عادة على الخبرة وكميات تجريبية تسمى عوامل اللف ، وعوامل الخطوة لضبط الصيغة الأساسية حتى تطبق على العالم الفيزيائى الحقيقى .

تعريفنا مكافئا للمحاثة يمكن أن يعمل باستخدام وجهة نظر الطاقة ،

$$L = \frac{2W_H}{I^2} \tag{٥٢}$$

حيث I هو التيار الكلى المار فى المسار المغلق و W_H هى الطاقة فى المجال المغناطيسى الناتج عن التيار . بعد استخدام (٥٢) للحصول على عدة تعبيرات أخرى للمحاثة ، سنبين أنها مكافئة لـ (٤٩) .

أولا نعبر عن طاقة الجهد W_H بدلالة المجالات المغناطيسية

$$L = \frac{\int_{vol} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv}{I^2} \tag{٥٣}$$

ثم نستبدل $\mathbf{B}$ بـ $\nabla \times \mathbf{A}$ ،

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{vol} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dv$$

المتطابقة المتجهة ،

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \tag{٥٤}$$

يمكن أن تثبت بالفك فى إحداثيات كرتيزية . حينئذ تكون المحاثة

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\int_{vol} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})\, dv + \int_{vol} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, dv \right] \tag{٥٥}$$

بعد تطبيق نظرية الانفراج على التكامل الأول وجعل $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ فى التكامل الثانى ، نحصل على

$$L = \frac{1}{I^2}\left[\oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathrm{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}\, dv\right]$$

التكامل السطحى صفر ، لأن السطح يحتوى الحجم المحتوى على كل الطاقة المغناطيسية ، وهذا يتطلب أن تكون A و H صفرا على السطح المحد . لذلك يمكن أن تكتب المحاثة بالصورة

$$L = \frac{1}{I^2}\int_{\mathrm{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}\, dv \quad (٥٦)$$

تعبر معادلة (٥٦) عن المحاثة بدلالة تكامل لقيم لـ A و J عند كل نقطة لأن كثافة التيار توجد فقط خلال الموصل ، يكون المكامل صفرا عند كل النقط خارج الموصل ، ولانحتاج تعيين الجهد المغناطيسى المتجه هناك . الجهد المتجه هو ذاك الناشىء من التيار J ، وأى منبع تيار اخر مساهم بمجال جهد متجه فى منطقة كثافة التيار الأصلية ينبغى تجاهلها فى الوقت الحالى . فيما بعد سنرى أن ذلك يؤدى الى **محاثة متبادلة** .

الجهد المغناطيسى المتجه A بسبب J معطى بمعادلة (٥١) ، الفصل الثامن

$$\mathbf{A} = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R}\, dv$$

والمحاثة يمكن لذلك التعبير عنها أكثر قاعديا كتكامل حجمى مزدوج متعب نوعا ،

$$L = \frac{1}{I^2}\int_{\mathrm{vol}}\left(\int_{\mathrm{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R}\, dv\right) \cdot \mathbf{J}\, dv \quad (٥٧)$$

يُحصل على تعبير تكاملى أبسط طفيفا بقصر اهتمامنا على فتائل تيار ذات مقطع عرضى صغير والتى يمكن لها استبدال $\mathbf{J}dv$ بـ $Id\mathbf{L}$ والتكامل الحجمى بتكامل خطى مغلق على محور الفتيلة ،

$$L = \frac{1}{I^2}\oint\left(\oint \frac{\mu I\, d\mathbf{L}}{4\pi R}\right) \cdot I\, d\mathbf{L} \quad (٥٨)$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\oint\left(\oint \frac{d\mathbf{L}}{R}\right) \cdot d\mathbf{L}$$

اهتمامنا الحالى الوحيد فى معادلتى (٥٧) و (٥٨) ينحصر فى تضمنها أن المحاثة دالة فى توزيع التيار فى الفراغ أوهندسة شكل الموصل .

لكى نحصل على تعريفنا الأصلى للمحاثة (٤٩) دعنا نفترض توزيع تيار منتظم فى موصل فتيلى ذى مقطع عرضى صغير . بحيث تصبح $\mathbf{J}dv$ فى (٥٦) $Id\mathbf{L}$ ،

$$L = \frac{1}{I} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \quad (٥٩)$$

لمقطع عرضى صغير ، يمكن أن تؤخذ $d\mathbf{L}$ على طول منتصف الفتيلة . نطبق الان نظرية ستوكس ونحصل على

$$L = \frac{1}{I} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

أو

$$L = \frac{1}{I} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

أو

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (٦٠)$$

بتتبع الخطوات التى قد حصل بها على . (٦٠) ، يجب أن نرى أن التدفق Φ هو ذاك الجزء من التدفق الكلى الذى يمر خلال أى وكل سطح مفتوح الذى محيطة هو مسار التيار الفتيلى .

إذا سمحنا للفتيلة أن تعمل N من اللفات المتطابقة حول التدفق الكلى ، وهو أمر مثالى يمكن أن يتحقق بتقريب جيد فى بعض انواع المحاثات ، التكامل الخطى المغلق يجب أن يتكون من N من اللفات حول هذا المسار العام وتصبح (٦٠)

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (٦١)$$

التدفق Φ هو الان التدفق العابر لأى سطح محيطه هو المسار المشغول بأى واحدة من اللفات N . مع ذلك ، المحاثة لملف ذى N من اللفات مازال يمكن الحصول عليها من (٦٠) اذا ادركنا ان التدفق هو ذاك الذى يعبر السطح المعقد[١] الذى يتكون محيطه من جميع اللفات N .

استخدام أى من تعبيرات المحاثة لموصل فتيلى حقيقى (له نصف قطر صفرى) يؤدى الى قيمة لانهائية للمحاثة ، بدون اعتبار لشكل الفتيلة . بالقرب من الموصل يبين قانون أمبير الدائرى أن شدة المجال المغناطيسى تتغير عكسيا مع المسافة من الموصل ، وفى الحال يبين تكامل بسيط أن كمية طاقة لانهائية وكمية تدفق لانهائية محتواة داخل أى اسطوانة محدودة حول الفتيلة . هذه الصعوبة تزال بتحديد نصف قطر فتيلى صغير ولكن محدود .

---

(١) مايشبه منحدرا حلزونيا .

الداخل لأى موصل يحوى أيضا تدفقا مغناطيسيا ، وهذا التدفق يربط جزءا متغيرا من التيار الكلى ، معتمدا على موضعه . وصليات التدفق هذه تؤدى الى محاثة داخلية والتى يجب أن تضم الى المحاثة الخارجية لنحصل على المحاثة الكلية . المحاثة الداخلية لسلك مستقيم طويل ذى مقطع عرضى دائرى مع توزيع تيار منتظم هى : $\mu/8\pi$ ، H/M وهى نتيجة مطلوبة فى مسألة عند نهاية هذا الفصل .

فى الفصل الحادى عشر سيرى أن توزيع التيار فى موصل عند الترددات العالية يتجه الى أن يكون مركزا قرب السطح . التدفق الداخلى يقل ، ويكفى عادة أن نعتبر المحاثة الخارجية فقط . ومع ذلك ، عند الترددات الأدنى يمكن أن تصبح المحاثة الداخلية جزءا ملموسا من المحاثة الكلية .

نختتم بتعريف **المحاثة المتبادلة** بين دائرتين 1 و 2 , M_{12} ، بدلالة وصليات تدفق متبادلة .

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (٦٢)$$

حيث تعنى Φ_{12} التدفق الناتج من I_1 الذى يربط مسار التيار الفتيلى I_2 ، و N_2 عدد اللفات فى الدائرة 2 .

تعتمد المحاثة المتبادلة ، لذلك ، على تبادل الفعل المغناطيسى بين التيارين . مع أى واحد من التيارين وحده ، يمكن إيجاد الطاقة الكلية المختزنة فى المجال المغناطيسى بدلالة محاثة منفردة ، أو محاثة ـ ذاتية ؛ مع كلا التيارين لهما قيم غير صفرية ، تكون الطاقة الكلية دالة للمحاثتين الذاتيتين والمحاثة المتبادلة . بدلالة طاقة متبادلة ، يمكن بيان أن (٦٢) تكافىء

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2)\, dv \quad (٦٣)$$

أو

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2)\, dv \quad (٦٤)$$

حيث $\mathbf{B}_1$ هى المجال الناتج عن I_1 (مع $I_2 = 0$) و $\mathbf{H}_2$ هى المجال بسبب I_2 (مع $I_1 = 0$) . تبادل الرموز السفلية لايغير الطرف الأيمن من (٦٤) ، ولذلك

$$M_{12} = M_{21} \quad (٦٥)$$

المحاثة المتبادلة تقاس أيضا بالهنرى ، ونعتمد على السياق ليسمح لنا أن نميزها من التمغنط ، الذى يُمثل أيضا بـ M .

كمثال على حساب المحاثة الذاتية والمتبادلة ، دعنا نفرض ملفين لولبيين متحدى المحور ذوى نصفى قطرين R_1 و R_2 ، $R_2 > R_1$ ، يحملان تيارين I_1 و I_2 مع n_1 و n_2 لفات لكل متر ، بالترتيب من معادلة (١٥) ، الفصل الثامن ، ندع $n_1 = N/d$ ، ونحصل على

$$\mathbf{H}_1 = n_1 I_1 \mathbf{a}_z \qquad (0 < \rho < R_1)$$
$$= 0 \qquad (\rho > R_1)$$

و

$$\mathbf{H}_2 = n_2 I_2 \mathbf{a}_z \qquad (0 < \rho < R_2)$$
$$= 0 \qquad (\rho > R_2)$$

على ذلك ، لهذا المجال المنتظم

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^{\,2}$$

و

$$M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^{\,2}$$

$$\Phi_{21} = \mu_0 n_2 I_2 \pi R_1^{\,2}$$

بالمثل ،

$$M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^{\,2} = M_{12}$$

إذا كانت $n_1 = 50$ لفة s/cm ، $m_2 = 80$ لفة s/cm ، $R_1 = 2$cm ، و $R_2 = 3$cm فإن

$$M_{12} = M_{21} = 63.0 \text{ mH/m}$$

بينما

$L_1 = 39.4$ mH/m و $L_2 = 227$ MH/m .

نرى ، لذلك ، أن هناك طرقا عديدة مُتاحة لحساب المحاثة الذاتية والمحاثة المتبادلة . لسوء الحظ ، حتى المسائل ذات الدرجة العالية من التماثل تعطى تكاملات صعب جدا تقييمها ، ومسائل قليلة فقط متاحة لنا لنجرب مهارتنا عليها .

المحاثة ستناقش بصيغ الدائرة فى الفصل الثالث عشر .

ت ٩ ـ ١٢ : أوجد المحاثة الذاتية لـ : (أ) 2m من كابل محورى مع $a = 1.5$mm و $b = 7.5$mm ، ومملوء بفريت له $\mu_R = 120$ ، (ب) ملف حلقى له 600 لفة ملفوف على قالب خشبى مقطعه العرضى مربع 2×2cm ونصف قطر داخلى 2.5cm ، (جـ) ملف لولبى له 600 ، لفة مع نصف قطر 2cm ، طول 40cm ، مع $\mu_R = 100$ لـ $0 < \rho < 3$mm و $\mu_R = 1$ لـ $0.3 < \rho < 2$cm .

الاجابة : 77.3μH ; 846μH ; $4,590\mu$H .

ت ٩ ـ ١٣ : ملف لولبي ذو $1,200$ لفة ، طول 60cm ، وقطر 1cm ملفوف على قلب اسطوانى له $\mu_R = 12$. هذا الملف مركز ليكون متحد المحور داخل ملف لولبي ثانى له 800 لفة وطوله 60cm وقطر 3cm . احسب المحاثة الذاتية لكل ملف لولبي والمحاثة المتبادلة بينهما . القلب الأسطوانى يجب أن يكون موجودا فى كل الحسابات .

الاجابة : 2.84MH , 12.11mH , 1.895mH .

مراجع مقترحة

1 - Azaroff, L.V., and J.J. Broph: "Electronic Process in Materials", McGraw - Hill Book Company, New York, 1963

المواد المغناطيسية مناقشة فى الفصل الثالث عشر .

(انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس)

2 - Fano, R.M., L. J. Chu, and R.B. adler

المواد المغناطيسية مغطاة فى الفصل الخامس .

(انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس)

3 - Matsch, L.W.:

الفصل الثالث مخصص للدوائر المغناطيسية والمواد الفرومغناطيسية .

مسائل

١ ـ شحنة نقطية مقدارها 4C تتحرك خلال مجال كهربى منتظم $E= 3a_x$ V/m . عند $T = 0$ ، وضعت الشحنة النقطية عند نقطة الأصل ولها سرعة مقدارها $5a_z$m/s . لتبسيط الأعداد ، افرض كتلة مقدارها 1kg . استخدم معادلة القوة وقوانين نيوتن لتحصل على المعادلات التفاضلية المناسبة ، حلها ، واحسب عند $t = 2$s :
(أ) موضع الشحنة $P (x,y,z)$ ، (ب)سرعتها v ، (جـ) طاقة حركتها .

٢ ـ شحنة نقطية مقدارها 4C تتحرك خلال مجال مغناطيسى منتظم $B = 3a_x$ Wb/m^2 ، عند $t = 0$ ، وضعت الشحنة النقطية عند نقطة الأصل ولها سرعة $5a_z$ m/s . لتبسيط الأعداد ، افرض كتلة مقدارها 1kg . استخدم معادلة القوة وقوانين نيوتن لتحصل على المعادلات التفاضلية المناسبة ، وحلها . قد يكون من المساعد أن تلاحظ أن حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية التى يحصل عليها أغلب الطلبة معطى فى قسم ٧ ـ ٥ . ثم احسب عند $t = 2$s : (أ) موضع الشحنة $P (x,y,z)$ ، (ب) سرعتها v ، (جـ) طاقة حركتها .

٣ ـ الكترون له سرعة مقدارها 10^6m/s فى اتجاه a_x فى مجال مغناطيسى $B= 0.2a_x - 0.3a_y + 0.5a_z$ Wb/m^2 . (أ) ما المجال الكهربى الموجود إذا لم تؤثر قوة صافية على الالكترون ؟
(ب) إذا كانت $E= E_0(a_x + ay + a_z)$ ، حيث $E_0 > 0$ ، عين E_0 بحيث تكون صافى القوة على الالكترون 0.2pV .

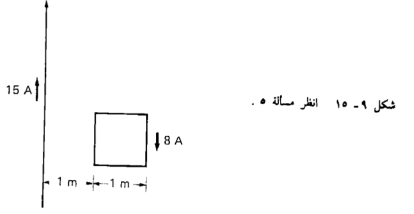
٤ ـ شحنة نقطية موجبة كتلتها m وسرعتها $v= v_0a_x$ تنتقل فى المجالين الكهربى والمغناطيسى المنضمين ، $E= E_0a_y$ و $B= B_0a_z$. اذا فرضنا أن v_0 , E_0 و B_0 جميعها موجبة ، صف اتجاه القوة الابتدائية على الشحنة اذا كانت v_0 تساوى : (أ) E_0/B_0 ، (ب) $0.5E_0/B_0$ ، (جـ) $2E_0/B_0$.

٥ ـ الموصلات فى شكل ٩ ـ ١٥ كلها فتيلية والذى على اليسار لانهائى الطول . أوجد متجه القوة المؤثرة على كل من الجوانب الأربعة للعروة المربعة ثم أعطى القوة المتجة الكلية على العروة .

٦ ـ تيار مقداره 20A يمر فى اتجاه a_x على طول كل المحور x فى فضاء حر . (أ) أوجد متجه القوة المؤثرة على عنصر فتيلة تزايدية $I\Delta y a_y$ عند $(0,y,2)$. (ب) أوجد متجه القوة الكلية على فتيلة محدودة ، $3a_y$A ، موضوعه عند : $z = 2 , 0 \leqslant y \leqslant 5 , x = 0$.

٧ ـ فى المستوى $z = 0$ ، كثافة التدفق المغناطيسى لها مركبة فى اتجاه : $B_x = 1.6/(x^2 + 1)\ \mu$ Wb/m^2 ، ماهو متجه القوة المؤثرة على تيار سطحى $K= 0.1a_y$ A/m فى جزء من المستوى $z = 0$ المحدود بـ $-\infty < x < \infty , 0 < y < 1$ ؟

٨ ـ تيار فتيلى مقداره 8mA يمر نحو نقطة الأصل على المحور x الموجب ثم مبتعدا عن نقطة الأصل على المحور y الموجب . (أ) أوجد متجه القوة المؤثرة على طول تفاضلى dLa_y واقع عند $(0,y,0)$. (ب) ما متجه القوة الكلية الموجودة على الطول الممتد من $y = 1$mm الى 1km ؟



شكل ٩ ـ ١٥ انظر مسألة ٥ .

٩ ـ (أ) استخدم معادلة ١٤ ـ ، قسم ٩ ـ ٣ ، لتبين أن قوة التجاذب لكل وحدة طول بين موصلين فتيليين فى فضاء حر مع تيارين $I_1\mathbf{a}_z$ عند $x = 0$ و $y = ½\, d$ ، و $I_2\mathbf{a}_z$ عند $x = 0$ و $y = -½ d$ هى $\mu_0 I_1 I_2/(2\pi d)$. (ب) بين كيف يمكن استخدام طريقة أبسط للتحقق من إجابتك .

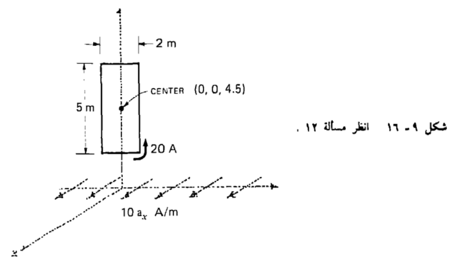
١٠ ـ ثلاث فتائل تيار لانهائية فى المستوى $x = 0$ مرتبة كمايلى فى فضاء حر : 10A فى اتجاه $\mathbf{a}_y$ عند $z = 2$ ، 3A فى اتجاه $-\mathbf{a}_y$ عند $z = 1$. 7A فى اتجاه $-\mathbf{a}_y$ عند $z = -2$. أوجد متجه القوة لكل متر طول على كل .

١١ ـ فتيلة تيار لانهائية على المحور z تحمل 12A فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ ، وشريط رفيع فى المستوى $x = 0$ بين $y = 5$mm و $y = 20$mm يحمل تيارا كليا مقداره 12A فى اتجاه $-\mathbf{a}_z$. بفرض ظروف الفضاء الحر . أوجد متجه القوة لكل متر طول المؤثرة فى : (أ) الشريط بواسطة الفتيلة ، (جـ) الفتيلة بواسطة الشريط .

١٢ ـ لوح تيار لانهائى ، $\mathbf{K} = 10\mathbf{a}_x$A/m ، يقع فى المستوى $z = 0$. وعروة مستطيلة تحمل 20A تقع فى المستوى $x = 0$ ، كما هو مبين بشكل ٩ ـ ١٦ . أوجد عزم التدوير على : (أ) العروة حول نقطة أصل عند $(0,0,0)$ ، (ب) العروة حول نقطة أصل عند $(0,0,4.5)$ ، (جـ) الجانب الأيمن حول نقطة أصل تقع عند $(0,0,-5)$.

١٣ ـ عروة تيار فتيلية مربعة لها نقط الأركان : $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,2,1)$, $(0,2,0)$ ، التيار هو 8A فى اتجاه دوران عقرب الساعة ، كما يرى من المحور x الموجب . دع $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_z$ Wb/m^2 وأوجد عزم التدوير حول محور : (أ) على المحور z ، (ب) على الخط $x = 0$, $y = 1.5$. (جـ) الان ازل المجال $\mathbf{B}$ المنتظم ودع تيارا فتيليا مقداره 15A يمر فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ طوال المحور z . أوجد عزم التدوير حول نقطة الأصل .

١٤ ـ ملف لولبى طويل ، $\rho =$ cm ، له المحور z كمحوره ويحمل تيارا مقداره 5A فى الاتجاه $\mathbf{a}_\phi$ العام . هناك 30 لفة/cm باستخدام أى نقطة على المحور z كنقطة أصل ، أوجد عزم التدوير على : (أ) عروة دائرية ، $\rho = 2cm$ ، $z = 0$cm تحمل 2A فى اتجاه $\mathbf{a}_\phi$ ، (ب) عروة مستطيلة تحمل 3A على أجزاء خطية مستقمة من $(1,0,0)$ الى $(-1,0,0)$ الى $(-1,0,-4)$ إلى $(1,0-4)$cm .



شكل ٩ ـ ١٦ انظر مسألة ١٢ .

١٥ ـ ملف لولبى ذو طول 25cm وقطر 3cm ، ويحمل 4A dc فى لفاته الـ 400 . محوره عمودى على مجال مغناطيسى منتظم مقداره 0.8Wb/m^2 فى هواء . مستخدما نقطة أصل عند مركز الملف اللولبى ، احسب عزم التدوير المؤثر عليه .

١٦ ـ هذه المواد العشر تمثل أنواعا خمسة مختلفة لمواد مغناطيسية : النيكو ، أرجون ، بيزموث ، كلوريد الكوبلت ، ماجنيتيت ، نيكل ، فريت نيكلى ، أكسيد نيكل ، اكسيجين وأكسيد يتريوم . حدد مثالين ينتميان لكل من الأنواع الآتية خلال مدى مناسب من درجة الحرارة : (أ) دايا مغناطيسية ، (ب) بارامغناطيسية (جـ) فرومغناطيسية (د) ضديد الفرومغناطيسية (هـ) فرى مغناطيسية .

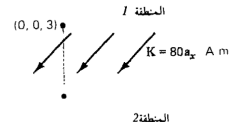
١٧ ـ فى نموذج ذرى بسيط ، يدور الكترون مفرد حول نواة موجبة . لنصف قطر a وسرعة زاوية ω : (أ) حدد العزم المغناطيسى للنموذج ، (ب) احسب عزم التدوير الذى ينتج من كثافة تدفق مغناطيسى B توازى مستوى الدوران .

١٨ ـ إذا أعطيت لوحا التيار اللانهائيان المبينان بشكل ٩ ـ ١٧ ، حدد H و B ، و M فى المناطق 1،2 و 3 إذا : (أ) $\mu_R = 0.998$ فى كل موضع ، (ب) $\mu_R = 1{,}000$ فى المنطقة 2 ، بينهما المنطقتان 1 و 3 فضاء حر .

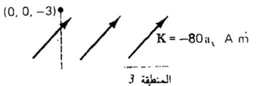
١٩ ـ مادة معينة موحدة الخواص لها $\chi_m = 2$ و $\mathbf{B} = 20y\mathbf{a}_x\text{Wb/m}^2$. أوجد : (أ) μ_R ، (ب) μ ، (جـ) J_b ، (د) J ، (هـ) M ، (و) H .

٢٠ ـ دع $\mathbf{B} = 0.1\mathbf{a}_x\ \text{Wb/m}^2$ فى كل موضع ، ودع $\mu_R = 1$ لـ $|x| > 2$. ارسم H_x ، B_x و M_x مع x إذا كان : (أ) $\mu_R = 5$ لـ $|x| < 2$ ، (ب) $\mu_R = 5/(1 + x^2)$ لـ $|x| < 2$.

٢١ ـ أوجد H , B و M فى كل موضع إذا كانت $\mathbf{J} = 12\mathbf{a}_z\ \text{kA/m}^2$ و $\mu_R = 2.5$ خلال المنطقة $-0.1 < y < 0.2$m ، بينما $\mathbf{J} = 0$ و $\mu_R = 1.25$ فى أى موضع آخر .



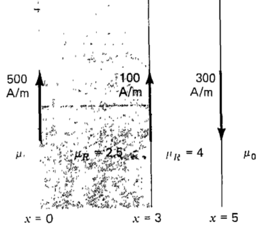
شكل ٩ ـ ١٧ انظر مسألة ١٨ .



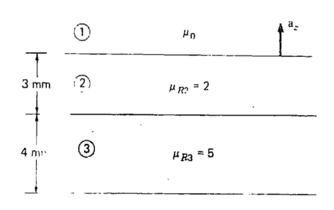
٢٢ ـ النتائج الاتية تنطبق على خط نقل محورى :
$0 < \rho < 3$mm و $8 < \rho < 10$mm
$\sigma = \infty$, $\mu = \mu_0$; $3 < \rho < 5$mm ; $\sigma = 0$, $\mu_R = 10$, $5 < \rho < 8$mm ,
$\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$, $\rho > 10$mm , $\mu_R = 3$. افرض تيارا كليا $I = 0.1\pi$A ، فى اتجاه a_z فى الموصل الداخلى واتجاه a_z — فى الموصل الخارجى . ارسم تخطيطيا H_ϕ , B_ϕ و M_ϕ مع ρ فى المدى :
(أ) $3 < \rho < 8$mm ، (ب) $0 < \rho < 3$mm (جـ) $8 < \rho < 10$mm .

٢٣ ـ فتيلا تيار لانهائيان يقعان فى المستوى $x = 0$. واحد عند $z = 2$ يحمل 50A فى اتجاه a_y بينما الاخر عند $z = 0$ يحمل 50A فى اتجاه a_y — . إذا كانت $\mu_R = 1.01$ فى كل موضع ، أوجد مقدار H , B و M عند :
. $P (2, -5, 0.5)$

٢٤ ـ بالنسبة لألواح التيار وشرائح المادة المبينة بشكل ٩ ـ ١٨ ، أوجد B فى كل موضع .



شكل ٩ ـ ١٨ انظر مسألة ٢٤ .



شكل ٩ ـ ١٩ انظر مسألة ٢٦ .

٢٥ ـ إذا أعطيت $\mu_{R1} = 1$ ، $\mu_{R2} = 2$ و $\mathbf{H}_1 = 300\mathbf{a}_x - 150\mathbf{a}_y + 450\mathbf{a}_z$ A/m ، دع سطح الحد يحتوى على نقطة الأصل ، ودع وحدة المتجه $\mathbf{a}_{N12} = (-2\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y + 14\mathbf{a}_z)/15$ تكون عمودية على السطح هناك ، وتشير من المنطقة 1 الى المنطقة 2 . عين الزاوية (بين $0°$ و $90°$) ، بين $\mathbf{a}_{N12}$ و (أ) $\mathbf{H}_1$ ، (ب) $\mathbf{H}_2$.

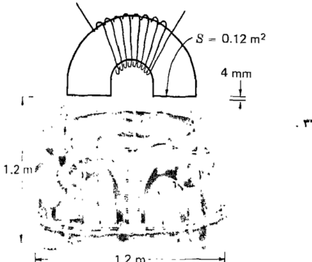
٢٦ ـ صفيحتان لانهائيتان من مادة مغناطيسية موحدة الخواص ، خطية ، ومتجانسة موضوعتان فى فضاء حر كما هو مبين بشكل ٩ ـ ١٩ . دع $\mathbf{a}_z$ توجه الى أعلى . إذا كانت $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$kA/m فى منطقة 1 ، أوجد الزاوية بين $\mathbf{H}$ و $\mathbf{a}_z$ فى منطقة : (أ) 1 ، (ب) 2 ، (جـ) 3 ، (د) 4 .

٢٧ ـ ملف لولبى طويل له نصف قطر 3cm و5,000 لفة/m ، وكل لفة تحمل 0.25A . المنطقة $0 < \rho < a$ داخل الملف اللولبى لها $\mu_R = 5$ ، بينما $\mu_R = 1$ لـ $a < \rho <$ 3cm . حدد a بحيث : (أ) يوجد تدفقا كليا مقداره 10μWb ، (ب) يقسم التدفق بالتساوى بين المنطقتين $0 < \rho < a$ و $a < \rho <$ 3cm .

٢٨ ـ فى مسألة ت ٩ ـ ١٠أ ، يؤدى التقريب الخطى المقترح فى نص المسألة الى كثافة تدفق مقدارها 0.362Wb/m^2 فى الساق الوسطى . باستخدام قيمة B هذه ومنحنى التمغنط للصلب السيليكونى ، ماهو التيار المطلوب فى الملف ذى الـ $1,200$ لفة ؟

٢٩ ـ دائرة مغناطيسية تتكون من ثغرة هوائية طولها 0.5mm مع مساحة فعالة 2.1cm^2 على التوالى مع جزء من الصلب السيليكونى طوله 12.5cm ومساحته 2cm^2 ق . د . م . مقدارها 400A.t موضوعة . احسب كثافة التدفق فى الصلب إذا : (أ) فرض أن جزء الصلب له ممانعة صفرية ، (ب) فرض أن الصلب خطى مغناطيسيا مع $\mu = 0.005$H/m ، (جـ) كان منحنى التمغنط للصلب هو ذاك المعطى بشكل ٩ ـ ١٠ .

٣٠ ـ ملف محورى له مقطع عرضى مساحته $8cm^2$ ونصف قطر فعال $4cm$. يحتوى على الملف على $2,000$ لفة . يتكون القلب من قطعتين نصفى دائرتين ، واحدة من الصلب السيليكونى والأخرى من مادة خطية لها $\mu_R = 200$. اذا كان هناك ثغرة هوائية فعالة مقدارها $0.2mm$ عند كل وصلة ، (أ) ماهو تيار الملف المطلوب لينتج كثافة تدفق مقدارها $1Wb/m^2$ فى القلب ؟ . (ب) ماهى كثافة التدفق الناتجة اذا كان التيار $0.5A$ ؟



شكل ٩ ـ ٢٠ انظر مسألة ٣٦ .

٣١ ـ قلب المحول الصلب السيليكونى المبين بشكل ٩ ـ ١٣ له ملف ذو 900 لفة يحمل $0.2A$ على الساق الأوسط ، وتلك الساق ذات مساحة فعالة مقدارها $2.5cm^2$ ، وطول فعال مقداره $5cm$. هذه القيم لكل ساق خارجية هى $2cm^2$ و $15cm$ ، بالترتيب . ماطول ثغرة هوائية موجودة فى الساق الوسطى إذا كانت كثافة التدفق هناك $1.2Wb/m^2$ ؟

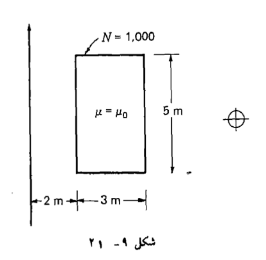
٣٢ ـ منحنى $B - H$ لنوع معين من الصلب ممثل بالتعبير :
$B = 1.2H^2/(H^2 + 10,000)$. وهذه المادة مستخدمة فى دائرة مغناطيسية بسيطة فيها الجزء الصلب له مساحة $0.8cm^2$ وطول $5cm$ ، وثغرة هوائية على التوالى طولها $10^{-4}m$. أوجد التدفق المغناطيسى الذى ينتج عندما يكون التنشيط $100A.t$.

٣٣ ـ ملف حلقى له قلب سيليكونى ذو مقطع عرضى مربع $1.5 \times 1.5cm$ ونصف قطر داخلى مقداره $5cm$. ملف التيار يعطى $120A.t$. كم يجب أن يكون طول الثغرة الهوائية لتسبب قوة مقدارها $5\ Ib_f$ على كل من وجهى الثغرة ؟

٣٤ ـ مامقدار الطاقة المختزنة لكل متر طول فى المجال المغناطيسى داخل موصل دائرى مصمت غير مغناطيسى نصف قطره ρ_0 ، يحمل تياراً كلياً I منتظم التوزيع ؟

٣٥ ـ لوحا تيار متوازيان يفصلهما 10cm فى فضاء حر ويحملان تيارين مقاديرهما $\pm 100a_x$ A /m ملف لولبى طويل نصف قطره 4 cm محوره مواز للمحور x ويقع كلية بين لوحى التيار . يحمل الملف اللولبى 10^4 لفة/m وتيارا مقداره 5mA . أوجد الطاقة الكلية المختزنه فى 1m طول من الملف اللولبى : (أ) اذا كان لوحا التيار المتوازيان يعملان فقط ، (ب) اذا كان الملف اللولبى يعمل فقط ، (جـ) اذا كان كلاهما يعمل .

٣٦ـ مغناطيس كهربى يرفع سيارة قديمة على هيئة مكعب مضغوط ضلعه 1.2m ، كما هو مبين بشكل ٩ ـ ٢٠ . افرض أن كل وجه قطب له مساحه تلامس مقدارها 0.12m^2 وثغرة هوائية فعالة مقدارها 4mm . إذا كانت السيارة ثقلها $12,000$N ، ما الـ(ق . د . م) التى يجب على الملف إمدادها اذا كانت ممانعة المغناطيس الكهربى نفسه . (أ) والسيارة يمكن اهمالها ، (ب) يمكن إهمالها ، ولكن السيارة لها طول مسار فعال مقدارة 0.8m ، ومساحة فعالة مقدارها 0.12m^2 ، وانفاذية نسبية فعالة مقدارها 300 ؟ .



شكل ٩ـ ٢١

٣٧ ـ الملف اللولبى المبين بشكل ٨ ـ ١٠ب فيه $I = 40$ mA , $N = 3,000$, $d = 30$cm ونصف قطر مقداره 1.2cm . افرض أن $\mu = \mu_0$. (أ) أوجد B و H داخل الملف اللولبى ثم استخدم معادلة (٤٦) لقسم ٩ ـ ٩ لتعين الطاقة الكلية المختزنة . (ب) احسب المحاثة من $W_H = 1/2\ LI^2$.

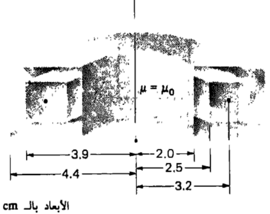
٣٨ ـ مستويان موصلان فى هواء عند $z = 0$ و $z = d$ يحملان تيارى سطحين مقاديرهما $\pm K_0 a_x$ A/m . (أ) أوجد الطاقة المختزنة فى المجال المغناطيسى لكل وحدة طول $(0< x < 1)$ فى عرض $w(0 < y < w)$ وفاصل d $(0 < z < d)$. (ب) احسب المحاثة لكل وحدة طول من خط النقل هذا من $W_H = ½\ LI^2$ ، حيث I هو التيار

الكلى فى عرض w فى أى من الموصلين . (جـ) احسب التدفق الكلى المار خلال المستطيل $0 < x < 1 ; 0 < z < d$ ، فى المستوى $y = 0$. ومن هذه النتيجة أوجد مرة أخرى المحاثة لكل وحدة طول .

٣٩ ـ (أ) أوجد المحاثة المتبادلة بين الفتيلة المستقيمة اللانهائية والعروة المستطيلة ذات الـ $1,000$ لفة لشكل ٩ ـ ٢١ . (ب) ماهى M إذا حركت العروة إلى 1mm من الفتيلة ؟ (جـ) ماهى M اذا كانت كل الأبعاد على الرسم التخطيطى بالسنتيمترات بدلا من الأمتار ؟

٤٠ ـ ملفان حلقيان لهما مقاطع عرضية مربعة ، كما هو مبين بشكل ٩ ـ ٢٢ . (أ) اذا احتوى الملف الداخلى على 500 لفة والخارجى له $4,000$ لفة ، استخدم تقريبات جيدة لتوجد المحاثة لكل ملف والمحاثة المتبادلة بينهما . إفرض $\mu = \mu_0$ فى كل مكان . (ب) احسب قيما مضبوطة لـ $L_{داخلية}$ ، $L_{خارجية}$ و M .

٤١ ـ أوجد المحاثة المتبادلة بين دائرتين مكونتين من موصلات فتيلية فى المستوى $z = 0$ إذا تكونت الدائرة 1 من فتيلين لانهائيى الطول عند $x = 0$ و $x = 5$ (تحملان تيارين متساويين ومتضادين) والدائرة 2 فى عروة مستطيلة تصل النقط : (أ) $(3,0,0)$, $(3,2,0)$, $(4,2,0)$, $(4,0,0)$ ، (ب) $(7,2,0)$, $(7,0,0)$, $(6,2,0)$, $(6,0,0)$.



شكل ٩ ـ ٢٢ : انظر مسألة ٤٠ .

٤٢ ـ (أ) استخدم علاقات طاقة لتبين أن المحاثة الداخلية لسلك اسطوانى غير مغناطيسى ذى نصف قطر a يحمل تيارا I) منتظم التوزيع هى $\mu_0/(8\pi)H/m$. (ب) أوجد المحاثة الداخلية اذا أزيل الجزء من الموصل الذى له $\rho < c < a$.

٤٣ ـ فتيلة لانهائية فى فضاء حر تقع على المحور z ، وعروة فتيلية مربعة جانبها 2m تقع فى المستوى $y = 0$. أحد جوانب العروة المربعة يوازى المحور z وعلى بعد 1m منه . (أ) احسب المحاثة المتبادلة . (ب) اديرت العروة $45°$ حول مركزها فى المستوى $y = 0$. أوجد M .

الفصل العاشر

المجالات المتغيرة مع الزمن ومعادلات ماكسويل

العلاقات الأساسية للمجال الكهروستاتيكي والمغناطيسي الثابت قد حصل عليها في الفصول التسعة السابقة ، ونحن الآن مستعدون لمناقشة مجالات متغيرة مع الزمن . ستكون المناقشة قصيرة ، لأن تحليل المتجهات وتفاضل وتكامل المتجهات يجب أن تكون الآن أدوات مألوفة أكثر ؛ بعض العلاقات لم تتغير ، ومعظم العلاقات تغيرت تغيرا طفيفا فقط .

سيقدم مفهومان جديدان : المجال الكهربى الناتج عن مجال مغناطيسى متغير والمجال المغناطيسى الناتج عن مجال كهربى متغير . أول هذين المفهومين نتج عن بحث تجريبى لميشيل فاراداى ، والثانى من المجهودات النظرية لجيمس كليرك ماكسويل .

ماكسويل أُلهم بالفعل بعمل فاراداى التجريبى والصورة الذهنية المعطاة خلال « خطوط القوى » التى أدخلها فاراداى فى تطوير نظريته للكهربية والمغناطيسية . كان أصغر من فاراداى بأربعين عاما . ولكنهما عرفا بعضهما خلال السنوات الخمس التى قضاها ماكسويل فى لندن كأستاذ شاب ، بعد سنوات قليلة من تقاعد فاراداى . طورت نظرية ماكسويل بعد هذا المنصب الجامعى وبينما كان يعمل بمفرده فى منزله فى سكوتلندا . شغلته لخمس سنوات بين عمرى ٣٥ و ٤٠ .

المعادلات الأساسية الأربعة للنظرية الكهرومغناطيسية المعطاة فى هذا الفصل تحمل أسمه .

١٠ ـ ١ : قانون فاراداى

بعد أن أوضح أورستد فى ١٨٢٠ أن تيارا كهربيا أثر على إبرة بوصلة ، أعلن فاراداى اعتقاده أنه اذا استطاع تيار انتاج مجال مغناطيسى ، فان مجالا مغناطيسيا يجب أن يكون قادرا على انتاج تيار . مفهوم « المجال » لم يكن متاحا فى ذلك الوقت ، وكان هدف فاراداى أن يبين أن تيارا يمكن أن ينتج « بالمغناطيسية » .

وعمل فى هذه المسألة متقطعا على مدى عشر سنوات ، حتى نجح أخيرا فى ١٨٣١[١] . لف لفيفتين منفصلتين على ملف حلقى حديدى ووضع جالفانومترا فى دائرة وبطارية فى الأخرى . عند اغلاق دائرة البطارية ، لاحظ انحرافا لحظيا للجالفانومتر ، وحدث انحراف مماثل فى الاتجاه المضاد عندما فصلت البطارية . هذه ، بالطبع ، كانت التجربة الاولى التى قد عملها مشتملة على مجال مغناطيسى متغير ، وأتبعها بايضاح أن أياً من مجال مغناطيسى متحرك أوملف متحرك يستطيع أيضا أن يُسبب انحراف الجلفانومتر .

بدلالة المجالات ، نقول الان أن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينتج **قوة دافعة كهربية** (ق د ب emf) والتى قد تنشىء تيارا فى دائرة مغلقة مناسبة القوة الدافعة الكهربية هى مجرد فولتية تنتج من موصلات تتحرك فى مجال مغناطيسى أو من مجالات مغناطيسية متغيرة ، وسنعرفها فيما بعد . قانون فارادای عادة يصاغ بالصورة .

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{V} \qquad (١)$$

معادلة (١) تتضمن مسارا مغلقا ، مع أنه ليس بالضرورة مسار موصل مغلق ، المسار المغلق ، مثلا ، قد يحتوى على مكثف ، أوقد يكون خطا تخيليا تماما فى الفراغ ، والتدفق المغناطيسى هو ذلك التدفق الذى يمر خلال أى وكل سطح محيطه هو المسار المغلق ، و $d\phi/dt$ هو معدل التغير الزمنى لهذا التدفق .

قد تنتج قيمة غير صفرية لـ $d\phi/dt$ من أى من الحالات الاتية :

١ - تدفق متغير مع الزمن مرتبط بمسار مغلق ساكن .

٢ - حركة نسبية بين تدفق ثابت ومسار مغلق .

٣ - تجمع من الاثنين .

الاشارة السالبة هى دلالة على أن الـ ق د ك فى اتجاه بحيث تسبب تيارا تدفقه ، اذا أضيفت الى التدفق الأصلى ، سيقلل مقدار الـ ق د ك . هذه الصيغة أن الفولتيه المنتجه بالحث تعمل لتعطى تدفقا مضادا معروفة كقانون لنز[٢] .

اذا كان المسار المغلق هو ذاك المأخوذ بموصل فتيلى ذو N من اللفات ، فغالبا يكون اعتبار أن اللفات منطبقة دقيقا بقدر كاف وندع

(١) حصل جوزيف هنرى على نتائج مشابهة فى أكاديمية البانى فى نيويورك فى نفس الوقت تقريبا .
(٢) هنرى فريدريك اميل لنز ولد فى المانيا ، ولكن عمل فى روسيا . نشر قانونه فى ١٨٣٤ .

$$\text{emf} = -N\frac{d\Phi}{dt} \quad (٢)$$

حيث Φ تفسر الآن على أنها التدفق المار خلال أى واحدة من N من المسارات المنطبقة .

نحتاج الى تعريف ق د ك كما هى مستخدمة فى (١) أو (٢) . واضح أن الـ ق د ك مقياسية ، ويوضح (ربما ليس بمثل هذا الوضوح) تحقق بالأبعاد أنها تقاس بالفولت . نعرف الـ ق د ك . بالصورة

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (٣)$$

ولاحظ أنها الفولتية حول مسار مغلق محدد . اذا ماغير أى جزء من المسار ، تتغير الـ ق د ك عامة . البعد عن النتائج الاستاتيكية مبين بوضوح بـ (٣) ، لأن شدة مجال كهربى ناتجه من توزيع شحنة استاتيكى يجب أن يؤدى الى فرق جهد صفرى حول مسار مغلق . فى الكهروستاتيكية ، يؤدى التكامل الخطى الى فرق جهد ، مع مجالات متغيرة مع الزمن ، تكون النتيجة ق د ك أو فولتية .

باستبدال Φ فى (١) بتكامل $\mathbf{B}$ السطحى ، نحصل على

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (٤)$$

حيث تمثل اصابع يدنا اليمنى اتجاه المسار المغلق ،، ويمثل ابهامنا اتجاه $d\mathbf{S}$. كثافة تدفق $\mathbf{B}$ فى اتجاه $d\mathbf{S}$ ومتزايدة مع الزمن تنتج على ذلك قيمة متوسطة لـ $\mathbf{E}$ مضادة للاتجاه الموجب حول المسار المغلق . العلاقة اليمينية ـ اليد بين التكامل السطحى والتكامل الخطى المغلق فى (٤) يجب دائما أن تبقى فى الذاكرة أثناء تكاملات التدفق وتحديدات الـ ق د ك .

دعنا نقسم بحثنا الى جزءين بايجاد أولا المساهمة للـ ق د ك الكلية الناتجة عن مجال متغير داخل مسار ساكن (ق د ك للمحول) ، ثم سنعتبر مسار متحرك خلال مجال ثابت (ق د ك حركية ، أو للمولد)

نعتبر أولا مسارا ساكنا . يكون التدفق المغناطيسى هو الكمية الوحيدة المتغيرة مع الزمن فى الطرف الأيمن لـ (٤) ، ويمكن أخذ مشتقة جزئية تحت علامة التكامل ،

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (٥)$$

قبل أن نُطبق هذه النتيجة البسيطة على مثال ، دعنا نحصل على الصورة النقطية لهذه المعادلة التكاملية . بتطبيق نظرية ستوكس على التكامل الخطى المغلق ، يكون لدينا

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حيث يمكن أخذ التكاملين السطحيين على سطحين متطابقين . الأسطح عامة تماما ويمكن أن تختار كتفاضليات ،

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

و

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (٦)$$

هذه واحدة من معادلات ماكسويل الأربع كما تكتب فى الصورة التفاضلية ، أو النقطية ، الصورة التى تستخدم فيها عادة اكثر . معادلة (٥) هى الصورة التكاملية لهذه المعادلة وهى تكافىء قانون فارادای كما يطبق على مسار ثابت . اذا كانت B ليست دالة فى الزمن ، واضح أن (٥) و (٦) تؤولان الى المعادلات الكهروستاتيكية ،

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \qquad \text{كهروستاتيكية}$$

و

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \text{كهروستاتيكية}$$

كمثال على شرح (٥) و (٦) ، دعنا نفرض مجالا مغناطيسيا بسيطا يتزايد اسيا مع الزمن داخل المنطقة الاسطوانية $\rho < b$ ،

$$\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z \quad (٧)$$

حيث B_0 = ثابت . باختيار المسار الدائرى $\rho = a$ ، $a < b$ ، فى المستوى $z = 0$ ، الذى يجب أن تكون عليه E_ϕ ثابتة من التماثل ، فحينئذ يكون لدينا من (٥)

$$\text{emf} = 2\pi a E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi a^2$$

الـ ق . د ك حول هذا المسار المغلق هى $-kB_0 e^{kt} \pi a^2$. وهى تتناسب مع a^2 ، لأن كثافة التدفق المغناطيسى منتظم والتدفق المار خلال السطح عند أى لحظة يتناسب مع المساحة .

اذا استبدلنا الان a بـ ρ ، $\rho < b$ ، تكون شدة المجال الكهربى عند أى نقطة

$$\mathbf{E} = -\tfrac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho\mathbf{a}_\phi \qquad (٨)$$

دعنا نحاول الآن أن نحصل على نفس الاجابة من (٦) ، التى تصبح

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -kB_0 e^{kt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho}$$

بالضرب فى ρ والتكامل من 0 الى ρ (معاملين t كثابت ، لأن المشتقة هى مشتقة جزئية) ،

$$-\tfrac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho^2 = \rho E_\phi$$

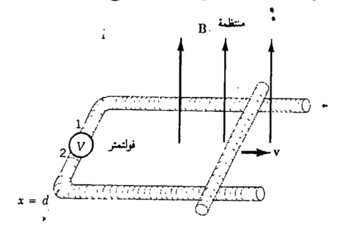
أو

$$\mathbf{E} = -\tfrac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho\mathbf{a}_\phi$$

مرة أخرى .

اذا اعتبرت B_0 موجبة ، سيكون لموصل فتيلى ذو مقاومة R تيار مار فى اتجاه $\mathbf{a}_\phi$ السالب ، وهذا التيار سينشىء تدفقا داخل العروة الدائرية فى الاتجاه السالب لـ $\mathbf{a}_z$. لأن E_ϕ تزيد أسيا مع الزمن ، كذلك يفعل التيار والتدفق ، وعلى ذلك تميل الى خفض المعدل الزمن لزيادة التدفق المؤثر و ق د ك المحصلة تبعا لقانون لنز .

قبل ترك هذا المثال ، من المستحسن أن نشير الى أن المجال B المعطى لايحقق كل معادلات ماكسويل . مثل هذه المجالات تفرض غالبا(فى مسائل دوائر التيار المتردد) ولاتسبب أى صعوبة عندما تفسر على الوجه الصحيح .



شكل ١٠ ـ ١ . مثال يوضح تطبيق قانون فارادای على حالة كثافة تدفق مغناطيسى ثابتة ومسار متحرك . يتحرك قضيب التقصير الى اليمين بسرعة V ، وتكمل الدائرة خلال القضيبين وفولتمتر صغير للغاية ذو مقاومة عالية . قراءة الفولتمتر هى $V_{12} = -Bvd$.

مع ذلك أحيانا تسبب دهشة . هذا المجال الخاص مناقش أكثر فى المسألة رقم ٢٠ عند نهاية هذا الفصل .

الان دعنا نعتبر حالة تدفق ثابت مع الزمن ومسار مغلق متحرك . قبل أن نستنبط أى نتائج خاصة من قانون فاراداى (١) ، دعنا نستخدم القانون الأساسى لتحليل المسألة الخاصة المبينة فى شكل ١٠ ـ ١ . الدائرة المغلقة تتكون من موصلين متوازيين متصلين عند طرف بواسطة فولتمتر عالى المقاومة وذى أبعاد مهملة وعند الطرف الأخر بواسطة قضيب منزلق يتحرك بسرعة v . كثافة التدفق المغناطيس ثابتة (فى الفراغ والزمن) وهى عمودية على المستوى المحتوى على المسار المغلق .

دع موضع قضيب التقصير يُعطى بـ y ، فحينئذ يكون التدفق المار خلال السطح داخل المسار المغلق عند أى زمن t هو

$$\Phi = Byd$$

من (١) ، نحصل على

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt}d = -Bvd \qquad (٩)$$

لأن الـ ق د ك معرفة بـ $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{L}$ ولدينا مسار موصل ، يمكننا بالفعل تعيين E عند كل نقطة على المسار المغلق . وجدنا فى الكهروستاتيكية ، أن المركبة المماسة لـ E تكون صفرا عند سطح موصل ، وسنبين فى قسم ١٠ ـ ٤ أن المركبة المماسة تكون صفرا عند سطح موصل تام $(\sigma = \infty)$ لكل الحالات المتغيرة مع الزمن . هذا يكافىء القول أن موصلا تاما هو « دائرة قصر » . المسار المغلق الكامل فى شكل ١٠ ـ ١ يمكن أن يعتبر كموصل مثالى ، باستثناء الفولتمتر . حينئذ يجب الا يحتوى الحاسب الفعلى لـ $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{L}$ على مساهمة على طول كل القضيب المتحرك ، كلا القضيبين ، واطراف الفولتمتر . لأننا نكامل فى اتجاه عكس دوران عقرب الساعة (جاعلين داخل الجانب الموجب للسطح على يسارنا كالمعتاد) . فان المساهمة $E\Delta L$ عبر الفولتمتر يجب أن تكون $-Bvd$ ، مبينة أن شدة المجال الكهربى فى جهاز القياس موجهة من الطرف 2 الى الطرف 1 . بالنسبة لقراءة فى اتجاه الزيادة على المقياس ، يجب لذلك أن يكون الطرف الموجب للفولتمتر هو الطرف 2 .

اتجاه مرور التيار الصغير المحصل يمكن أن يؤكد بملاحظة أن التدفق المحصور يقل بتيار فى اتجاه دوران عقرب الساعة تبعا لقانون لنز ، يرى مرة أخرى أن الطرف 2 للفولتمتر يكون الطرف الموجب .

دعنا الان نعتبر هذا المثال باستخدام مفهوم ق د ك الحركية . القوة على شحنة Q تتحرك بسرعة v فى مجال مغناطيسى B هى

$$\boxed{\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$

أو

$$\frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (١٠)$$

القضيب الموصل المنزلق يتكون من شحنات موجبة وسالبة ، وكل يلاقى هذه القوة . القوة لكل وحدة شحنة ، كماهى معطاة بـ (١٠) ، تسمى شدة المجال الكهربى الحركية $\mathbf{E}_m$ ،

$$\boxed{\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (١١)$$

اذا كان الموصل المتحرك على القضيبين مرفوعا ، لدفعت شدة المجال الكهربى هذه الالكترونات لأحد طرفى القضيب (الطرف البعيد) الى أن يوازن المجال الاستاتيكى الناشىء عن هذه الشحنات تماما المجال المولد بالحث نتيجة حركة القضيب . حينئذ ستكون شدة المجال الكهربى المماسة الناتجة صفرا على طول القضيب .

الـ ق د ك الحركية الناتجة عن الموصل المتحرك هى حينئذ

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \qquad (١٢)$$

حيث يمكن أن يكون للتكامل الأخير قيمة غير صفرية فقط على هذا الجزء من المسار الذى يتحرك ، أو الذى عليه v لها قيمة ما غير صفرية . بايجاد الطرف الأيمن لـ (١٢) ، نحصل على

$$\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 vB\, dx = -Bvd$$

كما سبق . هذه هى الـ ق د ك الكلية ، لأن B ليست دالة فى الزمن .

فى حالة موصل متحرك فى مجال مغناطيسى منتظم ثابت ، يمكننا لذلك أن ننسب شدة مجال كهربى حركية $\mathbf{E}_m = v \times \mathbf{B}$ لكل جزء من الموصل المتحرك ونوجد قيمة الـ ق د ك المحصلة من

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \qquad (١٣)$$

اذا كانت كثافة التدفق المغناطيسى متغيرة مع الزمن أيضا ، فحينئذ يجب أن نضمن كلا المساهمتين ، ق د ك للمحول (٥) والـ ق د ك الحركية (١٢) ،

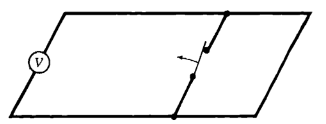
$$(١٤) \quad \text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

هذا التعبير يكافىء الصيغة البسيطة

$$(١) \quad \text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

وأى منهما يمكن أن يستخدم لتعيين هذه الفولتيات المنتجة بالحث .

مع أن (١) تبدو بسيطة ، فهناك قليل من الأمثلة تحتاج الى تصرف التى فيها تطبيقها الصحيح صعب جدا . هذه تشتمل عادة على اتصالات منزلقة أو مفاتيح كهربية ، مشتملة دائما على استبدال بجزء من الدائرة جزء جديد[١] . كمثال ، أعتبر الدائرة البسيطة لشكل ١٠ ـ ٢ ، المحتوية على عدة اسلاك موصلة تامة ، فولتمتر مثالى ، مجال B ثابت منتظم ، ومفتاح كهربى . عندما يفتح المفتاح الكهربى ، يكون بوضوح هناك تدفق أكثر محصور فى دائرة الفولتمتر ، مع ذلك يستمر فى قراءة صفر . التغير فى التدفق لم يحدث بأى من B متغيرة مع الزمن [الحد الأول فى (١٤)] أو موصل متحرك خلال مجال مغناطيسى [الجزء الثانى فى (١٤)] . بدلا من ذلك ، فقد أستعيض عن الدائرة القديمة بدائرة جديدة . على ذلك فمن الضرورى استخدام الحذر فى تقييم التغيير فى وصليات التدفق .



شكل ١٠ ـ ٢ . زيادة ظاهرية فى وصليات التدفق لاتؤدى الى فولتيه منتجه بالحث عندما يستبدل ببساطة جزء من الدائرة بدل آخر بفتح المفتاح الكهربى . سوف لايلاحظ انحراف على الفولتمتر .

فصل الـ ق د ك الى جزءين الممثلين بـ (١٤) ، واحد بسبب معدل التغير الزمن لـ B والاخر بسبب حركة الدائرة ، اختيارى الى حد ما فى أنه يعتمد على السرعة النسبية بين المُشاهد والنظام . مجال متغير مع كل من الزمن والفراغ قد يظهر ثابتا لمشاهد يتحرك

(١) انظر Bewley ، فى بيان المراجع عند نهاية الفصل ، خاصة PP.12 -19 .

مع المجال . هذا الخط من التفكير متطور بشمول أكثر فى تطبيق النظرية النسبية الخاصة على النظرية الكهرومغناطيسية[1] .

ت ١٠ - ١ : كثافة التدفق المغناطيسى يمكن أن تمثل بـ : $B_z = [1/(1+100\rho^2)]$ فى الاحداثيات الاسطوانية لـ $\rho < 0.2$m . (أ) أوجد التدفق المغناطيسى المار خلال السطح $\rho \leqslant 0.1$, $z = 0$ ، فى الاتجاه a_z . (ب) أوجد E عند $\rho = 0.1$, $\phi = \pi/4$, $z = 0$. (جـ) اذا كان المسار الدائرى ، $\rho = 0.1$, $z = 0$ ، سلكا موصلا ذا مقاومة 1 Ω/cm ، أى تيار يمر فى السلك فى الاتجاه a_ϕ ؟

الاجابة :

$-108.9a_\phi\cos 1{,}000\pi t$mV/m ; $-1.089\cos 1{,}000\pi t$mA ; $21.8\sin 1{,}000\pi t\mu$Wb .

ت ١٠ - ٢ : الجهاز المبين بشكل ١٠ - ١ له $d = 0.15$m ويعمل مع : $B = 0.4a_z$ Wb/m^2 . اذا كانت $V = 200ya_y$m/s و $y = 0.1$m عند $t = 0$ ، أوجد عند $t = 10$ms : (أ) v_y ، (ب) V_{12} ، (جـ) التيار الداخل للطرف 2 للفولتمتر اذا كانت مقاومة المقياس 50kΩ .

الاجابة : 147.8m/s , -8.87V , 177.3μA .

١٠ - ٢ : تيار الازاحة :

قانون فاراداى التجريبى قد استخدم للحصول على احدى معادلات ماكسويل فى صورة تفاضلية ،

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (15)$$

التى تبين لنا أن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينتج مجالا كهربيا . بتذكر تعريف الالتواء ، نرى أن هذا المجال الكهربى له خاصية الدوران الخاصة ، فتكامله الخطى حول مسار مغلق عام ليس صفرا . الان دعنا نوجه انتباهنا للمجال الكهربى المتغير مع الزمن .

يجب أولا أن ننظر الى الصورة النقطية لقانون امبير الدائرى كما تطبق على مجالات مغناطيسية ثابتة ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (16)$$

(١) هذا مناقش فى عديد من المراجع المدرجة فى بيان المراجع عند نهاية الفصل . أنظر Owen , PP.231 — 245 , Panofsky and Phillips, PP. 142 — 151 و Harman فى عدة أماكن .

ونبين عدم صلاحيتها لحالات التغير مع الزمن بأخذ الانفراج لكلا الطرفين ،

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

حيث أن الانفراج للالتواء يتطابق مع الصفر ، تكون $\nabla . \mathbf{J}$ صفرا أيضا ، ولكن ، معادلة الاستمرارية ،

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

تبين لنا حينئذ أن (١٦) تكون صحيحة فقط اذا كانت $\partial\rho/\partial t = 0$. وهذا تقييد غير واقعى ، ويجب أن تعدل (١٦) قبل أن نستطيع قبولها لمجالات متغيرة مع الزمن . افترض أننا أضفنا حدا مجهولا G الى (١٦) ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

مرة أخرى بأخذ الانفراج ، يكون لدينا

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

أو

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

باستبدال $\nabla . \mathbf{D}$ بـ ρ ،

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

منها تحصل على أبسط حل لـ G ،

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

غلذلك يصبح قانون أمبير الدائرى فى الصورة النقطية

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \qquad (١٧)$$

معادلة (١٧) لم تستنبط . أنها مجرد صورة قد حصلنا عليها لاتتعارض مع معادلة الاستمرارية . وهى أيضا متوافقة مع جميع نتائجنا الأخرى ، ونقبلها كما فعلنا مع كل قانون تجريبى والمعادلات المستنبطة منه . نحن نبنى نظرية ، ولنا كل الحق فى معادلتنا الى أن يثبت خطؤها . وهذا لم يثبت بعد .

الآن لدينا واحدة من معادلات ماكسويل الأخرى وسنستقصى أهميتها . الحد الاضافى $\partial D/\partial t$ له وحدات كثافة التيار ، أمبير لكل متر مربع . لأنه ينتج عن كثافة تدفق كهربى متغيرة مع الزمن (أوكثافة إزاحة) ، سماها ماكسويل كثافة تيار إزاحة . . نرمز لها أحيانا بـ J_d .

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

هذا هو النوع الثالث من كثافة التيار الذى قابلناه . كثافة تيار التوصيل ،

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

هى حركة شحنة (عادة الكترونات) فى منطقة صافى كثافة شحنتها صفر ، وكثافة تيار الحمل ،

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

هى حركة كثافة شحنة حجمية . كلاهما ممثلا بـ J فى (١٧) . كثافة التيار المقيد ، بالطبع ، محتواه فى H . فى وسط غير موصل لايوجد فيه كثافة شحنة حجمية ، $\mathbf{J}=0$ ، وحينئذ

$$(١٨) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (\text{if } \mathbf{J} = 0)$$

لاحظ التماثل بين (١٨) و (١٥) :

$$(١٥) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ومرة أخرى التناظر بين متجهات الشدة E و H ومتجهات كثافة التدفق D و B ظاهره . على أنه ، لايمكن أن توضع ثقة كبيرة جدا فى هذا التناظر ، لأنه يفشل عندما نفحص قوى على جسيمات . القوة على شحنة ترتبط بـ E و بـ B ، ويمكن تقديم بعض

حجج جيدة تبين تناظرا بين E و B وبين D و H . مع ذلك سنحذفها وفقط نقول أن فكرة تيار الازاحة ربما أوحيت لماكسويل من التماثل الذى ذكر آنفا لأول مرة(١) .

تيار الازاحة الكلى العابر لأى سطح معطى يحدد بالتكامل السطحى ،

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

ونستطيع الحصول على الصورة المتغيرة مع الزمن لقانون أمبير الدائرى بتكامل (١٧) على السطح S ،

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

وتطبيق نظرية ستوكس ،

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \qquad (١٩)$$

ماهى طبيعة كثافة تيار الازاحة ؟ دعنا ندرس الدائرة البسيطة لشكل . ١٠ ـ ٣ ، المحتوية على عروة فتيلية ومكثف متوازى الألواح . داخل العروة يؤثر مجال مغناطيسى يتغير جيبيا مع الزمن لينتج ق د ك حول المسار المغلق (الفتيلة بالاضافة الى الجزء ذى الشرط بين لوحى المكثف) والذى سنأخذه بالصورة

$$\text{emf} = V_0 \cos \omega t$$

باستخدام نظرية الدوائر الأولية وبفرض أن العروة لها مقاومة ومحاثة مهملان ، يمكننا الحصول على التيار فى العروة كمايلى :

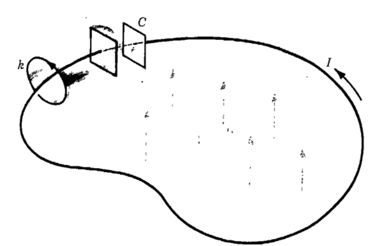
$$I = -\omega C V_0 \sin \omega t$$

$$= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

حيث تخص الكميات ϵ , S و d المكثف .

---

(١) التناظر الذى يربط B بـ D و H بـ E امد بشدة بـ Fano, Chu and Adler (انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس) على الصفحات 160 - 159 و 179 ، حالة لمقارنة B مع E و D مع H مقدمة فى Halliday and Resnik (انظر المراجع المقترحة لهذا الفصل) على الصفحات 668 - 665 و 836 - 832 .



شكل ١٠ - ٣ موصل فتيلى يكون عروة تصل لوحى مكثف متوازى الألواح . مجال مغناطيسى متغير مع الزمن داخل المسار المغلق ينتج ق د ك مقدارها $V_0 \cos wt$ حول المسار المغلق . تيار التوصيل I يساوى تيار الازاحة بين لوحى المكثف .

دعنا نطبق قانون أمبير الدائرى حول المسار الدائرى المغلق الأصغر k ونهمل حاليا تيار الازاحة :

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

المسار وقيمة H على طول المسار كلاهما له كميات محددة (مع أنها صعبة التعيين) و $\oint_k \mathbf{H}.d\mathbf{L}$ كمية محددة . التيار I_k هو ذلك التيار خلال كل سطح محيطه هو المسار k . اذا اخترنا سطحا بسيطا مخترقا بالفتيلة ، مثل السطح الدائرى المستوى المعرف بالمسار الدائرى k ، يكون واضحا أن التيار هو تيار التوصيل . افترض الآن اننا نعتبر المسار المغلق k كفتحة كيس ورق يمر قاعها بين لوحى المكثف . والكيس لايثقب بالفتيلة ، ويكون تيار التوصيل صفرا . والآن نحتاج الى اعتبار تيار الازاحة ، لأن داخل المكثف

$$D = \epsilon E = \epsilon\left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t\right)$$

ولذلك

$$I_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

هذه نفس القيمة مثل تلك لتيار التوصيل فى العروة الفتيلية . لذلك تطبيق قانون أمبير الدائرى محتويا تيار الازاحة على المسار k يؤدى الى قيمة محددة للتكامل الخطى لـ **H** . هذه القيمة يجب أن تساوى التيار الكلى العابر للسطح المختار . لبعض الأسطح يكون التيار كلية تقريبا تيار توصيل ، ولكن لتلك الأسطح المارة بين لوحى المكثف ، يكون تيار التوصيل صفرا ، ويكون هو تيار الازاحة الذى يساوى الان التكامل الخطى المغلق لـ **H** .

فيزيائيا ، يجب أن نلاحظ أن مكثفا يختزن شحنة وأن المجال الكهربى بين لوحى المكثف أكبر كثيرا من مجالات التسرب الصغيرة فى الخارج . ولذلك نحن ندخل خطأ صغيرا عندما نهمل تيار الازاحة على كل تلك الأسطح التى لاتمر بين اللوحين .

تيار الازاحة مرتبط بمجالات كهربية متغيرة مع الزمن ، ولذلك يوجد فى كل الموصلات غير التامة الحاملة لتيار توصيل متغير مع الزمن . الجزء الأخير من التمرين التدريبى الآتى بعد يبين السبب لماذا لم يكتشف هذا التيار الاضافى ابدا تجريبيا . هذه المقارنة موضحة أكثر فى قسم ١١ ـ ٣ .

ت ١٠ ـ ٣ : أوجد كثافة تيار الازاحة : (أ) بجوار مذياعك ، فى الهواء حيث تعطى محطة FM المحلية حاملة لها

$$\mathbf{H} = 0.2 \cos [2.10(3 \times 10^8 t - x)]\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

(ب) فى الفراغ الهوائى داخل محول توزيع قدره كبيرة حيث

$$\mathbf{B} = 1.1 \cos [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - y)]\mathbf{a}_x \text{ Wb/m}^2$$

(جـ) داخل مكثف قدرة مملوء بالزيت كبير حيث $\epsilon_R = 6$ و

$$\mathbf{E} = 100 \sin [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - 2.45z)]\mathbf{a}_x \text{ kV/m}$$

(د) فى موصل معدنى نموذجى عند 60HZ حيث $\epsilon = \epsilon_0 , \sigma = 5 \times 10^7$ /m

$$\mathbf{J} = 10^6 \sin [117.1(3.22t - z)]\mathbf{a}_x \text{ A/m}^2.$$

الاجابة :

$$-0.42 \sin [2.10(3 \times 10^8 t - x)]\mathbf{a}_y \text{ A/m}^2;$$
$$-1.1 \sin [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - y)]\mathbf{a}_z \text{ A/m}^2;$$
$$2.00 \cos [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - 2.45z)]\mathbf{a}_x \text{ mA/m}^2;$$
$$66.8 \cos [117.1(3.22t - z)]\mathbf{a}_x \text{ pA/m}^2$$

١٠ ـ ٣ : معادلات ماكسويل فى الصورة النقطية

قد حصلنا فعلا على اثنتين من معادلات ماكسويل للمجالات المتغيرة مع الزمن ،

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (٢٠)$$

و

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (٢١)$$

المعادلتان الباقيتان غير متغيرتين عن صورتيهما غير المتغيرة مع الزمن :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (٢٢)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (٢٣)$$

تنص معادلة (٢٢) أساسا على أن كثافة شحنة هى منبع (أو بالوعة) لخطوط تدفق كهربى . لاحظ أنه لم يعد نستطيع القول بأن كل تدفق كهربى يبدأ وينتهى على شحنة ، لأن الصورة النقطية لقانون فاراداى (٢٠) تبين أن E ، وعلى ذلك D ، قد يكون لها دوران إذا وجد مجال مغناطيسى متغير . على ذلك قد تكون خطوط التدفق الكهربى عروات مغلقة . مع ذلك ، العكس مازال صحيحا ، وكل كولوم من شحنة يجب أن يكون له كولوم واحد من تدفق كهربى منفرج منه .

معادلة (٢٣) تعترف مرة أخرى بالحقيقة أن « شحنات مغناطيسية » ، أوثنائيات قطب ، غير معروف أنها توجد . التدفق المغناطيسى يوجد دائما فى عروات مغلقة ولاينفرج أبدا من منبع نقطى .

هذه المعادلات الأربعة تكون الأساس لكل النظرية الكهرومغناطيسية . وهى معادلات تفاضلية جزئية وتربط المجالات الكهربية والمغناطيسية ببعضها وبمنابعها ، الشحنة وكثافة التيار . المعادلات الاضافية التى تربط D و E ،

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (٢٤)$$

التى تربط B و H ،

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (٢٥)$$

التى تعرف كثافة تيار التوصيل ،

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \qquad (٢٦)$$

والتى تعرف كثافة تيار حمل بدلالة كثافة الشحنة الحجمية ρ ،

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}} \qquad (٢٧)$$

مطلوبة أيضا لتعرف وتربط الكميات التى تظهر فى معادلات ماكسويل .

الجهود V و $\mathbf{A}$ لم يتضمنا آنفا لأنهما ليسا ضروريان حتما ، مع أنهما مفيدين للغاية . وسيناقشان عند نهاية هذا الفصل .

اذا لم يكن لدينا موادا « لطيفة » لنتعامل معها ، حينئذ يجب أن نستبدل (٢٤) و (٢٥) بالعلاقات المشتملة على مجالات الاستقطاب والتمغنط ،

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \qquad (٢٨)$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})} \qquad (٢٩)$$

للمواد الخطية يمكن أن نربط p بـ E

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \qquad (٣٠)$$

و M بـ H

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad (٣١)$$

أخيراً ، بسبب أهميتها الأساسية يجب أن نضمن معادلة لورنز للقوة ، مكتوبة فى الصورة النقطية كالقوة لكل وحدة حجوم ،

$$\boxed{\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \qquad (٣٢)$$

الفصول التالية مخصصة لتطبيق معادلات ماكسويل على مسائل بسيطة عديدة .

ت ١٠ ـ ٤ إذا كانت $\sigma = 0$, $\epsilon = 2.5\epsilon_0$ و $\mu = 10\mu_0$ ، حدد ما اذا كانت أزواج المجالات التالية تحقق معادلات ماكسويل أم لا : (أ) $\mathbf{E} = 2y\, \mathbf{a}_y$ و $\mathbf{H} = 5x\, \mathbf{a}_x$ ،
(ب) $\mathbf{E} = 100 \sin 6 \times 10^7 t \sin z\, \mathbf{a}_y, \mathbf{H} = -0.1328 \cos 6 \times 10^7 t \cos z\, \mathbf{a}_x$ ،
(جـ) $\mathbf{D} = (z + 6 \times 10^7 t)\mathbf{a}_x, \mathbf{B} = (-754z - 4.52 \times 10^{10} t)\mathbf{a}_y$
الاجابة : لا ، نعم ، نعم .

١٠ ـ ٤ : معادلات ماكسويل فى الصورة التكاملية

التعرف على الصورة التكاملية لمعادلات ماكسويل يكون عادة أسهل بدلالة القوانين التجريبية التى منها تم الحصول على هذه المعادلات بعملية تعميم . التجارب يجب أن تعامل كميات ماكروسكوبية فيزيائية ، ولذلك نتائجها يعبر عنها بدلالة علاقات تكاملية . معادلة تفاضلية دائما تمثل نظرية . دعنا الآن نجمع الصور التكاملية لمعادلات ماكسويل بالقسم السابق .

بتكامل (٢٠) على سطح وتطبيق نظرية ستوكس ، نحصل على قانون فاراداى ،

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{٣٣}$$

وتطبيق نفس العملية على (٢١) يعطى قانون أمبير الدائرى ،

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{٣٤}$$

قانونى جاوس للمجالات الكهربية والمغناطيسية يحصل عليها بتكامل (٢٢) و (٢٣) فى كل نقط حجم واستخدام نظرية الانفراج :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho \, dv \tag{٣٥}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{٣٦}$$

هذه المعادلات الأربعة تمكننا أن نجد شروط الحدود على H , d , B و E الضرورية لتعيين قيم الثوابت التى يحصل عليها فى حل معادلات ماكسويل فى صورة تفاضل جزئى . شروط الحدود هذه لاتتغير عامة من صورها لمجالات استاتيكية أو ثابتة ، ونفس الطرق يمكن استخدامها للحصول عليها . بين أى وسطين فيزيائيين حقيقيين (حيث K يجب أن تكون صفرا على سطح الحدود) ، تمكننا (٣٣) أن نربط مركبات المجال E المماسة ،

$$E_{t1} = E_{t2} \tag{٣٧}$$

ومن (٣٤)

$$H_{t1} = H_{t2} \tag{٣٨}$$

التكاملات السطحية تنتج شروط الحدود على المركبات العمودية ،

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \tag{٣٩}$$

و

$$B_{n1} = B_{n2} \tag{٤٠}$$

غالباً من المرغوب فيه أن نحيل مسألة فيزيائية الى المثالية بفرض موصل تام له **σ** لانهائية ولكن **J** محدودة . حينئذ من قانون أوم فى موصل تام ،

$$\mathbf{E} = 0$$

ويتبع من الصورة النقطية لقانون فاراداى أن

$$\mathbf{H} = 0$$

للمجالات المتغيرة مع الزمن . الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى تبين حينئذ أن القيمة المحدودة لـ **J** هى

$$\mathbf{J} = 0$$

ويجب أن يحمل التيار على سطح الموصل كتيار سطحى **K** . على ذلك ، اذا كانت المنطقة 2 موصلا تاما ، تصبح (٣٧) الى (٤٠) ، بالترتيب ،

$$E_{t1} = 0 \tag{٤١}$$

$$H_{t1} = K \tag{٤٢}$$

$$D_{n1} = \rho_S \tag{٤٣}$$

$$B_{n1} = 0 \tag{٤٤}$$

لاحظ أن كثافة الشحنة السطحية تعتبر إمكانية فيزيائية لكلا من العوازل ، والموصلات التامة ، أو الموصلات غير التامة ، ولكن كثافة التيار السطحى تفرض فقط مقترنة بموصلات تامة .

شروط الحدود المصاغة آنفا جزء ضرورى جدا من معادلات ماكسويل . كل المسائل الفيزيائية الحقيقية لها حدود وتتطلب الحل لمعادلات ماكسويل فى منطقتين أو أكثر ومواءمة هذه الحلول عند الحدود . فى حالة موصلات تامة ، حل المعادلات فى الموصل لايعطى شيئا ذا أهمية (كل المجالات المتغيرة مع الزمن صفراً) ، ولكن تطبيق شروط الحدود (٤١) الى (٤٤) قد يكون صعبا جدا .

بعض خواص أساسية لانتشار الموجات تكون واضحة عندما تحل معادلات ماكسويل فى منطقة غير محدودة . هذه المسألة معالجة فى الفصل التالى . وهى تمثل أبسط تطبيق لمعادلات ماكسويل ، لأنها المسألة الوحيدة التى لاتتطلب تطبيق أى شروط حدود .

ت ١٠ ـ ٥ : وحدة المتجه $0.48\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y + 0.64\mathbf{a}_z$ موجهة من المنطقة $(\sigma_2 = 0\,,\ \mu_{R2} = 2\,,\ \epsilon_{R2} = 2.5)$ نحو المنطقة
$1\ (\sigma_1 = 0\,,\ \mu_{R1} = 10\,,\ \epsilon_{R1} = 4)$. سطح الحدود لايحمل كثافة شحنة سطحية . اذا كانت $\mathbf{E}_1 = (-100\mathbf{a}_x - 50\mathbf{a}_y + 200\mathbf{a}_z)\sin 400t$ عند نقطة P فى منطقة 1 مجاورة للحد ، فاوجد اتساع : (أ) E_{t1} ، (ب) E_{n2} ، (جـ) $\mathbf{E}_1$.

الاجابة : 201V/m , 176.0V/m , 267V/m .

ت ١٠ ـ ٦ : مستويان موصلان تامان يقعان عند $y = 2$m و $y = 2.1$m . بينهما مادة لها $\sigma = 0$ و $\mu_R = 1\ ;\ \epsilon_R = 9$ ، إذا كانت $\mathbf{E} = 200\cos(10^8 t - z)\mathbf{a}_y$ V/m بين المستويين ، أوجد :
(أ) $|\mathbf{H}|$ عند $(5, 2.06, 1.1,\ t = 2\text{ns})$ ، (ب) $|\mathbf{K}|$ عند $(0.7, 2, 0,\ t = 0)$.

الاجابة : 0.989A/m , 1.592A/m .

١٠ ـ ٥ : الجهود المُؤخرة

الجهود المتغيرة مع الزمن ، تسمى عادة جهود مؤخرة لسبب سنراه قريبا ، تجد أعظم تطبيقاتها فى مسائل الاشعاع التى فيها توزيع المنبع معروف تقريبا . يجب أن نتذكر ان الجهد الكهربى المقياسى V يمكن ان يعبر عنه بدلالة توزيع شحنة استاتيكية ،

$$V = \int_{vol} \frac{\rho\, dv}{4\pi\epsilon R} \qquad (\text{استاتيكى}) \qquad (٤٥)$$

والجهد المغناطيسى المتجه يمكن أن يوجد من توزيع تيار ثابت مع الزمن ،

$$\mathbf{A} = \int_{vol} \frac{\mu \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \quad (٤٦)$$

(تيار مستمر)

المعادلة التفاضلية المحققة بـ V ،

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (٤٧)$$

(استاتيكى)

و A،

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (٤٨)$$

(تيار مستمر)

يمكن أن يعتبرا على أنهما الصور النقطية للمعادلتين التكامليتين (٤٥) و (٤٦) ، بالترتيب .

بايجاد V و A يحصل حينئذ على المجالات الأساسية ببساطة باستخدام التدرج ،

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (٤٩)$$

(استاتيكى)

أو الالتواء ،

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (٥٠)$$

(تيار مستمر)

ونود الآن أن نُعرف جهوداً متغيرة مع الزمن مناسبة متوافقة مع التعبيرات الآنفة عندما يشتمل فقط على شحنات استاتيكية وتيارات مستمرة .

معادلة (٥٠) واضح أنها مازالت متوافقة مع معادلات ماكسويل . هذه المعادلات تنص على أن $\nabla . \mathbf{B} = 0$ ، وانفراج (٥٠) يؤدى الى انفراج الالتواء والذى يطابق الصفر . ولذلك دعنا نقبل مؤقتا (٥٠) على أنها متحققة لمجالات متغيرة مع الزمن ونوجه اهتمامنا لـ (٤٩) .

القصور فى (٤٩) واضح ، لأن تطبيق عملية الالتواء لكلا الطرفين والتعرف على أن الالتواء لتدرج يطابق الصفر تواجهنا بـ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. الصورة النقطية لقانون فارادای تنص على أن $\nabla \times \mathbf{E}$ لاتساوى صفرا عامة . دعنا نحاول عمل تحسين باضافة حد مجهول الى (٤٩) ،

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \mathbf{N}$$

بأخذ الالتواء،

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 + \nabla \times \mathbf{N}$$

باستخدام الصورة النقطية لقانون فارادای،

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

واستخدام (٥٠) ، يعطينا

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

أو

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ابسط حل لهذه المعادلة هو

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

وهذا يقودنا الى

$$\text{(٥١)} \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

مازال يجب أن نتحقق من (٥٠) و (٥١) بتعويضهما فى معادلتى ماكسويل الباقيتين :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

بعمل هذا ، نحصل على التعبيرات الأكثر تعقيدا

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \epsilon\left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

و

$$\epsilon\left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}\right) = \rho$$

أو

$$\text{(٥٢)} \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu\epsilon\left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

و

$$\text{(٥٣)} \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

ليس هناك عدم توافق ظاهر فى (٥٢) و (٥٣) . تحت ظروف استاتيكية أو تيار مستمر $\nabla.\mathbf{A} = 0$ ، وتؤول (٥٢) و (٥٣) الى (٤٨) و (٤٧) ، بالترتيب . ولذلك سنفرض أن الجهود المتغيرة مع الزمن يمكن أن تعرف بحيث أنه يمكن الحصول على B و E منها خلال (٥٠) و (٥١) . مع أن هاتين المعادلتين الأخيرتين لاتفى بتحديد A و V تماما . وهما يُمثلان شروطا ضرورية ولكن غير كافية . فرضنا الابتدائى كان فقط أن $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، ومتجه لايمكن أن يُعرف باعطاء التواءه وحده . افترض مثلا ، أن لدينا مجال جهد متجه بسيط جدا فيه A_y و A_z أصفار . مفكوك (٥٠) يؤدى الى

$$B_x = 0$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

ونرى أنه لاتوجد معلومات متاحة عن الطريقة التى تتغير بها A_x مع x . هذه المعلومات يمكن أن توجد إذا عرفنا أيضا قيمة انفراج A ، لأن فى مثالنا

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

أخيرا ، يجب أن نلاحظ أن معلوماتنا عن A معطاة فقط كمشتقات جزئية ، وأن حدا ثابتا فراغيا يمكن أن يضاف . فى كل المسائل الفيزيائية التى فيها تمتد منطقة الحل الى مالا نهاية ، هذا الحد الثابت يجب أن يكون صفرا ، لأنه لايمكن أن توجد مجالات عند مالانهاية .

بالتعميم من هذا المثال البسيط ، يمكننا القول أن مجالا متجها يعرف تماما عندما يُعطى كل من التوائه وانفراجه وعندما تعرف قيمته عند أى نقطة واحدة (بمافيها مالانهاية) . ولذلك لنا حرية تحديد انفراج A ونعمل هذا مع مراقبة (٥٢) و (٥٣) ، باحثين عن أبسط التعبيرات . نعرف

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (٥٤)$$

وتصبح (٥٢) و (٥٣)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \qquad (٥٥)$$

و

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad (٥٦)$$

هذه المعادلات مرتبطة بمعادلة الموجة ، التى ستناقش فى الفصل التالى . وهما يبديان تماثلا كبيرا ، ويجب أن نكون مغتبطين بشدة بتعريفنا لـ V و $\mathbf{A}$ ،

(٥٠) $$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

(٥٤) $$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

(٥١) $$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

والتكاملات المكافئة لـ (٤٥) و (٤٦) للجهود المتغيرة مع الزمن تتبع من التعاريف (٥٠) ، (٥١) ، و (٥٤) ، ولكننا سنعطى فقط النتائج النهائية ونشير الى طبيعتها العامة . فى الفصل التالى ستقدم دراسة الموجة المستوية المنتظمة مفهوم الانتشار ، التى فيها أى اضطراب كهرومغناطيسى يتضح أنه ينتقل بسرعة

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

خلال أى وسط متجانس موصوف بـ μ و ϵ . فى حالة فضاء حر يتضح أن هذه السرعة هى سرعة الضوء ، تقريبا 3×10^8 m/s . من المنطقى ، حينئذ ، أن نشك أن الجهد عند أى نقطة ليس نتيجة قيمة كثافة الشحنة عند نقطة ما بعيدة عند نفس اللحظة ، ولكن لقيمتها عند زمن ما سابق ، لأن التأثير ينتشر بسرعة محدودة . على ذلك تصبح (٤٥)

(٥٧) $$\boxed{V = \int_{\text{vol}} \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon R}\, dv}$$

حيث تشير $[\rho]$ الى أنه قد استبدل بكل t ظاهرة فى تعبير ρ زمن مؤخر ،

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

على ذلك ، اذا أعطيت كثافة الشحنة فى كل مواضع الفراغ بـ

$$\rho = e^{-r} \cos \omega t$$

فان

$$[\rho] = e^{-r} \cos \left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)\right]$$

حيث R هى المسافة بين عنصر الشحنة التفاضلى المعتبر والنقطة التى سيعين عندها الجهد .

الجهد المغناطيسى المؤخر يعطى بـ

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu[\mathbf{J}]}{4\pi R} dv \qquad (٥٨)$$

استخدام زمن مؤخر تسبب فى أن تعطى الجهود المتغيرة مع الزمن اسم الجهود المؤخرة . فى الفصل الثالث عشر سنطبق (٥٨) للحالة البسيطة لعنصر تيار تفاضلى فيه I دالة جيبية فى الزمن . تطبيقات بسيطة أخرى لـ (٥٨) معتبرة فى المسائل عند نهاية هذا الفصل .

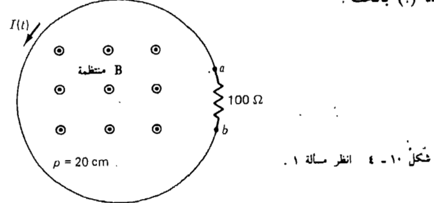
يمكننا تلخيص استخدام الجهود بالنص على أن معرفة توزيعات ρ و J فى كل مواضع الفراغ تمكننا نظريا أن نعين V و A من (٥٧) و (٥٨) . ويحصل حينئذ على المجالات الكهربية والمغناطيسية بتطبيق (٥٠) و (٥١) . اذا كانت توزيعات الشحنة والتيار غير معروفة ، أولا يمكن عمل تقريبات معقولة لها ، فهذه الجهود عادة لاتقدم طريقا اسهل فى اتجاه الحل عما يفعله التطبيق المباشر لمعادلات ماكسويل .

ت ١٠ ـ ٧ : شحنة نقطية ذات $2\cos 10^8 \pi t\ \mu$c تقع عند $(0,0,-1.5)$ ، بينما $-2\cos 10^8 \pi t \mu$c عند $(0,0,1.5)$ ، كلاهما فى فضاء حر . أوجد V عند : (أ) $(0,0,2,998.5)$ عند $t = 0$ ، (ب) $(0,0,2,999)$ عند $t = 0$ ، (جـ) نقطة على المحور x على بعد 2,998.5m من كل شحنة ، كدالة فى t .

الاجابة : 11.99V , 10.38V , OV .

مراجع مقترحة :

1 Bewley, L. V.: "Flux Linkages and Electromagnetic Induction," The Macmillan Company, New York, 1952.
هذا الكتاب الصغير يناقش عديدا من الأمثلة المتناقضة ظاهريا المشتملة على فولتيات مولدة (؟) بالحث .



شكل ١٠ ـ ٤ انظر مسألة ١ .

2 Faraday, M.: "Experimental Researches in Electricity," B. Quaritch, London, 1839, 1855.
قراءة شيقة جدا لبحث علمى مبكر . ومصدر أحدث ومتاح هو
Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 1952.

3 Halliday, D., and R. Resnick: "Physics," pt. II, 3d ed., John Wiley & Sons, New York, 1978.
هذا المرجع منتشر الاستخدام فى منهج المستوى الجامعى الأول فى الفيزياء . معظم رموزهما ومعادلاتهما هى نفس التى نستعملها .

4 Harman, W. W.: "Fundamentals of Electronic Motion," McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
التأثيرات النسبية مناقشة بطريقة واضحة وشيقة .

5 Langmuir, R. V.: "Electromagnetic Fields and Waves," McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
معادلات ماكسويل مستنبطة فى الفصل السادس .

6 Nussbaum, A.: "Electromagnetic Theory for Engineers and Scientists," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
انظر مثال المولد - الصاروخ الذى يبدأ على p .211

7 Owen, G. E.: "Electromagnetic Theory," Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.
قانون فارادای مناقش بدلالة مرجع الاسناد فى الفصل الثامن .

8 Panofsky, W. K. H., and M. Phillips: "Classical Electricity and Magnetism," 2d ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962.
النسبية معالجة على مستوى متوسط التقدم فى الفصل الخامس عشر .

مسائل

١ . دع الموصل الذى يصل بين نهايتى المقاومة بشكل ١٠ - ٤ يكون تاما ، ودع $B = 0.4\sin 120\pi t \text{Wb/m}^2$ ، يمكن فرض أن التدفق الناتج من تيار العروة نفسها مهمل . أى أن ، المحاثة الذاتية للدائرة مهملة . (أ) أوجد $V_{ba}(t)$ (ب) أوجد $I(t)$.

٢ - جوانب عروة مربعة فى المستوى $z = 0$ موضوعة عند $x = \pm 0.6\text{m}$ و $y = \pm 0.6\text{m}$. يوجد هناك مجال مغناطيسى متغير مع الزمن فى هذه المنطقة ، معطى بـ $\mathbf{B} = (0.2\mathbf{a}_x - 0.4\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z) \cos 2{,}000t \ \text{Wb/m}^2$ اذا كانت المقاومة الكلية للحلقة هى $1\text{k}\Omega$ ماهو التيار الموجود فى اتجاه عقرب الساعة (كما يرى من المحور z الموجب) ؟ يمكن فرض أن التدفق الناتج من تيار العروة نفسها مهمل . أى أن ، المحاثة الذاتية للعروة يمكن أن تهمل .

٣ ـ اذا كانت $\mathbf{B} = 2\cos(3 \times 10^8 \pi t - \pi y)\, \mathbf{a}_z\ \mu\text{Wb/m}^2$
أوجد الـ ق د ك $V(t)$ المنتجة فى الاتجاه $\mathbf{a}_\phi$ العام حول المسار المغلق :
(أ) $(0,0,0)$ الى $(1,0,0)$ الى $(1,1,0)$ الى $(0,1,0)$ الى $(0,0,0)$ ،
(ب) $(0,0,0)$ الى $1,0,0)$ الى $(1,2,0)$ الى $(0,2,0)$ الى $(0,0,0)$.

٤ ـ خط نقل محورى ذو أسطح موصلة عند $\rho = 1\text{mm}$ ، $\rho = 5\text{mm}$ و $z = 0$ ، مملوء بالهواء ويحتوى المجال $\mathbf{H} = (0.031/\rho)\cos 6 \times 10^7 \pi t \cos 0.2\pi z\, \mathbf{a}_\phi$ A/m .
(أ) أوجد الـ ق د ك المولدة حول مسار ممتد من $(10^{-3}, 0^\circ, 0)$ الى : $(5 \times 10^{-3}, 0^\circ, 0)$ الى $(5 \times 10^{-3}, 0^\circ, -2)$ الى $(10^{-3}, 0^\circ, -2)$ الى $(10^{-3}, 0^\circ, 0)$.
(ب) على طول أى أقسام من هذا المسار يجب أن يكون $\int \mathbf{E}.d\mathbf{L}$ صفرا ؟

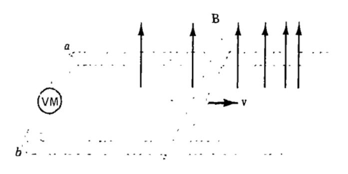
٥ ـ عروة موصلة فى المستوى $z = 0$ محدودة بـ $x = 0$ و $x = 0.2\text{m}$ و $y = 0$ و $y = 0.3\text{m}$ عند $t = 0$. العروة متحركة فى اتجاه $\mathbf{a}_x$ بسرعة منتظمة ذات 6m/s . العروة تحتوى على مقاومة صغيرة جدا ، $R = 20\Omega$. مجال مغناطيسى غير منتظم ثابت مع الزمن فى هذه المنطقة يمكن أن يمثل بـ $\mathbf{B} = 2x^2 y \mathbf{a}_z \text{Wb/m}^2$. ارسم منحنى تخطيطيا مبينا القدرة المعطاة لـ R كدالة فى الزمن ، $0 \leqslant t \leqslant 100\text{ms}$.

٦ ـ القضيبان فى شكل ١٠ ـ ٥ يفصلهما 5cm ويمتدان مسافة 2.4m من الفولتمتر . اذا كانت $\mathbf{B} = 0.4x\mathbf{a}_z\ \text{wb/m}^2$ وموضع القضيب المنزلق معطى بـ $x = 5.4t - t^2$ meters : (أ) أوجد V_{ab} عندما يكون القضيب عند $x = 1\text{m}$ ، (ب) ارسم V_{ab} تخطيطيا مع t .

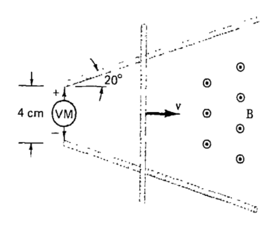
٧ ـ فى شكل ١٠ ـ ٦ ، دع $B = 0.4\text{Wb/m}^2$ خارجا من الورقة ، و $v = 8\text{m/s}$.
(أ) أوجد قراءة الفولتمتر كدالة فى الزمن اذا كانت $x = 0$ عند $t = 0$.
(ب) أعد اذا أعطى موضع القضّيب المنزلق بـ $x = 300t^2$ meters .

٨ ـ القضيبان فى شكل ١٠ ـ ٧ كلامنهما له مقاومة مقدارها $2\Omega/\text{m}$. يتحرك القضيب بسرعة ثابتة مقدارها 10m/s فى مجال مغناطيسى منتظم مقداره 0.7wb/m^2 . أوجد I كدالة فى T اذا ترك القضيب الطرف الأيسر عند $t = 0$.

٩ ـ المنطقة بين القضيبين فى شكل ١٠ ـ ٨ تحتوى مجالا منتظما $B = 0.15\text{Wb/m}^2$. القضيب المنزلق يتحرك الى اليمين بسرعة ثابتة 8m/s ويحتوى على فولتمتر ذى مقاومة عالية ، ولكن ليست لانهائية . أوجد قراءة الفولتمتر عندما يكون القضيب عند $x = 5\text{m}$ اذا : (أ) ترك القضيبان مفتوحا ـ الدائرة عند $x = 0$ و $x = 10$ كما هو مبين ، (ب) النهاية عند $x = 0$ مقصرة الدائرة (جـ) النهاية عند $x = 10$ مقصرة الدائرة ؛ (د) كلا النهايتين مقصرة الدائرة



شكل ١٠ ـ ٥ انظر مسألة ٦ .

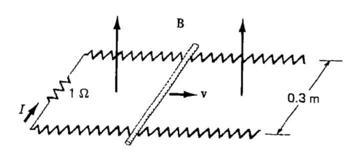


شكل ١٠ ـ ٦ : انظر مسألة ٧ .

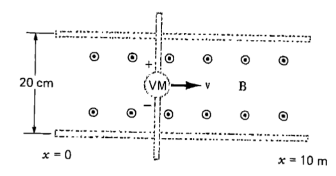
١٠ ـ القضيبان فى شكل ١٠ ـ ١ مبتعدان مسافة 24cm
و $\mathbf{B} = 0.3 \cos 120\pi t\, \mathbf{a}_z\ \text{Wb/m}^2$ اذا كانت $y' = 0$ عند
$t = 0$ ، أوجد V_{12} عند $t = 2\text{ms}$ لـ : (أ) $V = 12\mathbf{a}_y$ m/s
(ب) $V = 12\cos 10\pi t\mathbf{a}_y$ m/s .

١١ ـ احسب نسبة اتساعات كثافة تيار التوصيل الى كثافة تيار الازاحة للمجال الكهربى
فى : $E = E_0 \cos wt\,\text{V/m}$
(أ) النحاس $\sigma = 5.8 \times 10^7\ \mho/\text{m}$ و $\epsilon = \epsilon_0$, $\omega = 1{,}000\text{rad/s}$ ،
(ب) ماء مقطر $\sigma = 2 \times 10^{-4}\ \mho/\text{m}$ و $\epsilon_R = 80\omega = 1{,}000\text{rad/S}$ ؛
(جـ) بوليسترين ، $\sigma = 10^{-16}\ \mho/\text{m}$, $\epsilon_R = 2.53$, $\omega = 1{,}000\text{rad/S}$.

١٢ ـ منبع فولتيه $V_0 \sin wt$ موصل بين كرتين موصلتين متحدى المركز ، $r = a$
و $r = b$, $b > a$ ، حيث الحيز بينهما هو مادة لها $\epsilon = \epsilon_R\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$
و $\sigma = 0$. أوجد تيار الازاحة الكلى خلال العازل وقارنه بتيار المنبع كما يعين من
السعة (قسم ٥ ـ ١٠) وطرق تحليل الدائرة .



شكل ١٠ ـ ٧ . انظر مسالة ٨ .



شكل ١٠ ـ ٨ انظر مسالة ٩ .

١٣ ـ كثافة تيار الازاحة $2\cos(wt - 5z)\mathbf{a}_z\ \mu\ \text{A/m}^2$ فى مادة لها $\sigma = 0$, $\epsilon = 4\epsilon_0$ و $\mu = 5\mu_0$. (أ) استخدم تعريف كثافة تيار الازاحة لايجاد D و E . (ب) استخدم الان الصورة النقطية لقانون فارادای ، وتكاملا زمنيا لايجاد B و H . (جـ) أخيرا ، استخدم الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى لايجاد كثافة تيار الازاحة . كم يجب أن تكون w ؟

١٤ ـ مادة لها $\epsilon_R = 1.5$ و $\mu_R = 1$ لها موصلية σ . دع $\mathbf{E} = 60\cos 10^5 t\mathbf{a}_x$ V/m . أوجد : (أ) $\mathbf{J}_c$ ، (ب) $\mathbf{J}_d$ ، (جـ) الموصلية التى بها كثافة تيار الازاحة وكثافة تيار التوصيل يكون لها اتساعان متساويان .

١٥ ـ إذا كانت $\mathbf{E} = 200e^{4x - kt}\mathbf{a}_y$V/m فى فضاء حر ، استخدم معادلات ماكسويل لايجاد k و H ، علما بأن كل المجالات تتغير مع الزمن بالصورة e^{-kt} .

١٦ ـ خط نقل محورى له نصف قطر داخلى $a = 1$m ، نصف قطر خارجى $b = 4$mm ، وعازل متجانس فيه $\mu_R = 1$, $\epsilon_R = 2.25$ و $\sigma = 0$ شدة المجال الكهربى هى $\mathbf{E} = (100/\rho)\cos(10^8 t - \beta z)\,\mathbf{a}_\rho$ V/m.

(أ) استخدم معادلات الالتواء لماكسويل لايجاد β . (ب) أوجد H . (جـ) عين كثافة الشحنة السطحية على الموصل الداخلى كدالة فى ϕ , z و t .

(د) احسب اتساع تيار الازاحة الكلى فى الطول $0 \leqslant z \leqslant 1$m .

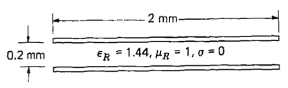
١٧ ـ المجال المغناطيسى بالقرب من موتور مجفف شعر يتغير جيبيا مع تردد مقداره 60Hz . (أ) بين أن التعبير البسيط $\mathrm{B} = \cos 2\pi 60t\,\mathrm{a}_x$ Wb/m^2 لايحقق معادلات ماكسويل فى الهواء . (ب) اوجد قيمة k التى تجعل $\mathrm{B} = \cos(2\pi\, 60t - k_y)\mathrm{a}_x$ تحقق معادلات ماكسويل .

١٨ ـ مجال كهربى فى فضاء حر معطى فى احداثيات كروية بالصورة $\mathrm{E} = (0.1/r)\sin\theta\sin(15\times 10^8 t - 5r)\mathbf{a}_\theta$ V/m . أوجد H اذا فرض أن كل المجالات تتغير جيبيا مع الزمن بنفس التردد .

١٩ ـ شدة المجال الكهربى عند نقطة الأصل هى $2\mathrm{a}_x - 10\mathrm{a}_y + 3\mathrm{a}_z$ V/m عند $t = 0$.

(أ) اذا وقعت نقطة الأصل على سطح تام التوصيل بينما المادة المتاخمة لنقطة الأصل لها $\epsilon_R = 10$, $\mu_R = 2$ و $\sigma = 0$ أوجد مقدار كثافة الشحنة السطحية عند نقطة الأصل عند $t = 0$. (ب) اذا كانت $\epsilon_R = 8$, $\mu_R = 3$ و $\sigma = 0$ لـ $x \leqslant 0$ ، بينما $\epsilon_R = 3$, $\mu_R = 8$ و $\sigma = 0$ لـ $x > 0$ ، أوجد $|\mathrm{E}|$ عند $t = 0$ عند النقطة $(0^+, 0,0)$.

٢٠ ـ فى القسم الأول من هذا الفصل ، استخدم قانون فاراداى ليبين أن المجال $\mathrm{E} = -1/2kB_0e^{kt}\mathrm{a}_\phi$ ينتج من المجال المغناطيسى المتغير $\mathrm{B} = B_0 e^{kt}\mathrm{a}_z$ (أ) بين أن هذه المجالات لاتحقق معادلة الالتواء الأخرى لماكسويل . (ب) اذا جعلنا $B_0 = 1$Wb/m^2 و $k = 10^6\, s^{-1}$ فنحن ننشىء كثافة تدفق مغناطيسى كبيرة لحد ما فى $1\,\mu$s . استخدم معادلة الـ $\nabla \times \mathrm{H}$ لتبين أن المعدل التى يجب (ولكن لاتفعل) أن تتغير به B_z مع ρ هو حوالى 5×10^{-6} Wb/m^2 per meter فقط فى فضاء حر عند $t = 0$.



شكل ١٠ - ٩ أنظر مسألة ٨ .

٢١ ـ دع $\epsilon_{R1} = 1$, $\mu_{R1} = 1$ ، و $\sigma_1 = 0$ فى منطقة 1 $(z < 0)$ ، بينما $\mu_{R2} = 20$, $\epsilon_{R2} = 5$ و $\sigma_2 = 0$ فى منطقة 2 $(z > 0)$ شدة المجال الكهربى فى منطقة 1 هى $\mathrm{E}_1 = [60\cos(15\times 10^8 t - 5z) + 20\cos(15\times 10^8 t + 5z)]\mathbf{a}_x$ V/m . فى منطقة 2 ، $\mathrm{E}_2 = A\cos(15\times 10^8 t - 50z)\mathbf{a}_x$ V/m ،

(أ) أوجد A . (ب) أوجد H_1 . (جـ) أوجد H_2 . (د) بين أن H_1 و H_2 تحقق شروط الحدود الضرورية عند $z = 0$.

٢٢ - فى منطقة 1 , $x < 0$, $\epsilon_1 = 10^{-11}$F/m , $\mu_1 = 4 \times 10^{-6}$H/m ، و $\sigma_1 = 10^{-3}$ ℧/m ، بينما $\epsilon_2 = 2\,\epsilon_1$, $\mu_2 = \mu_1/2$ و $\sigma_2 = 4\sigma_1$ فى منطقة 2 , $x > 0$. من المعلوم أن $\mathbf{E}_1 = (10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 30\mathbf{a}_z)\cos 10^9 t$ V/m عند $P_1\ (0,0,0)$. (أ) أوجد $\mathbf{E}_{n1}$, $\mathbf{E}_{t1}$, $\mathbf{D}_{n1}$ و $\mathbf{D}_{t1}$ عند P_1 ، (ب) أوجد $\mathbf{J}_{n1}$ و $\mathbf{J}_{t1}$ عند P_1 . (جـ) أوجد $\mathbf{E}_{t2}$, $\mathbf{D}_{t2}$ ، و $\mathbf{J}_{t2}$ عند $P_2\ (0^+, 0, 0)$. (د) (أصعب) استخدم معادلة الاستمرارية لتساعد فى بيان أن $J_{n1} - J_{n2} = \partial D_{n2}/\partial t - \partial D_{n1}/\partial t$ ثم حدد $\mathbf{D}_{n2}$, $\mathbf{J}_{n2}$ و $\mathbf{E}_{n2}$.

٢٣ - أسطح تامة التوصيل تقع عند $\rho = 5$mm $\rho = 20mm$, $z = 0$ ، و $z = 50$cm فى احداثيات اسطوانية المنطقة المحصورة هى عازل مع $\mu_R = 1$, $\epsilon_R = 2.25$ و $\sigma = 0$. فى هذه المنطقة ، $\mathbf{H} = (2/\rho)\cos 2\pi z \cos 4\pi\, 10^8 t\ \mathbf{a}_\phi$ A/m.

(أ) أوجد كثافة التيار السطحية عند $\rho = 5$mm , $\phi = 0$, $z = 5$cm ،

(ب) أوجد $\mathbf{E}$.

(جـ) حدد كثافة الشحنة السطحية عند $\rho = 20$mm , $\phi = \pi/2$ و $z = 25$cm

(د) احسب كثافة تيار الازاحة عند $\rho = 10$mm , $\Phi = 0.2\pi$, $z = 25$cm .

٢٤ - فتيلة موصلة تمتد من $z = -5$m الى $z = 5$m على المحور z فى فضاء حر وتحمل تيارا $I = 4t$A فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. أوجد وارسم تخطيطيا $\mathbf{A}(t)$ عند $(0,0,10)$ لـ $-0.1 \leqslant t \leqslant 0.1\mu$s .

٢٥ - شدة المجال الكهربى داخل خط النقل الشريطى الدقيق المبين فى شكل ١٠ - ٩ يمكن أن يفترض أنها $\mathbf{E} = -10^5 \cos(10^9 t - 4z)\mathbf{a}_y$ V/m.

(أ) أوجد $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ اذا كانت $\mathbf{A}(x,0,z,t) = 0$.

(ب) أوجد $V(x,y,z,t)$ اذا كانت $V(x,0,z,t)$.

٢٦ - إذا أعطيت الجهود المؤخرة ، $V = x - ct$ و $\mathbf{A} = (x/c - t)\mathbf{a}_x$ حيث $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$: (أ) بين أن $\nabla.\mathbf{A} = -\mu\epsilon\, \partial V/\partial t$ ، (ب) أوجد $\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{D}$ (جـ) بين أن هذه النتائج تحقق معادلات ماكسويل فى فضاء حر .

الفصل الحادى عشر

الموجة المستوية المنتظمة

فى هذا الفصل سنطبق معادلات ماكسويل لتقديم النظرية الأساسية للحركة الموجبة . الموجة المستوية المنتظمة تمثل واحدة من أبسط تطبيقات معادلات ماكسويل ، ومع ذلك توضح الأساسيات وراء انتشار الطاقة . سنقدم سرعة الانتشار ، طول الموجه ، معاوقة الموجة ، ثوابت الطور والتوهين . واستخدام نظرية بوينتنج فى ايجاد كثافة القدرة . أخيرا ، سنعتبر ارتداد ونفاذ موجة مستوية منتظمة عند الحدود بين وسطين مختلفين . استخدام نسبة الموجة الواقفة ومعاوقة الدخل سيعدنا لاعتبار عديد من المسائل العملية للنقل الموجه للقدرة والمعلومات فى الفصل التالى .

١١ - ١ : الحركة الموجية فى الفضاء الحر

كما أشرنا فى مناقشتنا لشروط الحدود فى الفصل السابق ، حل معادلات ماكسويل بدون تطبيق أى شروط حدود اطلاقا يمثل نوعا خاصا جدا من المسائل . مع أننا نقصر اهتمامنا على حل فى احداثيات كرتيزية ، فرغم ذلك يظهر أننا نحل مسائل مختلفة عديدة حينما نعتبر حالات خاصة مختلفة فى هذا الفصل . يُحصل على الحلول أولا فى حالات فضاء حر ، ثم لعوازل تامة ، يلى ذلك لعوازل فاقدة ، وأخيرا للموصل الجيد . نعمل هذا لنستعمل التقريبات التى يمكن تطبيقها لكل حالة خاصة ولنؤكد الصفات المميزة الخاصة لانتشار الموجة فى هذه الأوساط ، ولكنه ليس ضروريا أن نستخدم معالجة منفصلة ، من الممكن (وليس صعبا جدا) حل المسألة العامة مرة بلارجعة . مناقشتنا للانتشار فى العازل ذى فقد تبدأ باعتبار الحالة العامة ، ولكن سنُبسط حينئذ التحليل بحصر اهتمامنا على عوازل ذات فقد صغير نسبيا .

لاعتبار الحركة الموجية فى فضاء حر أولا ، يمكن كتابة معادلات ماكسويل بدلالة E و H فقط بالصورة

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (١)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad (٢)$$

(٣) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

(٤) $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

الان دعنا نرى ما إذا كان ممكنا استنتاج الحركة الموجبة من هذه المعادلات الأربعة بدون حلها فعلا ، المعادلة الأولى تنص على أنه اذا كانت E متغيرة مع الزمن عند نقطة ما ، فان H لها التواء عند تلك النقطة ، وعلى ذلك يمكن أن تعتبر مكونة لعروة مغلقة صغيرة مرتبطة بالمجال E المتغير . أيضا إذا كانت E متغيرة مع الزمن ، فان H ستتغير عامة أيضا مع الزمن ، مع أنه ليس بالضرورة بنفس الطريقة . بعد ذلك ، نرى من المعادلة الثانية أن هذه الـ H المتغيرة تنتج مجالا كهربيا الذى يكون عروة مغلقة صغيرة حول خطوط H . لدينا الان مرة أخرى مجال كهربى متغير ، وهو فرضنا الأصلى ، ولكن هذا المجال موجود على مسافة صغيرة بعيدا عن نقطة الاضطراب الأصلى . قد نخمن (صحيحا) أن السرعة التى يتحرك بها التأثير بعيدا عن النقطة الأصلية هى سرعة الضوء ، ولكن هذا يجب أن يحقق بفحص كمى اكثر لمعادلات ماكسويل .

دعنا أولا نكتب معادلات ماكسويل الأربعة الآنفة للحالة الخاصة للتغير الجيبى (أكثر دقة ، جيبى التمام) مع الزمن .
يتحقق هذا بواسطة التدوين المركب والمطاورات . نفرض أن مركبة ما ، مثل E_x ، معطاة بالصورة

(٥) $E_x = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)$

حيث E_{xyz} دالة حقيقية فى x , y , z وربما ω ، ولكن ليس فى الزمن ، و ψ هى زاوية طور التى يمكن أن تكون أيضا دالة فى x , y , z و w . باستخدام متطابقة أويلر ،

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

ندع

(٦) $E_x = \text{Re}\, E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} = \text{Re}\, E_{xyz} e^{j\psi} e^{j\omega t}$

حيث يعنى Re أن يؤخذ الجزء الحقيقى للكمية التالية . اذا بسطنا حينئذ المصطلحات باسقاط R_e وحذف $e^{j\omega t}$ ، تصبح كمية المجال E_x مطاور أو كمية مركبة ، التى نميزها باستخدام رمز سفلى s , E_{xs} . على ذلك

(٧) $E_{xs} = E_{xyz} e^{j\psi}$

الـ s يمكن التفكير فيها كمشيرة لكمية مجال تردد معبر عنها كدالة فى التردد المركب s ، مع أننا سنعتبر فقط تلك الحالات التى فيها s تخيلية صرفة ، $s = j\omega$.

مثلا ، دعنا نأخذ $E_y = 100 \cos (10^8 t - 0.5z)$ V/m

ونعبر عنها كمطاور . نلجأ أولا للتدوين الأسى ،

$$E_y = \mathrm{Re}[100 e^{j(10^8 t - 0.5z)}]$$

ثم نسقط R_e ونحذف $e^{j10^8 t}$ ، حاصلين على المطاور ،

$$E_{ys} = 100 e^{-j0.5z}$$

لاحظ أن E_y حقيقية ، ولكن E_{ys} عامة مركبة .

إذا أعطيت مطاورا ، فيمكن دائما الحصول على الكمية الحقيقية المقابلة بالضرب فى $e^{j\omega t}$ وأخذ الجزء الحقيقى للتعبير المحصل .

الآن ، لأن

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[E_{xyz} \cos (\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin (\omega t + \psi)$$

$$= \mathrm{Re}\, j\omega E_{xs} e^{j\omega t}$$

من الواضح أن أخذ المشتقة الجزئية لأى كمية مجال بالنسبة للزمن تكافىء ضرب المطاور المقابل فى $j\omega$.

كمثال ، اذا كانت

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

تكون معادلة المطاور المقابلة

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_{ys}}{\partial z}$$

حيث يمكن أن يكون كلا من E_{xs} و E_{ys} كميات مركبة .

التعبير عن متجه كمطاور ليس أكثر تعقيدا من التعبير عن مركبة مفردة كمطاور . على ذلك ، اذا أعطيت معادلات ماكسويل ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

تكون العلاقة المقابلة بدلالة متجهات ـ مطاور هى

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_s \qquad (٨)$$

معادلة (٨) والمعادلات الثلاثة

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s \qquad (٩)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \qquad (١٠)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0 \qquad (١١)$$

هى معادلات ماكسويل الأربعة بتدوين مطاور لتغير جيبى مع الزمن فى فضاء حر . يجب ملاحظة أن (١٠) و (١١) لم تعد ذات علاقتين غير مرتبطتين ، لأنهما يمكن أن يحصل عليهما بأخذ انفراج (٨) و (٩) ، بالترتيب .

خطوتنا التالية هى الحصول على صورة الحالة الثابتة الجيبية لمعادلة الموجة ، وهذه خطوة يمكننا حذفها لأن المسألة البسيطة التى سنحلها تعطى بسهولة الحل الآتى للمعادلات الأربعة الآنفة . كيفما كان ، معادلة الموجة هى معادلة هامة وهى نقطة بدء ملائمة لعديد من الاستقصاءات الأخرى .

الطريقة التى يحصل بها على بمعادلة الموجة يمكن انجازها فى سطر واحد (باستخدام أربع علامات تساوى على فرخ أعرض من الورق) :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s$$
$$= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_s = -\nabla^2 \mathbf{E}_s$$

لأن $\nabla . \mathbf{E}_s = 0$. على ذلك

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_s \qquad (١٢)$$

معادلة المتجه ـ المطاور الموجزة هذه معروفة أيضاً بمعادلة هلمهولتز المتجهة[1] . وهى

(١) هيرمان لدفيج فيرديناند فون هلمهولتز (1821 - 1894) كان أستاذا فى برلين يعمل فى مجالات الفسيولوجيا ، الديناميكا الكهربية ، والبصريات . هرتز كان أحد تلاميذه .

صعبة جدا عندما تفك ، حتى فى احداثيات كرتيزية ، لأن ثلاث معادلات مطاور مقياسية تنتج ، وكل له أربعة حدود . المركبة فى اتجاه x لـ (١٢) تصبح ، باستخدام التدوين بالعامل دل ،

$$\nabla^2 E_{xs} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs} \qquad (١٣)$$

وفك العامل يؤدى الى المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs} \qquad (١٤)$$

دعنا نحاول حلا لـ (١٤) بفرض أن حلا بسيطا يكون ممكنا لاتتغير فيه E_{xs} مع x أو y ، حتى تكون المشتقتين المقابلتين اصفارا ، مؤدية الى المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs} \qquad (١٥)$$

بالفحص ، يمكننا كتابة حل لـ (١٥) ،

$$E_{xs} = A e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\, z} \qquad (١٦)$$

أعد ادخال العامل $e^{j\omega t}$ ، وتختزل الى صورة مثلثية بأخذ الجزء الحقيقى ،

$$E_x = A \cos [\omega(t - z\sqrt{\mu_0\epsilon_0})]$$

حيث يمكن استبدال عامل الاتساع الاختيارى بـ E_{x0} ، قيمة E_x عند $t = 0 , z = 0$ ،

$$\boxed{E_x = E_{x0} \cos [\omega(t - z\sqrt{\mu_0\epsilon_0})]} \qquad (١٧)$$

مسالة ١ عند نهاية هذا الفصل تبين أن

$$\boxed{E'_x = E'_{x0} \cos [\omega(t + z\sqrt{\mu_0\epsilon_0})]} \qquad (١٨)$$

ويمكن أيضا الحصول عليها من حل بديل لمعادلة هلمهولتز المتجهة .

قبل أن نجد أى مركبات مجال أخرى ، يجب أن نفهم الطبيعة الفيزيائية للمركبة المفردة للمجال الكهربى التى قد حصلنا عليها فى معادلة (١٧) . نرى أنها مركبة فى اتجاه x ، التى يمكننا وصفها على أنها متجهة الى أعلى عند سطح ارض مستوية ، الجذر $\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ له القيمة التقريبية $1/(3 \times 10^8)$s/m ، التى هى مقلوب c ، سرعة الضوء فى فضاء خر ،

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \doteq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

دعنا أيضا نسمح للمحور z أن نشير للشرق ونأخذ $z = 0$ فى شيكاجو . فى شيكاجو ، حينئذ ، المجال معطى بـ

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t$$

التى هى تغير بسيط ومألوف مع الزمن . شحنة حرة (ربما فى هوائى استقبال رأسى) تعجل الى أعلى والى اسفل $\omega/2\pi$ من المرات كل ثانية . فى كليفلاند ، حوالى 500km شرقا ، سنجد

$$E_x = E_{x0} \cos \left[\omega \left(t - \frac{5 \times 10^5}{3 \times 10^8} \right) \right] = E_{x0} \cos [\omega(t - 0.001\ 67)]$$

مبينة أن قوة المجال فى كليفلاند مطابقة لتلك التى وجدت فى شيكاجو مبكر بـ 0.00167s . بصفة عامة ، يجب حينئذ أن نتوقع أن المجال عند أى نقطة على بعد z meters شرق شيكاجو يتأخر عن مجال المرجع بـ $z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ، أو $z/(3 \times 10^8)$s .

دعنا نغير نقطة اهتمامنا الآن ونفحص المجال فى كل مكان عند $t = 0$ ،

$$E_x = E_{x0} \cos (-\omega z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) = E_{x0} \cos \frac{\omega z}{c}$$

واجدين تغيراً دورياً مع المسافة .

مدة دورة هذه الموجة الجيب تمامية ، كما تقاس على المحور z تسمى طول الموجة λ ،

$$\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{f} \qquad \text{(free space)}$$

عند أى نقطة ، نجد تغيراً جيبياً مع الزمن له مدة دورة $T = 1/f$ ، عند أى زمن ، نجد تغيرا جيبيا مع المسافة ذى طول دورة λ ، عند كل نقطة وعند كل لحظة من الزمن ، E_x موجهة رأسيا . الآن دعنا نعتبر الاستجابة عندما يغير كلا من الزمن والموقع . بالتأكيد يمكننا القول أن E_x لا تتغير اذا كانت زاوية الطور $\omega(t - z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})$. غير متغيرة ، أو

$$\omega(t - z\sqrt{\mu_0\epsilon_0}) = \text{constant}$$

بأخذ التفاضلات ، يكون لدينا

$$\omega(dt - dz\sqrt{\mu_0\epsilon_0}) = 0$$

لذلك

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c} \quad (١٩)$$

هذه السرعة يطلق عليها سرعة طور ، لأنها تعرف نقطة ذات طور ثابت . هنا ، سرعة الطور تساوى سرعة الضوء c ، والمجال لذلك يتحرك فى اتجاه z بسرعة الضوءc . مهما تكن قيمة المجال لحظياً عند $z = z_1$, $t = t_1$ ، فإنها سيكون لها القيمة المطابقة عند z_2 عند زمن $(z_2 - z_1) / c$ فيما بعد ، سيكون لها أيضا القيمة المطابقة عند $t = t_2$ ، على مسافة $(t_2 - t_1)\, c$ أبعد إلى الشرق . المجال الكهربى فى حركة ويطلق عليه منطقياً موجة متنقلة .

معادلة (١٨) ، التى كانت أيضاً حلا لمعادلة موجتنا ، تمثل بوضوح موجة متنقلة فى اتجاهz — ، أو غربا . للتبسيط ، نعتبر فقط الموجة المتنقلة الموجبة .

دعنا الآن نعود لمعادلات ماكسويل ، (٨) إلى (١١) ، ونحدد صورة المجال $\mathbf{H}$. إذا أعطيت $\mathbf{E}_s$ ، فإن $\mathbf{H}_s$ يحصل عليها بأقصى سهولة من (٩) ،

$$(٩) \quad \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s$$

التى تبسط بشدة لمركبة E_{xs} مفردة تتغير فقط مع z ،

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

باستخدام (١٦) لـ E_{xs} مع $A = E_{x0}$ ، نحصل على

$$H_{ys} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} E_{x0}(-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0})e^{-j\omega z/c}$$

و

$$\boxed{H_y = E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]} \quad (٢٠)$$

ولذلك نجد أن هذه المركبة الرأسية لـ E المتنقلة إلى الشرق تتحقق بمجال مغناطيسى أفقى (شمال ـ جنوب) . علاوة على ذلك ، نسبة شدتى المجالين الكهربى والمغناطيسى ، المعطاة بنسبة (١٧) إلى (٢٠) ،

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (٢١)$$

ثابتة . باستخدام لغة نظرية الدوائر ، يمكننا القول أن E_x و H_y فى « طور واحد » ، ولكن علاقة الطور الواحد هذه تشير إلى الفراغ وكذلك إلى الزمن . نحن معتادون على التسليم بهذا فى مسألة دائرة فيها تيار $I_m \cos \omega t$ مفترض أن له أقصى اتساع I_m خلال كل أجزاء دائرة توال عند $t = 0$. كل من (١٧) و (٢٠) تبين بوضوح ، مع ذلك ، أن القيمة العظمى لأى من E_x أو H_y تحدث عندما يكون $\omega (t - z/c)$ مضاعفاً صحيحاً لـ 2π rad ، ولايكون أى من المجالين نهاية عظمى فى كل مكان عند نفس اللحظة . ممايستحق الملاحظة ، حينئذ ، أن نسبة هاتين المركبتين ، وكلاهما متغير فى الفراغ والزمن يجب أن تكون ثابتة فى كل مكان .

الجذر التربيعى لنسبة الانفاذية والسماحية يسمى **المعاوقة الذاتية** (إيتا) ، η

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (٢٢)$$

حيث η لها وحدات الأوم .

شكل ١١ ـ ١ : (أ) الأسهم تمثل القيم اللحظية $E_{x0} \cos [\omega(t - z/c)]$ عند $t = 0$ على المحور z ، على خط اختيارى فى المستوى $x = 0$ مواز للمحور z وعلى خط اختيارى فى المستوى $y = 0$ مواز للمحور z . (ب) القيم المقابلة لـ H_y مبينة . لاحظ أن E_x و H_y فى نفس الطور عند أى نقطة وعند أى زمن .

المعاوقة الذاتية لفضاء حر هى

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \doteq 120\pi \qquad \Omega$$

هذه الموجة تسمى موجة مستوية منتظمة لأن قيمتها منتظمة خلال أى مستوى ، $z =$ ثابت . وهى تمثل انسياب طاقة فى الاتجاه z الموجب . كل من المجالين الكهربى والمغناطيسى متعامد على اتجاه الانتشار ، أوكلاهما يقع فى مستوى مستعرض على اتجاه الانتشار ، الموجة المستوية المنتظمة هى موجة كهرومغناطيسية مستعرضة ، أو موجه ك م م TEM .

بعض الاحساس بالطريقة التى تتغير بها المجالات فى الفراغ يمكن أن يحصل عليه من شكلى ١١ ـ ١ أ أو ١١ ـ ١ب . شدة المجال الكهربى فى شكل ١١ ـ ١أ مبينة عند $t = 0$ ، وقيمة المجال اللحظية مرسومة على ثلاثة خطوط ، المحور z وخطوط اختيارية توازى المحورz فى المستويين $x = 0$ و $y = 0$. لأن المجال منتظم فى مستويات عمودية على المحور z ، فالتغير على طول الخطوط الثلاثة هو نفسه . دورة كاملة واحدة للتغير تحدث فى طول موجى λ . قيم H_y عند نفس الوقت والمواضع مبينة فى شكل ١١ ـ ١ب .

موجة مستوية منتظمة لايمكن أن توجد فيزيائيا ، لأنها تمتد الى مالانهاية فى بعدين على الأقل وتمثل قدرا لانهائيا من الطاقة . المجال البعيد لهوائى ارسال ، مع ذلك ، هو أساسا موجه مستوية منتظمة فى منطقة ما محدودة . وموجة تصل إلى هوائى استقبال فى كليفلاند من شيكاجو تحلل كموجة مستوية منتظمة بالقرب من الهوائى ، وإشارة رادار مصطدمة بهدف بعيد هى أيضا موجة مستوية منتظمة تقريبا .

مع أننا قد اعتبرنا فقط موجة تتغير جيبيا فى الزمن والفراغ ، فان تجميعا مناسبا من حلول معادلة الموجة يمكن أن يعمل ليحقق موجة ذات اى شكل مرغوب . جمع عدد لانهائى من التوافقيات خلال استخدام متسلسلة فورييه يمكن أن ينتج موجة دورية ذات شكل مربع أو مثلث فى كل من الفراغ والزمن . يمكن الحصول على موجات غير دورية من حلنا الأساسى بطرق تكامل فورييه . أخيرا ، يمكن أيضا تضمين موجات فى اتجاهات أخرى ، ربما تمثل موجة منتشرة جنوبا طفيفا من الشرق . هذه المواضيع ضمن تلك المعتبرة فى الكتب الأكثر تقدما عن النظرية الكهرومغناطيسية .

ت ١١ ـ ١ : شدة المجال الكهربى لموجة مستوية منتظمة فى الهواء لها اتساع مقداره 800V/m وفى الاتجاه $\mathbf{a}_x$. اذا كانت الموجة تنتشر فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ ولها طول موجة 2ft

أوجد : (أ) التردد ، (ب) زمن الدورة ، (جـ) قيمة k اذا عبر عن المجال بالصورة $A\cos(\omega t - kz)$ ، (د) اتساع H

الاجابة : 492MHZ ، 2.03ns ، 10.31rad/m ، 2.12A/m .

ت ١١ ـ ٢ : اذا كانت $\mathbf{H}_s = [(5e^{j20})\mathbf{a}_x - (3 + j1)\mathbf{a}_y]e^{-jkz}$ A/m في فضاء حرو $f = 6$MHZ ، أوجد المقدار اللحظى لـ H عند :

(أ) $(0,0,0)$ عند $t = 0$ ، (ب) $(0,0,0)$ عند $t = 0.1\mu$s ، (جـ) $(2,5,8)$ عند $t = 0$

(د) $(2,5,8)$ عند $t = 0.1\mu$s .

الاجابة : 5.57A/m ، 3.35A/m ، 4.66A/m ، 5.91A/m .

١١ ـ ٢ : الحركة الموجية فى العوازل التامة

دعنا الآن نمد معالجتنا التحليلية للموجة المستوية المنتظمة فى عازل تام (عديم الفقد) ذى سماحية ϵ وإنفاذية μ . الوسط موحد الخواص ومتجانس ، وتكون معادلة الموجه الآن

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -\omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E}_s \qquad (٢٣)$$

بالنسبة لـ E_{xs} لدينا

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu\epsilon E_{xs} \qquad (٢٤)$$

بدلا من كتابة حل (٢٤) فى الحال ، دعنا نفترض حلا ذا صورة أكثر تعميما ونستخدم (٢٤) لتحديد قيم مناسبة لبارامتراتنا المفترضة . نسمح لتوهين أسى بفرض

$$E_x = E_{x0}\, e^{-\alpha z} \cos\,(\omega t - \beta z)$$

أومايكافئها فى تدوين أسى مركب ،

$$E_{xs} = E_{x0}\, e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

العامل الأسى الحقيقى يسمح لنا أن نعتبر حالات فيها يمكن للموجة أن توهن بينما تنتشر فى اتجاه z + , α تسمى ثابت التوهين . لأن وسطنا عديم الفقد ، يجب أن نكون قادرين على بيان أن α تكون صفرا . اذا لاحظنا بعد ذلك أن βz يجب أن تقاس بالتقدير الدائرى (بفرض أن β حقيقية) ، حينئذ فمن المنطقى أن يطلق على β ثابت الطور . هو مقياس لازاحة الطور بالتقدير الدائرى لكل متر . عامة ، غالبا نضم α و β فى ثابت الانتشار المركب γ (جاما) ،

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \qquad (٢٥)$$

بحيث يمكن أن نكتب

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-\gamma z}$$

الآن دعنا نعوض فى (٢٤) :

$$\gamma^2 E_{x0} e^{-\gamma z} = -\omega^2 \mu\epsilon E_{x0} e^{-\gamma z}$$

وعلى ذلك يجب أن نتطلب

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu\epsilon$$

أو

$$\boxed{\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$$

لهذا

$$\boxed{\alpha = 0}$$

و

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (٢٦)$$

حيث قد اخترنا الجذر الذى يعطى انتشارا فى اتجاه z الموجب . على ذلك

$$E_x = E_{x0} \cos (\omega t - \beta z)$$

ويمكننا شرح هذه كموجة متنقلة فى اتجاه $+z$ بسرعة طور v

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (٢٧)$$

بالنسبة للموجة المستوية المنتظمة المنتشرة فى عازل تام ، نجد

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}}$$

طول الموجة هو نسبة السرعة الى التردد ،

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \quad (٢٨)$$

حيث λ_o هو طول الموجة فى الفضاء الحر . لاحظ أن $\mu_R \epsilon_r > 1$ ، ولذلك فطول

الموجة أقصر والسرعة أقل فى كل الأوساط الحقيقية عنها فى فضاء حر . من (٢٧) و (٢٨) لدينا أيضا العلاقة العامة

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (٢٩)$$

شدة المجال المغناطيسى المرتبطة بـ E_x هى

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos\,(\omega t - \beta z)$$

حيث المقاومة الذاتية هى

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad (٣٠)$$

المجالان E_x و H_y مرة أخرى متعامدان على بعضهما ، متعامدان على اتجاه الانتشار ، ولهما نفس الطور فى كل مكان . لاحظ أن عندما تضرب E ضربا اتجاهيا فى H ، فالمتجه المحصل يكون فى اتجاه الانتشار . سنرى سبب هذا عندما نناقش متجه بوينتنج .

دعنا نطبق هذه النتائج على موجة ترددها MHZ — *300* منتشرة خلال ماء عذب . مع أنه ليس لدينا وسط عديم الفقد ، سنهمل التوهين فى هذا الوقت ونفرض أن $\alpha = 0$. لذلك $\mu_R = 1$ و $\epsilon_R = 78$ (عند MHZ —*300*) ، و

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78}} = 0.340 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.340 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 0.113 \text{ m}$$

بينما طول الموجة فى الهواء يجب أن يكون *1*m . بالاستمرار لحساب البارامترات الأخرى ، نجد أن

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.5 \text{ rad/m}$$

أو $80.8°/in$ ، و

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78}} = 42.7\ \Omega$$

اذا جعلنا شدة المجال الكهربى لها أقصى اتساع 0.1V/m ، حينئذ

$$E_x = 0.1 \cos (6\pi 10^8 t - 55.5z)$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = 2.34 \times 10^{-3} \cos (6\pi 10^8 t - 55.5z)$$

ت ١١ ـ ٣ : موجة مستوية منتظمة ذات GHZ — 9.4 (1GHZ= 10^9HZ) تنتشر فى بوليثيلين (انظر ملحق حـ) . اذا كان اتساع شدة المجال المغناطيسى هى 7mA/m والمادة مفترض أنها عديمة الفقد ، أوجد : (أ) سرعة الانتشار ، (ب) طول الموجة (فى البوليثيلين) ، (جـ) ثابت الطور ، (د) المعاوقة الذاتية ، (هـ) اتساع شدة المجال الكهربى .

الاجابة : 1.996×10^8m/s , 2.12cm , 296rad/m , 251Ω , 1.754V/m .

١١ ـ ٣ : الموجات المستوية فى العوازل ذات الفقد

كل المواد العازلة لها بعض الموصلية ، وبينما يمكن أن تهمل فى عدة حالات ، فبرغم ذلك من الضرورى تحديد المعايير لعمل ذلك . سنستمر فى حصر اهتمامنا على تغيرات زمنية جيبية ، وعلى ذلك تكون معادلات الالتواء لماكسويل

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega\epsilon \mathbf{E}_s$$

أو

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s$$

و

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \mathbf{H}_s \qquad (٣١)$$

التأثير الوحيد لتضمين الموصلية σ هو أن العامل $j\omega\epsilon$ قد أصبح الآن : $\sigma + j\omega\epsilon$. ولذلك يمكننا فى الحال حساب القيمة الجديدة لثابت الانتشار ،

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu$$

$$\gamma = \pm\sqrt{(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu}$$

بقسمة الحدود على مجموعة مألوفة من الثوابت ، نحصل على

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \quad (٣٢)$$

حيث قد أبقينا فقط الاشارة الموجبة للجذر لسبب سيصبح واضحا بعد قليل . هذا التعبير يختلف عن حالة عدم الفقد فى وجود عامل الجذر الثانى ، الذى يصبح واحدا عندما تتلاشى σ . فى الحالة العامة ، قيم σ , μ , ∈ و ω يمكن أن تدخل فى (٣٢) ، وتحسب أجزاءγ الحقيقية والتخيلية ،

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

ويحصل على المركبة فى اتجاه x لشدة المجال الكهربى المنتشرة فى الاتجاه $+z$ ،

$$E_{xs} = E_{x0}\, e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

استخدام الاشارة الموجبة للجذر فى (٣٢) يؤدى الى قيم عددية موجبة لـ α و β ومن ثم تقابل انتشار فى الاتجاه z + .

باستخدام (٣١) ، فمن السهل بيان أن H_{ys} هى

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta}\, e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

حيث المعاوقة الذاتية هى الان كمية مركبة ،

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{1 - j(\sigma/\omega\epsilon)}} \quad (٣٣)$$

المجالان الكهربى والمغناطيسى لم يعودا بعد فى نفس الطور الزمنى .

قبل أن نعتبر مثالا موضحا هذه الحسابات ، فطبيعة العامل الأسى $e^{-\alpha z}$ تستحق بعض الفحص . بالنسبة لموجة منتشرة فى اتجاه $+z$ ، يسبب هذا العامل نقصا أسيا فى الاتساع مع قيم z المتزايدة . ثابت التوهين يقاس بالنيبر لكل متر (Np/m) لكى يقاس أسe بالوحدات المجردة من الأبعاد النيبر[١] . على ذلك . اذا كانت $\alpha = 0.01$NP/m ،

(١)اختير الحد نيبر (بواسطة بعض الضعفاء فى التهجئة) لتكرم John Napier ، رياضى اسكتلندى وهو أول من اقترح استخدام اللوغاريتمات .

فذروة اتساع الموجة عند $z = 50\text{m}$ ستكون $e^{-0.5}/e^{-0} = 0.0607$ من قيمتها عند $z = 0$. عند الانتقال مسافة $1/\alpha$ فى اتجاه $z +$ ، ينقص اتساع الموجة بالعامل المألوف e^{-1} ، أو 0.368 .

بعض النتائج العددية يمكن أن تحسب للماء المقطر ، الذى هو عازل ردىء جدا . قيم نموذجية للبارامترات هى $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 50$ و $\sigma = 20$ ℧ /m عند : $\omega = 10^{11}$ rad/S ، أو $f = 15.9\text{GHZ}$ ، وهى قيمة تقع فى نطاق SHF (تردد فوق العالى) . على ذلك

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{20 \times 10^{12}}{10^{11} \times 50 \times 8.854} = 0.452$$

و

$$\begin{aligned}\gamma &= j\,\frac{10^{11}\sqrt{1 \times 50}}{3 \times 10^{8}}\sqrt{1 - j0.452} \\ &= j2{,}360\sqrt{1.097\angle -24.3^\circ} \\ &= 2{,}470\angle 77.8^\circ = 520 + j2{,}410 \qquad \text{m}^{-1}\end{aligned}$$

لذلك $\alpha = 520$ Np/m

واتساع E_x أو H_y ستوهن بعامل مقداره 0.368 لكل $1/520\text{m}$ من الانتشار فى الماء . التعبير « ينتشر » على ذلك يكون مستخدما دون أى دقة . التوهين العالى يبين السبب لماذا يكون الرادار غير فعال تحت الماء ويستخدم السونار بدلا منه ، وهو أيضا يوحى أن الماء أو المطر فى الجو قد يسبب مشاكل فى الانتشار عند الترددات العالية .

ثابت الطور هو

$$\beta = 2{,}410 \text{ rad/m}$$

وهذا قد تأثر طفيفا فقط بالموصلية غير الصفرية ، لأن الحسابات العددية الآنفة تبين أنه يكون $2{,}360$rad/m إذا كانت σ صفرا . وطول الموجة عند هذا التردد هو 1.88cm فى الهواء ، ولأن $\beta = 2\pi/\lambda$ ، فهو 2.60mm فى الماء .

المعاوقة الذاتية يتضح أنها

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{50}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - j0.452}} = 50.9\angle 12.2^\circ = 49.8 + j10.7 \qquad \Omega$$

و E_x تتقدم H_y بـ $12.2°$ عند كل نقطة .

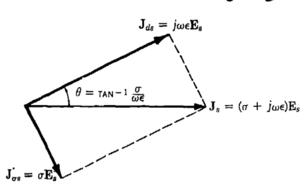
دعنا الآن نوجه اهتمامنا للحالة الأكثر عملية لمادة عازلة لها بعض الفقد الصغير . المعيار الذى يجب أن نحكم به ما اذا كان الفقد صغيرا أم لا هو مقدار $\sigma/\omega\epsilon$ بالمقارنة بالوحدة ، كما هو مبين بـ (٣٢) و (٣٣) الحد $\sigma/\omega\epsilon$ يشار اليه **بظل الفقد** لسبب سيصبح واضحا عندما نعتبر معادلة ماكسويل لالتواء H ، التى كونت نقطة البداية لتحليلنا ،

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{\sigma s} + \mathbf{J}_{ds}$$

نسبة كثافة تيار التوصيل الى كثافة تيار الإزاحة هى

$$\frac{\mathbf{J}_{\sigma s}}{\mathbf{J}_{ds}} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}$$

أى أن هذين المتجهين يشيران فى نفس الاتجاه فى الفراغ ، ولكنهما بينهما طور $90°$ فى الزمن . كثافة تيار الازاحة تتقدم كثافة تيار التوصيل بـ $90°$ بالضبط مثلما يتقدم التيار خلال مكثف التيار خلال مقاومة على التوازى معه بـ $90°$ فى دائرة كهربية عادية . علاقة الطور هذه مبينة فى شكل ١١ ـ ٢ .



شكل ١١ ـ ٢ علاقة الطور ـ الزمنى بين J_{ds} ، $J_{\sigma s}$ و J_s و E . ظل θ يساوى $\sigma/\omega\epsilon$ و $90° - \theta$ هى زاوية عامل القدرة الشائعة ، أو الزاوية التى يتقدم بها J_s على E_s .

الزاوية θ (لايجب أن تخلط مع الزاوية القطبية فى إحداثيات كروية) يمكن لذلك أن تعرف بالزاوية التى تتقدم بها كثافة تيار الإزاحة على كثافة التيار الكلى ، و

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \qquad (٣٤)$$

هذه العلاقة قد أدت الى اسم « ظل الفقد » لـ $\sigma/\omega c$. مسألة ١٧ عند نهاية هذا الفصل تبين أن الـ Q لمكثف (عامل جودته ، وليس شحنته) الذى يشتمل على عازل ذى فقد هو مقلوب ظل الفقد .

إذا كان ظل الفقد صغيرا ، حينئذ يمكننا الحصول على تقريبات مفيدة لثوابت التوهين والطور ، والمعاوقة الذاتية . لأن

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \qquad (٣٢)$$

يمكنك فك الجذر الثانى بنظرية ذات الحدين

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

حيث $1 > |x|$. حددنا x على أنها $-j\sigma/\omega\epsilon$ و n على أنها $1/2$ ، وعلى ذلك

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

من ثم

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad (٣٥)$$

و

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \qquad (٣٦أ)$$

أو فى حالات كثيرة،

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \qquad (٣٦ب)$$

وبطريقة مشابهة ، نجد

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right] \qquad (٣٧أ)$$

أو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \qquad (٣٧ب)$$

لكى نوضح دقة تقريباتنا ، دعنا نعيد حساب α , β و η لمثال الماء المقطر المناقش فيما قبل ، حتى برغم أن ظل الفقد له قيمة عالية نسبيا مقدارها 0.452 . مع $\epsilon_R = 50$, $\sigma = 20$ ℧ /m , $\omega = 10^{11}$ و $\mu_R = 1$ ، نحصل من (٣٥) على

$\alpha = 533$Np/m

بالمقارنة مع القمية المضبوطة 520Np/m . باستخدام (٣٦أ) ، يكون ثابت الطور $\beta = 2,420\text{rad/m}$ القريبة من القيمة المضبوطة $2,410\text{rad/m}$ بينما (٣٦ب) تعطى القيمة عديمة الفقد . $\beta = 2,360\text{rad/m}$

أخيراً ، يتضح من (٣٧أ) أن المقاومة الذاتية

$$\eta = 50.7 \angle 13.7^\circ = 49.2 + j12.0\ \Omega$$

بالمقارنة بقيمة مضبوطة مقدارها $50.9 \angle 12.2^\circ = 49.8 + j\,10.7\Omega$ ، وينشأ خطأ أكبر باستخدام (٣٧ب)

$$.\ \eta = 54.7 \angle 12.7^\circ = 53.3 + j12.0\ \Omega$$

مع أن ظل الفقد فى هذا المثال هو 0.452 ، فالاخطاء المشتملة فى استخدام الصيغ الأكثر تقريبا ربما تكون غير هامة لأن الموصلية وثابت العازل النسبى نادرا ما يعرفا بدقة عالية . وسنوصى ، مع ذلك ، باستخدام التقريبات فقط عندما تكون $\sigma/\omega\epsilon < 0.1$ ، أى تقريبات أبعد يجب أن تؤسس على تقدير هندسى .

فى معظم العوازل الطبيعية يكون ظل الفقد أكثر ثبوتا مع التردد من الموصلية . أى أن ، تميل الموصلية للزيادة مع التردد ، ولكن ليس خطيا . قد يكون هناك أيضا تغيرات سريعة نسبيا فى الموصلية ، السماحية ، وظل الفقد فى منطقة دون الحمراء وأيضا فى منطقة فوق البنفسجية[1] . رسم تخطيطى لتغير σ , ϵ_R ، و $\sigma/\omega\epsilon$ مع التردد للبيرانول 1467 ، تفلون ، وبوليستيرين مبين فى شكل ١١ ـ ٣ بمقياس رسم لوغاريتمى للتردد .

ت ١١ ـ ٤ : مادة تميز بـ $\epsilon_R = 2.5$, $\mu_R = 1$ ، و $\sigma = 4 \times 10^{-5}\ \mho/\text{m}$ عند تردد مقدار 1MHZ . عين القيم العددية لـ : (أ) ظل الفقد ، (ب) ثابت التوهين ، (جـ) ثابت الطور .

الاجابة : 0.288 ; $4.72 \times 10^{-3}\text{Np/m}$; $33.5 \times 10^{-3}\text{rad/m}$.

ت ١١ ـ ٥ : مادة غير مغناطيسية لها ظل فقد 0.05 وسماحية نسبية 5.2 . هذه القيم يمكن أن يفرض أنها ثابتة بين 2MHZ و 50 . عين قيم α و λ عند f تساوى : (أ) 3MHZ ، (ب) $30\ \text{MHZ}$.

الاجابة : $3.58 \times 10^{-3}\text{Np/m}$, 43.8m , 40.0358Np/m , 4.38m

---

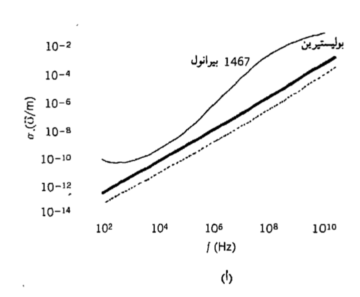
(١) تغيرات كل هذه البارامترات مع التردد معطاة لعديد من المواد فى Von Hippel انظر بيان المراجع عند نهاية الفصل .

١١ ـ ٤ : متجه بوينتنج واعتبارات القدرة

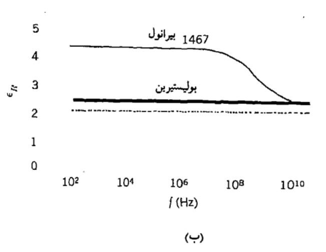
لكى نوجد القدرة فى موجة مستوية منتظمة ، من الضرورى أن نستنبط نظرية قدرة للمجال الكهرومغناطيسى معروفة بنظرية بوينتنج . وقد افترضت أصلا فى 1884 بواسطة فيزيائى انجليزى ، جون هـ . بوينتنج .

دعنا نبدأ بمعادلة ماكسويل ،

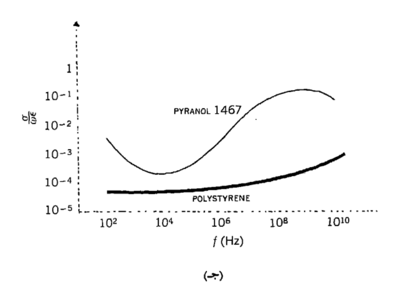
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$



(أ)



(ب)



(جـ)

شكل ١١ ـ ٣ : تغير σ , ϵ_R ، و $\sigma/\omega\epsilon$ مبين (أ) ، (ب) ، و (جـ) ، بالترتيب للبيرانول *1467* ، بوليستيرين ، وتفلون . ولاحظ استخدام مقاييس الرسم اللوغاريتمية لكل المحاور عدا ϵ_R .

ونضرب كلا من طرفى المعادلة نقطيا مع $\mathbf{E}$ ،

$$\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

والآن نستفيد من المتطابقة المتجهة ،

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H} + \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E}$$

التى يمكن برهانها بالفك فى الاحداثيات الكرتيزية . على ذلك

$$\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

ولكن

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

ولذلك

$$-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

أو

$$-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \epsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

على أن

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon E^2}{2}\right)$$

و

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu H^2}{2}\right)$$

على ذلك

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)$$

أخيراً ، نكامل خلال حجم ،

$$-\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, dv = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) dv$$

وتطبق نظرية الانفراج لنحصل على

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) dv \qquad (٣٨)$$

إذا فرضنا أنه ليس هناك منابع داخل الحجم ، حينئذ يكون التكامل الأول الى اليمين هو القدرة الأومية الكلية (ولكن اللحظية) المبددة داخل الحجم . إذا وجدت منابع داخل الحجم ، حينئذ ستكون نتيجة التكامل على حجم المنبع موجبة إذا كانت القدرة تعطى للمنبع ، ولكنها ستكون سالبة إذا كانت القدرة تعطى بالمنبع .

التكامل فى الحد الثانى الى اليمين هو الطاقة الكلية المختزنة فى المجالين الكهربى والمغناطيسى[1] ، والمشتقات الجزئية بالنسبة للزمن تجعل هذا الحد يكون المعدل الزمنى لزيادة الطاقة المختزنة داخل هذا الحجم ، أو القدرة اللحظية التى تعمل على زيادة الطاقة المختزنة داخل هذا الحجم . مجموع التعبيرات على اليمين يجب أن يكون القدرة الكلية المنسابة الى داخل هذه الحجم ، وعلى ذلك تكون القدرة الكلية المنسابة خارج الحجم هى

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

حيث التكامل على السطح المغلق المحيط بالحجم . الاتجاهى $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ معروف بمتجه بوينتنج $\mathscr{P}$.

$$\mathscr{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad (٣٩)$$

(١) هذا هو التعبير لطاقة المجال المغناطيسى التي كنا نتوقعها منذ الفصل التاسع .

الذى يفسر بأنه كثافة القدرة اللحظية ، مقاسة بالوات لكل متر مربع (W/m^2) . هذا التفسير يستند على نفس الاعتبارات الفلسفية كما كان وصف ½D.E أو ½B.H ككثافتى طاقة . نستطيع فقط أن نبين بدقة تامة أن تكامل متجه بوينتنج على سطح مغلق يعطى القدرة الكلية العابرة للسطح فى اتجاه الخروج . على أن هذا التفسير ككثافة قدرة لايضللنا ، خاصة عندما يطبق لمجالات تتغير جيبيا . مسألة ١٨ تبين أن نتائج غريبة قد توجد عندما يطبق متجه بوينتنج على مجالات ثابتة مع الزمن .

اتجاه المتجه$\mathscr{P}$ يبين اتجاه انسياب القدرة اللحظية عند النقطة ، وكثير منا يفكر فى متجه بوينتنج كمتجه مشير "pointing" . هذه المجانسة ، بينما هى بالصدفة ، صحيحة .

حيث أن $\mathscr{P}$ معطى بالضرب الاتجاهى لـ E و H ، فاتجاه انسياب القدرة عند أى نقطة عمودى على كل من متجهى E و H . هذا يتفق بالتأكيد مع خبرتنا مع الموجة المستوية المنتظمة ، لأن انتشارا فى اتجاه z + كان دائما مرتبطا مع مركبة E_x و H_y . علاوة على ذلك ،

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = \mathscr{P}_z \mathbf{a}_z$$

فى عازل تام المجالات E و H هذه معطاة بـ

$$E_x = E_{x0} \cos (\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos (\omega t - \beta z)$$

وعلى ذلك

$$\mathscr{P}_z = \frac{{E_{x0}}^2}{\eta} \cos^2 (\omega t - \beta z)$$

لايجاد كثافة القدرة المتوسطة مع الزمن ، نكامل على دورة واحدة ونقسم على مدة الدورة $T = 1/f$ ،

$$\mathscr{P}_{z,\,av} = f \int_0^{1/f} \frac{{E_{x0}}^2}{\eta} \cos^2 (\omega t - \beta z)\, dt$$

$$= \frac{f}{2} \frac{{E_{x0}}^2}{\eta} \int_0^{1/f} [1 + \cos (2\omega t - 2\beta z)]\, dt$$

$$= \frac{f}{2} \frac{{E_{x0}}^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin (2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{1/f}$$

$$\mathscr{P}_{z,\,av} = \frac{1}{2}\frac{E_{x0}^{\ 2}}{\eta} \qquad W/m^2 \qquad (٤٠)$$

اذا كنا نستخدم قيم جذر متوسط المربع بدلا من الاتساعات العظمى ، لما وجد العامل 1/2 .

أخيرا ، القدرة المتوسطة المنسابة خلال أى مساحة S عمودية على المحور z هى[1]

$$P_{z,\,av} = \frac{1}{2}\frac{E_{x0}^{\ 2}}{\eta} S \qquad W$$

فى حالة عازل ذى فقد ، E_x و H_y ليسا فى نفس الطور الزمنى ، ويكون التكامل أطول بخطوة أو اثنتين . النتيجة هى

$$\mathscr{P}_{z,\,av} = \frac{1}{2}\frac{E_{x0}^{\ 2}}{\eta_m} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \qquad (٤١)$$

حيث η معبر عنها بالصورة القطبية ،

$$\eta = \eta_m / \theta_\eta$$

ت ١١ - ٦ : عند ترددات 1MHZ و100MHZ و 3GHZ ، ثابت العزل لجليد مصنوع من ماء نقى له القيم 4.15 , 3.45 , 3.20 ، بالترتيب ، بينما ظل الفقد هو 0.12 , 0.035 ، و 0.0009 بالترتيب أيضا . إذا كانت موجة مستوية منتظمة ذات اتساع 100V/m عند $z = 0$ منتشرة خلال مثل هذا الجليد ، أوجد متوسط القدرة الزمنى العابرة لمساحة مقدارها $1m^2$ عند

$z = 0$ وعند $z = 5m$ لكل تردد .

الاجابة : 27.1W, 26.4W , 24.7W , 12.48W , 23.7W, 14.31W .

١١ - ٥ : الانتشار فى الموصلات الجيدة : الظاهرة السطحية

كمثالنا الأخير لانتشار غير محدود سنفحص تصرف موصل جيد عندما تنشأ فيه موجة مستوية منتظمة . أجدى من التفكير فى منبع مطمور فى كتلة من النحاس واطلاق موجة فى تلك المادة ، يجب أن نكون مهتمين أكثر بموجة منشأة بمجال كهرومغناطيسى موجود فى عازل خارجى يلاصق سطح الموصل . سنرى أن انتقال الطاقة المبدئى يجب أن يحدث فى المنطقة خارج الموصل ، لأن كل المجالات المتغيرة مع الزمن توهن بسرعة جدا داخل موصل جيد .

---

(١) سنستخدم P للقدرة وكذلك أيضا للاستقطاب . اذا ظهر كلاهما فى نفس المعادلة فى هذا الكتاب ، فهو خطأ .

الموصل الجيد له موصلية عالية وتيارات توصيل كبيرة . لذلك تقل الطاقة الممثلة بالموجة المتنقلة خلال المادة عندما تنتشر الموجة بسبب وجود فقد أومى باستمرار . عندما ناقشنا ظل الفقد ، رأينا أن نسبة كثافة تيار التوصيل الى كثافة تيار الازاحة فى مادة تعطى بـ $\sigma/\omega\epsilon$. باختيار موصل معدنى ردىء وتردد عال جدا كمثال تقليدى ، هذه النسبة(١) للنيكروم $(\sigma = 10^6)$ عند 100MHZ هى 2×10^8 تقريبا .

على ذلك لدينا حالة فيها $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ ، ويجب أن نستطيع عمل عدة تقريبات جيدة جدا لايجاد α ، β ، و η لموصل جيد .

التعبير العام لثابت الانتشار هو

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

الذى تبسطه فى الحال لنحصل على .

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

أو

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لكن

$$-j = 1\underline{/-90^\circ}$$

و

$$\sqrt{1\underline{/-90^\circ}} = 1\underline{/-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

لذلك

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

أو

$$\gamma = (j1 + 1)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \qquad (٤٢)$$

ولهذا

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \qquad (٤٣)$$

بغض النظر عن البارامترات μ و σ للموصل أو لتردد المجال المؤثر ، يكون α و β متساويان . إذا فرضنا مرة أخرى مركبة E_x فقط متنقلة فى اتجاه $+z$ ، حينئذ

$$E_x = E_{x0}\, e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}\right) \qquad (٤٤)$$

---

(١) من المعتاد أخذ $\epsilon = \epsilon_0$ للموصلات المعدنية .

يمكن أن نربط هذا المجال فى الموصل بمجال خارجى عند سطح الموصل . ندع المنطقة $z > 0$ تكون الموصل الجيد والمنطقة $z < 0$ تكون عازلا تاما . عند سطح الحدود $z = 0$ ، تصبح (٤٤)

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t \qquad (z = 0)$$

سنعتبر هذا مجال المنبع الذى ينشىء المجالات خلال الموصل . حيث أن تيار الازاحة مهمل ،

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

على ذلك ، كثافة تيار التوصيل عند أى نقطة داخل الموصل ترتبط مباشرة بـ E :

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x0}\, e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos (\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \qquad (٤٥)$$

المعادلتان (٤٤) و (٤٥) تحتويان ثروة من المعلومات . باعتبار أولا الحد الأسى السالب ، نجد تناقصا أسيا فى كثافة تيار التوصيل وشدة المجال الكهربى مع التعمق داخل الموصل (بعيدا عن المنبع) . العامل الأسى يساوى الوحدة عند $z = 0$ وينقص الى $0.368 = e^{-1}$ عندما

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

هذه المسافة يرمز لها بـ δ ويطلق عليها عمق الاختراق أو العمق السطحى

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}} \qquad (٤٦)$$

وهو بارامترهام فى وصف تصرف موصل فى مجالات كهرومغناطيسية . لنحصل على بعض الفكرة عن مقدار العمق السطحى ، دعنا نعتبر النحاس ، $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ، عند عدة ترددات مختلفة . لدينا

$$\delta_{cu} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

عند تردد قوى ذى 60HZ , $\delta_{cu} = 8.53$mm أو $1/3$ in تقريبا . بتذكر أن كثافة القدرة تحمل حدا أسيا $e^{-2\alpha z}$ ، نرى أن كثافة القدرة مضروبة بعامل مقداره $0.368^2 = 0.135$ لكل مسافة 8.53mm داخل النحاس .

عند تردد موجات دقيقة ذى $10,000$MHZ ، تكون δ هى $6.61 \times 10^{-4}\, mm$ ، أوحوالى ثمن طول موجة الضوء المرئى .

على ذلك ، عند هذا التردد كل المجالات فى موصل جيد مثل النحاس تكون اساسا صفرا على مسافات من السطح اكبر من أعماق سطح قليلة . أى كثافة تيار أو شدة مجال كهربى منشأة عند سطح موصل جيد تضمحل بسرعة عندما نتقدم بداخل

الموصل . الطاقة الكهرومغناطيسية لاتنفذ الى داخل موصل ، تنتقل فى المنطقة المحيطة بالموصل ، بينما الموصل يرشد الموجات فقط . التيارات المنشأة على سطح الموصل تنتشر فى داخل الموصل فى اتجاه عمودى على اتجاه كثافة التيار ، ويوهنوا بالفقد الأومى . هذا الفقد فى القدرة هو الثمن المنتزع بالموصل لعمله كمرشد . سنعتبر الانتشار الموجه بتفصيل أكثر فى الفصل التالى .

افترض أن لدينا قضيب توصيل نحاسى فى محطة فرعية ، شركة كهرباء خدمة التى نرغب فى أن تحمل تيارات عالية ، ولذلك نختار أبعاد 2×4 in . حينئذ لايستفاد بأغلب النحاس ، لأن المجالات تقل بشدة فى عمق سطحى واحد ، حوالى $1/3$ in[1] موصل أجوف بسمك حائط مقداره $1/2$ in تقريبا سيكون تصميما أفضل بكثير . مع أننا نطبق نتائج تحليل لموصل مستوى لانهائى لواحد ذى أبعاد محدودة ، فالمجالات توهن فى الموصل ذى الحجم المحدود بطريقة مشابهة .

والعمق السطحى القصير للغاية عند ترددات الموجة الدقيقة يبين أن الغطاء السطحى للموصل الموجه هو المهم فقط . وقطعة زجاج مع سطح فضة مبخرة سمكه 0.0001in تكون موصلا ممتازا عند هذه الترددات .

بعد ذلك ، دعنا نحدد تعبيرات للسرعة وطول الموجة داخل موصل جيد . حيث أن

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

يمكننا استخدام (٤٦) لنجد

$$\lambda = 2\pi\delta \qquad (٤٧)$$

أيضاً ، بتذكر معادلة (٢٧) ، قسم ١١ - ٢ ،

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

يكون لدينا

$$v = \omega\delta \qquad (٤٨)$$

للنحاس عند 60HZ , $\lambda = 5.36$cm و $v = 3.22$m/s . أو حوالى 7.2mi/h . معظمنا يمكنهم العدو أسرع من ذلك . فى فضاء حر ، طبعا ، موجة 60— HZ لها طول موجة مقداره $3,100$mi وتنتقل بسرعة الضوء .

لكى نجد H_y ، نحتاج الى تعبير للمعاوقة الذاتية لموصل جيد . نبدأ بمعادلة (٣٣) ، قسم ١١ - ٣ ،

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

(١) شركة الخدمة هذه تعمل عند 60 HZ .

حيث أن $\sigma \gg \omega\epsilon$ ، يكون لدينا

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

التى يمكن أن تكتب على الصورة

$$(٤٩) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

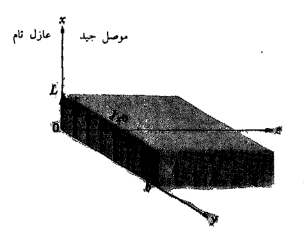
على ذلك ، اذا أعدنا كتابة (٤٤) بدلالة العمق السطحى ،

$$(٥٠) \quad E_x = E_{x0}\, e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

حينئذ

$$(٥١) \quad H_y = \frac{\sigma\delta E_{x0}}{\sqrt{2}}\, e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ونرى أن الاتساع الأقصى لشدة المجال المغناطيسى تحدث ثمن دورة بعد الاتساع الأقصى لشدة المجال الكهربى عند كل نقطة .



شكل ١١ ـ ٤ كثافة التيار $J_x = J_{x0}\, e^{-z/\delta}\, e^{-jz/\delta}$ تتناقص فى المقدار عندما تنتشر الموجة فى داخل الموصل . متوسط فقد القدرة فى المنطقة $0 < x < L$ ، $0 < y < b$ ، $z > 0$ ، هو $\delta b L J^2_{x0} / 4\sigma$ Watts .

من (٥٠) و (٥١) يمكن الحصول على المتوسط الزمنى لمتجه بوينتنج بتطبيق (٤١) ،

$$\mathscr{P}_{z,\,av} = \frac{1}{2}\frac{\sigma\delta E_{x0}^{\,2}}{\sqrt{2}}\, e^{-2z/\delta} \cos\frac{\pi}{4}$$

أو $\mathscr{P}_{z,\,av} = \frac{1}{4}\sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}$

نلاحظ مرة أخرى أن فى مسافة عمق سطحى واحد تكون كثافة القدرة $e^{-2} = 0.135$ فقط من قيمتها عند السطح .

فقد القدرة الكلى فى عرض $0 < y < b$ وطول $0 < x < L$ فى اتجاه التيار ، كما هو مبين فى شكل ١١ ـ ٤ ، يحصل عليه بايجاد القدرة العابرة لسطح الموصل فى نطاق هذه المساحة ،

$$P_{L,\,av} = \int_0^b \int_0^L \frac{1}{4}\sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}\bigg]_{z=0} dx\, dy$$
$$= \frac{1}{4}\sigma\delta b L E_{x0}^2$$

بدلالة كثافة التيار J_{x0} عند السطح ،

$$J_{x0} = \sigma E_{x0}$$

يكون لدينا

$$P_{L,\,av} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sigma}\delta b L J_{x0}^2 \qquad (٥٢)$$

الآن دعنا نرى مافقد القدرة الذى قد ينتج اذا وزع التيار الكلى فى عرض b بانتظام فى عمق سطحى واحد . لايجاد التيار الكلى ، نكامل كثافة التيار فوق العمق اللانهائى للموصل ،

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x\, dy\, dz$$

حيث $$J_x = J_{x0} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

أوبالتدوين الأسى المركب لتبسيط التكامل ،

$$J_{xs} = J_{x0}\, e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta}$$
$$= J_{x0}\, e^{-(1+j1)z/\delta}$$

لذلك ،

$$I_s = \int_0^{\infty} \int_0^{b} J_{x0} e^{-(1+j1)z/\delta}\, dy\, dz$$

$$= J_{x0} b e^{-(1+j1)z/\delta} \frac{-\delta}{1+j1}\Big]_0^{\infty}$$

$$= \frac{J_{x0} b\delta}{1+j1}$$

و

$$I = \frac{J_{x0} b\delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

إذا وزعت هذه بانتظام فى المقطع العرضى $0 < y < b$, $0 < z < \sigma$ ، حينئذ

$$J' = \frac{J_{x0}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

الفقد الأومى فى القدرة لكل وحدة حجم هو J.E ، وعلى ذلك فالقدرة الكلية اللحظية المبددة فى الحجم تحت الاعتبار هى

$$P_L = \frac{1}{\sigma}(J')^2 bL\delta = \frac{J_{x0}{}^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

المتوسط الزمنى لفقد القدرة يحصل عليه بسهولة ، لأن القيمة المتوسطة لعامل مربع جيب تمام هو نصف ،

$$P_L = \frac{1}{4}\frac{1}{\sigma} J_{x0}{}^2 bL\delta \qquad (٥٣)$$

بمقارنة (٥٢) و (٥٣) ، نرى أنهما متطابقتان . على ذلك فقد القدرة المتوسط فى موصل مع وجود الظاهرة السطحية يمكن أن يحسب بافتراض أن التيار الكلى موزع بانتظام فى عمق سطحى واحد . بدلالة المقاومة يمكننا القول أن مقاومة عرض b وطول L للوح ذى سمك لانهائى مع الظاهرة السطحية هو نفسه كمقاومة لوح مستطيل عرضه b ، وطوله L وسمكه δ بدون الظاهرة السطحية ، أومع توزيع تيار منتظم .

يمكننا تطبيق هذا على موصل ذى مقطع عرضى دائرى مع خطأ قليل ، بشرط أن يكون نصف القطر a اكبر كثيرا من العمق السطحى . المقاومة عند تردد عال حيث تكون هناك الظاهرة السطحية ظاهرة جدا توجد لذلك باعتبار لوح عرضه يساوى المحيط $2\pi a$ وسمكه δ . ولهذا

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{2\pi a\sigma\delta} \qquad (٥٤)$$

سلك نحاس مستدير نصف قطره 1mm وطوله 1km له مقاومة عند التيار مستمر مقدارها

$$R_{dc} = \frac{10^3}{\pi 10^{-6}(5.8 \times 10^7)} = 5.48\ \Omega$$

عند 1MHZ يكون العمق السطحى 0.0661mm على ذلك $\delta \ll a$ ، والمقاومة عند 1MHZ توجد بـ (٥٤) ،

$$R = \frac{10^3}{2\pi 10^{-3}(5.8 \times 10^7)(0.0661 \times 10^{-3})} = 41.5\ \Omega$$

ت ١١ ـ ٧ : موصل له مقطع عرضى دائرى نصف قطره 2.5mm ومصنوع من صلب $\sigma = 5.1 \times 10^6$ ℧/m و $\mu_R = 200$ اذا كان طول الموصل 300m ويحمل تيارا كليا $I(t) = 1.5 \cos 3 \times 10^4 t$A ، حدد : (أ) العمق السطحى ، (ب) المقاومة الفعاله ، (جـ) المقاومة لتيار مستمر ، (د) فقد القدرة المتوسط .

الاجابة : 0.228mm ، 16.42Ω ، 3.00Ω ، 18.47W .

١١ ـ ٦ : انعكاس الموجات المستوية المنتظمة

لكى نعالج مسائل ذات أهمية عملية ، يجب توجيه انتباهنا لمناطق ذات حجم محدود . فى هذا القسم سنعتبر ظاهرة الانعكاس التى تحدث عندما تسقط موجة مستوية منتظمة على الحد بين منطقتين تتكونان من مادتين مختلفتين . سوف ننشىء تعبيرات للموجة التى تنعكس من السطح البينى وتلك التى تنفذ من منطقة الى داخل الأخرى . هذه النتائج سيمكن تطبيقها مباشرة على مسائل المواءمة فى خطوط النقل العادية ، وكذلك على أدلة الموجات ونظم نقل أكثر غرابة أخرى .

نفرض مرة أخرى أن لدينا مركبة مفردة لشدة المجال الكهربى . دعنا نختار منطقة 1 $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ as $z < 0$. ومنطقة 2 $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ as $z > 0$. من البداية نحدد الموجة المتنقلة فى اتجاه z + فى منطقة 1 ،

$$E^+_{xs1} = E^+_{x10} e^{-\gamma_1 z} \quad (٥٥)$$

الرمز السفلى 1 يميز المنطقة والرمز العلوى + يبين موجة متنقلة فى الاتجاه الموجب . مرافقا لـ E^+_1 يوجد مجال مغناطيسى

$$H^+_{ys1} = \frac{1}{\eta_1} E^+_{x10} e^{-\gamma_1 z} \quad (٥٦)$$

هذه الموجة المستوية المنتظمة فى منطقة 1 التى تنتقل نحو سطح الحد عند $z = 0$ تسمى الموجة الساقطة . حيث أن اتجاه انتشار الموجة الساقطة عمودى على مستوى الحد ، فنصفها بأنها سقوط عمودى .

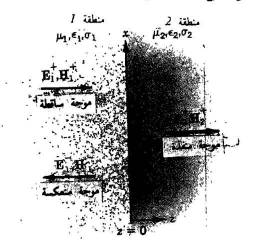
الآن نتعرف على أن طاقة سوف تنتقل عبر السطح الحد عند $z = 0$ الى داخل منطقة 2 باعطاء موجة تتحرك فى اتجاه $+z$ فى ذلك الوسط ،

$$E^{+}_{xs2} = E^{+}_{x20} e^{-\gamma_2 z} \quad (٥٧)$$

$$H^{+}_{ys2} = \frac{1}{\eta_2} E^{+}_{x20} e^{-\gamma_2 z} \quad (٥٨)$$

هذه الموجة التى تتحرك بعيداً عن سطح الحد فى منطقة 2 تسمى موجة منفذة ، لاحظ استخدام ثابت انتشار γ_2 ومعاوقة ذاتية η_2 مختلفين .

الآن يجب أن نحاول تحقيق شروط الحدود عند $z = 0$ بهذه المجالات المفترضة . E_x مجال مماسى ، لهذين المجالين E فى المنطقتين 1 و 2 يجب أن يتساويا عند $z = 0$. بوضع $z = 0$ فى (٥٥) و (٥٧) سيتطلب أن $E^{+}_{x10} = E^{+}_{x20}$. على أن H_y هى أيضا مجال مماسى ، ويجب أن تكون مستمرة عبر الحد (لاتوجد ألواح تيارات فى أوساط حقيقية) . مع ذلك ، عندما ندع $z = 0$ فى (٥٦) و (٥٨) نجد أنه يجب أن يكون لدينا $E^{+}_{x10}/\eta_1 = E^{+}_{x20}/\eta_2$ ؛ وحيث أن : $E^{+}_{x10} = E^{+}_{x20}$ ، فان $\eta_1 = \eta_2$. ولكن هذا شرط خاص جدا لايلائم الحقائق عامة ، ولذلك نكون غير قادرين على تحقيق شروط الحدود بموجة ساقطة وموجة منفذة فقط .



شكل ١١ ـ ٥ موجة E^{+}_{1} ساقطة على حد مستوى تنشىء موجة منعكسة E_1^{-} وموجة منفذة E^{+}_{2} .

نتطلب موجة تنتقل مبتعدة عن الحد فى منطقة 1 ، كما هو مبين فى شكل ١١ ـ ٥ ، وهذه تسمى موجة منعكسة ،

$$E^{-}_{xs1} = E^{-}_{x10} e^{\gamma_1 z} \quad (٥٩)$$

$$(٦٠) \quad H^-_{ys1} = -\frac{E^-_{x10}}{\eta_1} e^{\gamma_1 z}$$

حيث E^-_{x10} يمكن أن تكون كمية مركبة . حيث أن هذا المجال ينتقل فى اتجاه z — ، لأن $E^-_{xs1} = -\eta_1 H^-_{ys1}$ متجه بوينتنج يبين أن ، $\mathbf{E}^-_1 \times \mathbf{H}^-_1$ يجب أن يكون فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ — .

شروط الحدود تحقق الان بسهولة ، وأثناء خطوات العملية يمكن ايجاد اتساعات الموجات المنفذة والمنعكسة بدلالة E^+_{x10} . شدة المجال الكهربى الكلية مستمرة عند $z = 0$ ،

$$E_{xs1} = E_{xs2} \qquad (z = 0)$$

أو

$$E^+_{xs1} + E^-_{xs1} = E^+_{xs2} \qquad (z = 0)$$

لذلك

$$(٦١) \quad E^+_{x10} + E^-_{x10} = E^+_{x20}$$

علاوة على ذلك

$$H_{ys1} = H_{ys2} \qquad (z = 0)$$

أو

$$H^+_{ys1} + H^-_{ys1} = H^+_{ys2} \qquad (z = 0)$$

ولذلك

$$(٦٢) \quad \frac{E^+_{x10}}{\eta_1} - \frac{E^-_{x10}}{\eta_1} = \frac{E^+_{x20}}{\eta_2}$$

بحل (٦٢) فى E^+_{x20} وبالتعويض فى (٦١) ، نجد

$$E^+_{x10} + E^-_{x10} = \frac{\eta_2}{\eta_1} E^+_{x10} - \frac{\eta_2}{\eta_1} E^-_{x10}$$

أو

$$E^-_{x10} = E^+_{x10} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

نسبة اتساعى المجالين الكهربيين المنعكس والساقط تسمى معامل الانعكاس ويرمز له بـ Γ (جاما) ،

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (٦٣)$$

معامل الانعكاس قد يكون مركبا ، وفى هذه الحالة يكون هناك إزاحة فى الطور فى الموجة المنعكسة .

الاتساع النسبى لشدة المجال الكهربى المنفذ توجد بضم (٦٣) و (٦١) ،

$$\frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (٦٤)$$

وهذا معروف بمعامل النفاذ ولكننا سوف لانستخدمها بما فيه الكفاية لتبرير الرمز لها برمز خاص .

دعنا نرى كيف يمكن تطبيق هذه النتائج على عدة حالات خاصة . أولا ندع منطقة *1* تكون عازلا تاما ومنطقة *2* تكون موصلا تاما . حينئذ ، حيث أن σ_2 لانهائية ،

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ومن (٦٤) ،

$$E_{x20}^+ = 0$$

لايمكن وجود مجالات متغيرة مع الزمن فى الموصل التام . وطريقة بديلة للنظر لهذا هى ملاحظة أن العمق السطحى يساوى صفرا .

حيث أن $\eta_2 = 0$ ، فان (٦٣) تبين أن

$$\Gamma = -1$$

و

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

الموجة المنعكسة تساوى فى الاتساع وتضاد فى الاشارة الموجة الساقطة . كل الطاقة الساقطة تنعكس بواسطة الموصل التام ، والمجال E الكلى فى منطقة *1* هو

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

حيث قد جعلنا $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ فى العازل التام . هذه الحدود يمكن أن تضم وتبسط ،

$$E_{xs1} = (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z})E^+_{x10}$$
$$= -j2 \sin \beta_1 z \, E^+_{x10}$$

أو بالضرب فى $e^{j\omega t}$ وأخذ الجزء الحقيقى للحصول على الصورة المثلثية ،

$$\boxed{E_{x1} = 2E^+_{x10} \sin \beta_1 z \sin \omega t} \qquad (٦٥)$$

هذا المجال الكلى فى منطقة 1 ليس موجة متنقلة ، مع أنه قد حصل عليه بضم موجتين متساويتى الاتساع تنتقلان فى اتجاهين متضادين . دعنا نقارن صورته مع تلك للموجة الساقطة ،

$$\boxed{E^+_{x1} = E^+_{x10} \cos (\omega t - \beta_1 z)} \qquad (٦٦)$$

هنا نرى الحد $\omega t - \beta_1 z$ أو $\omega(t - z/v_1)$ ، الذى يخص موجة متنقلة فى اتجاه $+ z$ بسرعة $v_1 = \omega/\beta_1$. على أن فى (٦٥) ، العوامل المشتملة على زمن ومسافة هى حدود مثلثية منفصلة . عند كل المستويات التى لها $\beta_1 z = n\pi$ ، تكون E_{x1} صفرا لكل الوقت . علاوة على ذلك ، كلما كان $\omega t = n\pi$ ، تكون E_{x1} صفرا فى كل مكان . ومجال له الصورة (٦٥) معروف بأنه موجة واقفة .

المستويات التى عليها $E_{x1} = 0$ تقع حيثما

$$\beta_1 z = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

على ذلك

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

و

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$

على ذلك $E_{x1} = 0$ عند الحد $z = 0$ وكل نصف طول موجة من الحد فى منطقة 1 و $z = 0$ ، كما هو موضح فى شكل ١١ - ٦ .

حيث أن $E^+_{xs1} = H^+_{ys1} \eta_1$ و $E^-_{xs1} = - H^-_{ys1} \eta$ ، يكون المجال المغناطيسى

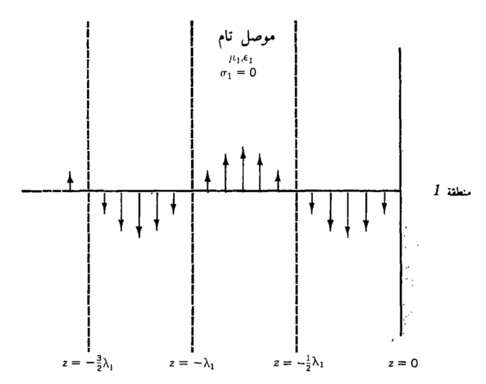
$$H_{ys1} = \frac{E^+_{x10}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

أو

$$H_{y1} = 2\frac{E^+_{x10}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega t \quad (٦٧)$$

هذه أيضاً موجة واقفة ، ولكنها تبدى اتساعا أقصى عند المواضع حيث $E_{x1} = 0$. وهى أيضا مختلفة $90°$ فى الطور الزمنى مع E_{x1} فى كل مكان . على ذلك لاتنتقل قدرة متوسطة فى أى من الاتجاهين .

دعنا الآن نعتبر عوازل تامة فى كلا المنطقتين 1 و 2 ، η_1 و η_2 كلاهما كميات موجبة حقيقية و $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.



شكل ١١ ـ ٦ القيم اللحظية للمجال الكلى E_{x1} مبينة عند $t = \pi/2$ ، $E_{x1} = 0$ لكل زمن عند مضاعفات نصف طول موجة واحد من السطح الموصل .

معادلة (٦٣) تمكننا أن نحسب معامل الانعكاس ونجد E^-_{x1} بدلالة الاتساع الساقط E^+_{x10} . بمعرفة E^+_{x1} و E^-_{x1} ، نجد حينئذ H^+_{y1} و H^-_{y1} . فى منطقة 2 ، توجد E^+_{x2} من (٦٤) ، وهذه حينئذ تحدد H^+_{y2} . كمثال عددى دعنا نختار

$$\eta_1 = 300\ \Omega$$

$$\eta_2 = 100\ \Omega$$

$$E^+_{x10} = 100\ \text{V/m}$$

حينئذ

$$\Gamma = \frac{100 - 300}{100 + 300} = -0.5$$

$$E^-_{x10} = -50\ \text{V/m}$$

شدتا المجال المغناطيسى هما

$$H^+_{y10} = \frac{100}{300} = 0.333\ \text{A/m}$$

$$H^-_{y10} = -\frac{-50}{300} = 0.167\ \text{A/m}$$

كثافة القدرة المتوسطة الساقطة هى

$$P^+_{1,\text{av}} = \tfrac{1}{2} E^+_{x10} H^+_{y10} = 16.67\ \text{W/m}^2$$

بينما

$$P^-_{1,\text{av}} = -\tfrac{1}{2} E^-_{x10} H^-_{y10} = 4.17\ \text{W/m}^2$$

فى منطقة 2

$$E^+_{x20} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E^+_{x10} = 50\ \text{V/m}$$

و

$$H^+_{y20} = \frac{50}{100} = 0.500\ \text{A/m}$$

على ذلك

$$P^+_{2,\text{av}} = \tfrac{1}{2} E^+_{x20} H^+_{y20} = 12.5\ \text{W/m}^2$$

لاحظ أن الطاقة محفوظة

$$P^{+}_{1,av} = P^{-}_{1,av} + P^{+}_{2,av}$$

علاقة القدرة بين القدرات الساقطة ، المنعكسة ، والمنفذة يجب أن تقارن مع المعادلة المعبرة عن استمرارية شدة المجال الكهربى المماسة عند سطح الحد ،

$$E^{+}_{x10} + E^{-}_{x10} = E^{+}_{x20}$$

الموجات الساقطة والمنعكسة فى منطقة 1 يمكن أن تضم لتعطى المجال الكلى هناك ، ولكن هذا سيحتجز للقسم التالى .

ت ١١ - ٨ : فى منطقة 1 , $y < 0$, $\epsilon_1 = 10$pF/m , $\mu_1 = 2.5\ \mu$H/m و $\sigma_1 = 0$ لمنطقة 2 , $y > 0$, $\epsilon_2 = 9$ pF/m , $\mu_2 = 4\ \mu$H/m ، و $\sigma_2 = 0$ موجة مستوية منتظمة ساقطة فى منطقة 1 , $E^{+}_{zs1} = 500$ V/m, تنتقل نحو الحد عند $y = 0$. اذا كانت : $\omega = 10^8$rad/s ، أوجد: (أ) $E^{+}_{z1}(t)$; ، (ب) المجال المغناطيسى الساقط كدالة متجهة فى الزمن ، (جـ) $E^{-}_{z1}(t)$ ، (د) $E^{+}_{z2}(t)$.

الاجابة :

$571\cos(10^8t - 0.6y)$V/m ,$71.4\cos(10^8t + 0.5y)$V/m , $\cos(10^8t - 0.5y)\mathbf{a}_x$A/ m . $500\cos(10^8t - 0.5y)$V/m

١١ - ٧ : نسبة الموجة الواقفة

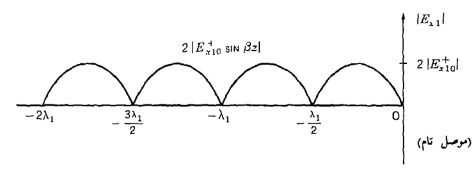
أحد القياسات الذى يعمل بسهولة على نظم النقل هو الاتساع النسبى لشدة المجال الكهربى أو المغناطيسى خلال استخدام مجس . عروة تقارن صغيرة ستعطى بيانا لاتساع المجال المغناطيسى ، بينما موصل مركزى لكابل محورى ممتد طفيفا سيأخذ عينة المجال الكهربى . كلا الجهازين عادة توالفا مع التردد العامل لتعطى حساسية مزادة . ويُقوم خرج المجس ويوصل مباشرة بميكروأميتر أو قد يوصل الى فولتمتر الكترونى أو مكبر خاص . والبيان يتناسب مع اتساع المجال المتغير جيبيا مع الزمن الذى ينغمر فيه المجس .

عندما تنتقل موجة مستوية منتظمة خلال منطقة عديمة الفقد ، ولاتوجد موجة منعكسة ، سيبين المجس نفس الاتساع عند كل نقطة . طبعا ، المجال اللحظى الذى يأخذ عينته المجس سيختلف فى الطور بمقدار $\beta(z_2 - z_1)\ rad$ عندما يحرك المجس من $z = z_1$ الى $z = z_2$ ولكن النظام غير حساس لطور المجال . والفولتيات المتساوية الاتساع خاصة لموجة متنقلة غير موهنة .

عندما تنعكس موجة تنتقل فى وسط عديم الفقد بواسطة موصل تام ، يكون المجال الكلى موجة واقفة ومجس الفولتية لايعطى خرجا عندما يوضع على مسافات تقدر أعداد

صحيحة من نصف طول الموجة من سطح الانعكاس وعندما يغير موضع المجس ، يتغير خرجه بالصورة $|\sin\beta z|$ ، حيث z هى المسافة من الموصل . تغير الاتساع الجيبى هذا مبين فى شكل ١١ ـ ٧ ، وهو يميز موجة واقفة .

تبرز حالة أكثر تعقيدا عندما لايكون المجال المنعكس صفراً أو ١٠٠ فى المائة من المجال الساقط . بعض الطاقة تنفذ الى داخل المنطقة الثانية وبعضها ينعكس . منطقة *1* لذلك تحمل مجالا مكونا من كلتا موجتين موجة متنقلة وموجة واقفة . من المعتاد وصف هذا المجال كموجة واقفة مع أن موجة متنقلة موجودة ايضا . سنرى أن المجال ليس له اتساع صفرى عند أى نقطة لكل وقت ، والدرجة التى ينقسم بها المجال بين موجة متنقلة وموجة واقفة حقيقية يعبر عنها بنسبة الاتساع الأقصى التى توجد بالمجس الى الاتساع الأدنى .



شكل ١١ ـ ٧ موجة الفولتية الواقفة الناتجة فى وسط عديم الفقد بانعكاس من موصل تام تتغير بالصورة $|\sin\beta z|$.

باستخدام نفس المجالات المستقصاة فى القسم السابق ، نضم شدتا المجال الكهربى الساقطة والمنعكسة ،

$$E_{x1} = E_{x1}^{+} + E_{x1}^{-}$$

المجال E_{x1} دالة جيبية فى t (عامة مع زاوية طور غير صفرية) ، وتتغير مع z بطريقة غير معروفة بعد . سنفحص كل z لايجاد الاتساعين الأقصى والأدنى ، ونعين نسبتهما . نسمى هذه النسبة **نسبة الموجة الواقفة** وسنرمز لها بـ s .

دعنا الآن نذهب خلال ميكانيكية هذه الطريقة للحالة التى فيها الوسط *1* عازل تام ، $\alpha_1 = 0$ ، ولكن منطقة *2* قد تكون أى مادة . لدينا

$$E_{xs1}^{+} = E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z}$$

$$E_{xs1}^{-} = \Gamma E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z}$$

حيث

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

و η_1 حقيقية وموجبة ، ولكن η_2 قد تكون مركبة . على ذلك Γ قد تكون مركبة ، ونسمح لهذا الاحتمال بأن ندع

$$\boxed{\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}}$$

إذا كانت منطقة 2 موصل تام ، تكون ϕ تساوى π ، إذا كانت η_2 حقيقية وأقل من η_1 ، تكون ϕ أيضا تساوى π ، واذا كانت η_2 حقيقية وأكبر من η_1 ، تكون ϕ صفرا . المجال الكلى فى منطقة 1 هو

$$E_{xs1} = (e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)}) E_{x10}^{+} \quad (٦٨)$$

نحن نبحث عن القيم العظمى والصغرى لمقدار الكمية المركبة فى الأقواس الأكبر ولدينا . بالتأكيد قيمة عظمى عندما يكون لكل حد فى الأقواس الأكبر نفس زاوية الطور ، على ذلك ، بالنسبة لـ E^{+}_{x10} موجبة وحقيقية ،

$$E_{xs1,\max} = (1 + |\Gamma|) E_{x10}^{+} \quad (٦٩)$$

ويحدث هذا حيثما

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

على ذلك

$$-\beta_1 z_{\max} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (٧٠)$$

لاحظ أن فولتية عظمى تقع عند مستوى الحد $(z = 0)$ إذا كانت $\phi = 0$ ، علاوة على ذلك ، $\phi = 0$ عندما يكون Γ حقيقيا وموجبا . هذا يحدث لـη_1 و η_2 حقيقيتين عندما $\eta_2 > \eta_1$. على ذلك هناك فولتية عظمى عند سطح الحد عندما تكون المعاوقة الذاتية لمنطقة 2 أكبر من تلك لمنطقة 1 وكلا المعاوقتين حقيقيتين .

بالنسبة للموصل التام $\phi = \pi$ ، وهذه القيم العظمى توجد عند :
$-\beta_1 z = \pi/2 , 3\pi/2$ ، وهلم جراً ، كما رأينا من قبل .

القيم الصغرى يجب أن تحدث حيثما تختلف زوايا الطور للحدين فى الأقواس الأكبر بـ $180°$ ، على ذلك

$$E_{xs1,\min} = (1 - |\Gamma|) E_{x10}^{+} \quad (٧١)$$

وهذا يحدث حيثما

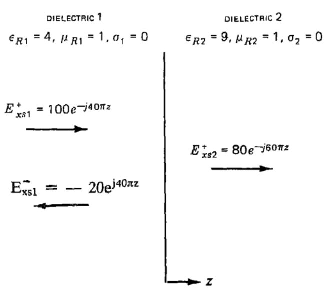
$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

أو

$$-\beta_1 z_{min} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (٢٧)$$

القيم الصغرى منفصلة بمضاعفات نصف طول موجة واحد (مثلما هى القيم العظمى) ، وبالنسبة لموصل تام تحدث القيمة الصغرى الأولى عندما $-\beta_1 z = 0$ ، أوعند سطح الموصل . عامة ، توجد فولتية صغرى عند $z = 0$ كلما $\phi = \pi$ ، يحدث هذا اذا كانت $\eta_2 < \eta_1$. وكلاهما حقيقى .

لتوضيح بعض هذه النتائج ، دعنا نعتبر موجة ذات 100V/m , GHZ 3— تنتشر فى مادة لها $\epsilon_{R1} = 4$, $\mu_{R1} = 1$ ، و $\sigma_1 = 0$. الموجة ساقطة عموديا على عازل تام آخر فى منطقة $z > 0$,2 حيث $\epsilon_{R2} = 9$ و $\mu_{R2} = 1$ (شكل ١١ - ٨) .



شكل ١١ - ٨ موجة ساقطة ، $E^+_{xs1} = 100\, e^{-j4\pi z}$V/m ، منعكسة بمعامل انعكاس ، $\Gamma = -0.2$. عازل 2 سميك لانهائيا .

نحسب $\omega = 6\pi 10^9$rad/s , $\beta_1 = 40\pi$rad/m ، و $\beta_2 = 60\pi$rad/m مع أن طول الموجة ستكون 10cm فى الهواء ، نجد هنا أن

$\lambda_1 = 5$cm , $\lambda_2 = 3.33$cm , $\eta_2 = 2/3\, \eta_1$. و $\Gamma = -0.2$. حيث أن Γ حقيقية وسالبة $(\eta_2 < \eta_1)$ ، ستكون هناك قيمة صغرى للمجال الكهربى عند الحد ، ستكرر على فواصل نصف طول موجة

(2.5 cm) في عازل 1 . من (٧١) ، نرى أن $E_{xs1,min} = 80\text{V/m}$.

قيم عظمى لـ E توجد عند مسافات 1.25cm ,3.75cm ,6.25cm , ... من $z = 0$

هذه القيم العظمى كلها لها الاتساعات ذات 120V/m ، كما يتنبأ بها (٦٩) .

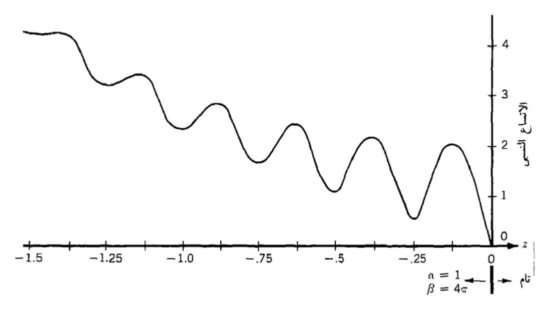
ليس هناك قيم عظمى أو صغرى فى منطقة 2 حيث لايوجد هناك موجة منعكسة .

نسبة السعتين العظمى والصغرى تسمى نسبة الموجة الواقفة :

$$s = \frac{E_{xs1,\max}}{E_{xs1,\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \qquad (٧٣)$$

حيث أن $|\Gamma| \leqslant 1$ ، تكون s دائما موجبة وأكبر من أو تساوى الوحدة . بالنسبة للمثال آنفا ، $S = (1 + |-0.2|/(1 - |-0.2|) = 1.2/0.8 = 1.5$.

إذا كان $|\Gamma| = 1$ يكون الاتساعان المرتد والساقط متساويين ، كل الطاقة الساقطة تنعكس ، وتكون s لانهائية . ويمكن إيجاد مستويات منفصلة بمضاعفات $\lambda_1/2$ عليها E_{x1} تساوى صفراً عند كل الأوقات .



شكل ١١ ـ ٩ تأثير موجة منعكسة يختفى فى مادة ذات فقد .

فى المنتصف بين هذه المستويات ، E_{x1} لها اتساع أقصى ضعف ذلك للموجة الساقطة .

إذا كانت $\eta_2 = \eta_1$ ، حينئذ $\Gamma = 0$ ، لاتنعكس طاقة ، و $s = 1$ ، الاتساعان الأعظم والأصغر متساويان .

إذا انعكست نصف القدرة الساقطة ، $|\Gamma|^2 = 0.5$, $|\Gamma| = 0.707$ ، و $s = 5.83$.

حيث أن نسبة الموجة الواقفة هى نسبة اتساعين ، فان الاتساع النسبى المعطى بواسطة مجس يسمح استخدامه لتعيين s تجريبياً . لهذا السبب فان نسبة الموجة الواقفة بارامتر هام لخط نقل ، وسنستخدمها كثيرا فى الفصل القادم .

دعنا الآن نفترض أن منطقة 1 هى مادة ذات فقد لها α_1 غير صفرية . موجة ساقطة تأتى من اليسار تخضع لتوهين أسى عندما تتقدم فى اتجاه $z +$. الموجة المنعكسة توهن عندما تنتشر فى اتجاه $z -$. أخيرا يكون اتساعها مهملا بالمقارنة بذلك الذى للموجة الساقطة . على ذلك القيم العظمى والصغرى يمكن أن تقبل التمييز بالقرب من سطح الانعكاس ، ولكنها تزداد اقترابا فى قيمها على مسافات أكبر منه . شكل ١١ ـ ٩ يبين رسما تخطيطيا للاتساع E_{x1} عندما تكون منطقة 2 موصلا تاما ومنطقة 1 لها ثابت انتشار $\gamma_1 = 1 + j4\pi$. يجب ملاحظة أن ليس لأى قيمتين عظيمتين نفس الاتساع ، وكذلك بالنسبة للقيم الصغرى المتتالية . نسبة الموجة الواقفة دالة فى z ، وقيمتها لايمكن تحديدها بدقة لحالة مثل تلك المبينة . مالم يحدد الموضع الذى تقاس عنده نسبة الموجة الواقفة ، فان وصف التصرف بدلالة معامل الانعكاس وعامل التوهين يكون أكثر غنى بالمعلومات الى حد بعيد .

مع أن الحالة المبينة فى شكل ١١ ـ ٩ هى حالة متطرفة ، يجب أن ندرك أن خط النقل عديم الفقد التام لايوجد فى الممارسة ، وتكون نسبة الموجة الواقفة دائما دالة فى الموضع من الحمل . تكون قيمة s ذات معنى فقط عندما لاتتغير بوضوح خلال المنطقة التى نهتم بها .

مرة أخرى بقصر اهتمامنا على وسط 1 عديم الفقد ، دعنا نجد نسبة شدتى المجال الكلى الكهربى والمغناطيسى . بالنسبة لموجة متنقلة تكون هذه $\pm\eta_1$ ، والاشارة تعتمد على اتجاه الانتقال . على أن ، الانعكاس من موصل تام قد بين لنا أن E_{xs1} و H_{ys1} قد تكون صفرا عند مواضع معينة ، وعلى ذلك فنسبتهما قد تتغير من صفر الى قيمة لانهائية . المجالات الكلية عند $z = -l$ هى

$$E_{xs1} = (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l})E_{x10}^{+}$$

$$H_{ys1} = (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l})\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}$$

نسمى النسبة معاوقة دخل ذاتيةη_{in}

$$\eta_{\text{in}} = \frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\bigg|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

بجعل $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1) / (\eta_2 + \eta_1)$ واستخدام متطابقة اويلر ، يكون لدينا

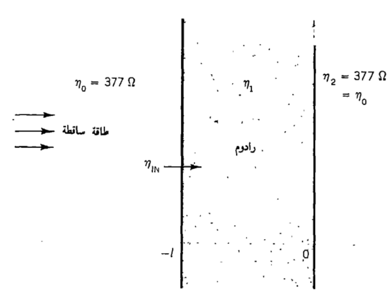
$$\eta_{in} = \eta_1 \times \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}$$

u¿u jfs¡ fsumgn gjy¡x

$$\boxed{\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}} \qquad (٧٤)$$

yk»lh η_2 تساوى η_1 ، تساوى η_{in} أيضا η_1 ، لايكون هناك انعكاساً ، ونقول أن نظام النقل متوائم . اذا كانت $\eta_2 = 0$ (موصل تام) ، $\eta_{in} = j\eta_1 \tan\beta_1 l$ ، تكون معاوقة الدخل صفرا عندما $\beta_1 l = n\pi$ أو عند تلك النقط حيث $E_{xs1} = 0$. أيضا ، η_{in} تكون لانهائية عند تلك المواضع حيث $H_{ys1} = 0$.

سنستخدم (٧٤) بتوسع فى الفصل القادم فى صورة قابلة للتطبيق على خطوط النقل ، ولكن يمكننا اختتام هذا الفصل على الموجات المستوية ببيان كيف تصمم نافذة شفافة لهوائى رادار .



شكل ١١ ـ ١٠ لكى نوائم الموجة الساقطة لفضاء حر عند اليمين البعيد ، فمن الضرورى أن نجعل η_{in} تساوى η_0 باختيار مناسب لـ η_1 و l .

هذه المسألة تظهر أنه ضرورى أن نحمى هذه الهوائيات من الطقس بأغطية مناسبة أو رادومات . دعنا نفرض أن الهوائى بعيد على اليسار فى فضاء حر ، $z < -l$ ، كما هو

مبين فى شكل ١١ ـ ١٠ . منطقة 1 تقع بين $z = -l$ و 0 . ندع منطقة 1 تكون لوحا من عازل تام ، جاعلين اياها رفيعة بقدر ما نستطيع ، لنبقى فرضنا لفقد صفرى صحيحا . الى اليمين فى منطقة 2 ، $z > 0$ ، تكون منطقة الفضاء الحر التى سترسل فيها اشارة الرادار . لكى نتجنب أى انعكاس للقدرة راجعة الى داخل الهوائى ، أولكى نوائم الهوائى مع العالم الخارجى ، نضع $\eta_{in} = 377$. حيث أن $\eta_2 = 377$ ، يكون لدينا

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

بضرب الطرفين والوسطين ، نجد

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1{}^2 \tan \beta_1 l$$

حيث أن $\eta_1 < 377$ لكل المواد غير المغناطيسية ، يمكننا تحقيق هذه المعادلة فقط باختيار $\beta_1 l = n\pi$. ارفع رادوم يحصل عليه عندما $\beta_1 l = \pi$ ، أو $l = \lambda_1 /2$.

على ذلك ، اذا كان التردد العامل هو $10,000$MHZ ، يمكننا اختيار بلاستيك قليل الفقد خفيف الوزن له $\epsilon_{R1} = 2.25$ ونستخدم سمك

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25}\ 10^{10}} = 10^{-2} \text{ m} \qquad \text{(or 1 cm)}$$

إذا كان الرادوم سمكه 0.5cm ، فيمكن بيان أن $\eta_{in} = 167.5\Omega$ و 14.8 فى المائة من القدرة الساقطة ، سوف ينعكس .

ت ١١ ـ ٩ : موجة مستوية منتظمة ذات 4GHZ تسقط عموديا من منطقة 1 ، $z < 0$ ، $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ ، $\sigma_1 = 0$ ، فى اتجاه منطقة 2 ، $z > 0$ ، $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ ، $\sigma_2 = 0$. أوجد :
(أ) s فى منطقة 1 ، (ب) s فى منطقة 2 ، (جـ) η_{in} عند $z = -0.6$cm .

الاجابة : 5.00 ، 1.00 ، $86.9 - 61.8° \ \Omega$.

مراجع مقترحة :

1 Ginzton, E. L.: "Microwave Measurements," McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.

هذا الكتاب يعطى وصفا جيدا لتقنيات ونظرية القياسات فى الموجات الدقيقة كما كانت فى منتصف الخمسينات . كثير منها مازال صالحا ، وجميعها تعطى معلومات .

2 International Telephone and Telegraph Co., Inc.: "Reference Data for Radio Engineers," 6th ed., Howard W. Sams & Co., Indianapolis, Ind., 1975.

هذا الكتيب يحتوى على بعض بيانات ممتازة عن خواص المواد العازلة .

3 Rao, N. Narayana: "Elements of Engineering Electromagnetics," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977.

هذا المرجع على مستوى طلبة مرحلة البكالوريوس يؤكد على مجالات متغيرة مع الزمن . الموجة المستوية المنتظمة هى موضوع الفصلين الرابع والخامس .

4 Seshadri, S. R.: "Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1971.

الموجات المستوية مناقشة فى الفصلين الخامس والسادس .

5 Stuart, R. D.: "Electromagnetic Field Theory," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

هذا الكتاب الموجز موجه الى طلبة الهندسة الكهربية فى المرحلة الوسطى من دراسته الجامعية . الحركة الموجبة هى موضوع الفصل التاسع .

6 von Hippel, A. R.: "Dielectric Materials and Applications," The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.

مسائل :

١ - بين أن $E_{xs} = Ae^{\pm j(kz+\alpha)}$ هو حل لمعادلة هلمهولتز المتجهة ، قسم ١١ - ١ ، معادلة (١٥) ، لـ $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ وأى α .

٢ - عبر عن E و H كدوال حقيقية فى الزمن لموجة مستوية منتظمة منتشرة فى اتجاه a_y فى فضاء حر اذا كان لـ E اتساع اقصى مقداره 250V/m عند $y = 0.5$ و $t = 0.2$ns ، وفى اتجاه وحدة المتجه ، $0.6a_x - 0.8a_z$. دع $f = 400$MHz .

٣ - شدة المجال الكهربى لموجة مستوية منتظمة جيبية ذات 100MHz معطاة عند $P\ (4, -2, 6)$ بـ $E_s = 100a_x - 70a_y$ V/m . أوجد $|E(t)|$ عند : (أ) P عند $t = 0$ ، (ب) P عند $t = 1$ns ، (جـ) $Q\ (3,5,8)$ عند $t = 2$ns اذا كانت الموجة تنتقل فى اتجاه a_z فى فضاء حر .

٤ ـ اذا أعطيت $E_s= Ae^{-j12z}$ لموجة مستوية منتظمة فى فضاء حر ، عين أولا ω ثم احسب مقدار $E(t)$ عند $t = 0$ عند نقطة الأصل اذا : (أ) $A= 100a_x$ ، (ب)$A= (100 + j60)a_x$ ، (جـ) $A=(100\angle 35^\circ)a_x = 100e^{135^\circ}a_x$ ، (د) $A= 100a_x + 80a_y$ (هـ) $A= (100\angle 35^\circ)a_x + (80\angle 52^\circ)a_y$.

٥ ـ موجتان مستويتان منتظمتان تنتقلان فى اتجاه a_z فى فضاء حر . كلتاهما تصل الى نهاية عظمى موجبة $1,000$V/m فى اتجاه a_x عند نقطة الأصل عند $t = 0$. احدى الموجتين لها تردد 920KHz ، بينما الأخرى 930KHz . (أ) كم من الوقت يستغرق حتى تصل الموجتين لقيم عظمى موجبة آنيا عند نقطة الأصل مرة أخرى ؟ . (ب) ما هى النقطة التالية على المحور z الموجب التى عندها $E= 2,000a_x$V/m ؟

٦ ـ المجال الكهربى لموجة مستوية منتظمة فى هواء معطى بـ $E_s = (100a_x + j100a_y)e^{-j2\pi z/3}$ V/m . أوجد ω لهذه الموجة . (ب) جهز رسما تخطيطيا مبينا مقدار واتجاه $E(t)$ فى المستوى $z = 0$ عند $t = 0,2,4,6$ and 8ns .
إن رسما تخطيطيا صحيحا يبين لماذا يقال عن موجة من هذا النوع أنها دائرية الاستقطاب .

٧ ـ موجة مستوية منتظمة $E_s = (50a_x - 120a_y)e^{j(10t - \beta z)}V/m$ ، تنتشر فى بوليبروبيلين ، الذى يمكن أن يفرض أنه عديم الفقد . أوجد : (أ) β ، (ب) λ ، (جـ) $H(x,y,z,t)$.

٨ ـ عبر عن كل من E و H كدوال فى الزمن لموجة مستوية منتظمة ذات 30MHz منتشرة فى اتجاه a_x فى وسط عديم الفقد له $\epsilon = 20$pF/m و $\mu = 5\mu$H/m . E لها مركبة فى اتجاه a_z فقط وتصل اتساع أقصى موجب قيمته 800V/m عند $x = 0.4$m عندما $t = 6ns$.

٩ ـ مولد اشارات معين ينتج موجة مستوية منتظمة فى فضاء حر لها طول موجة 12cm . عندما تنتشر الموجة خلال مادة عديمة الفقد ذات خصائص مجهولة ، ينقص طول موجتها الى 8cm . فى هذه المادة ، اتساع المجال E هو 50V/m واتساع المجال H هو 0.1A/m . أوجد تردد المولد و μ_R و ϵ_R للمادة المجهولة .

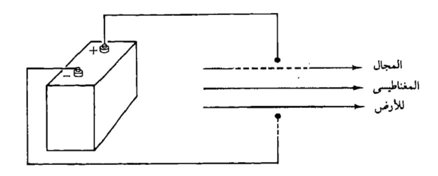
١٠ ـ أوجد H عند $P (100, 80, 500)$ عند $t = 8\mu$ s لكل من المجالات E المعطاة فيما يلى اذا كانت $\omega = 10^5$rad/s والموجة تنتشر خلال مادة لها $\epsilon_R = 9$ ، $\mu_R = 1$ ، و $\sigma = 0$: (أ) $E_s = 600e^{-j\beta z}a_x$ V/m ، (ب) $E_s = 600\, e^{-j\beta x}\, a_x$ V/m ، (جـ) $E_s = 600\, e^{j\beta z}a_x$ V/m .

١١ ـ استخدم المنحنيات فى شكل ١١ ـ ٣ لتعيين قيم α و β لبوليستيرين عند $f = 100$MHz .

١٢ ـ أوجد α , β , ν , λ ، و η لفريت له الخصائص التالية عند 10 GHz و $\epsilon_R = 9$, $\mu_R = 4$, $\sigma = 10$m ℧ /m .

١٣ ـ حدد الخصائص (μ_R , ϵ_R , σ) لمادة فيها موجة مستوية منتظمة ذات 100MHz يكون لها طول موجة 1m ، وتوهين 2Np/m ، ومعاوقة ذاتية مقدارها 200Ω .

١٤ ـ موجة توصف بـ $E_s = (7{,}500\angle 30°)e^{-(\alpha+j\beta)z}a_x$ V/m تنتشر فى عازل له $\epsilon = 20$pF/m , $\mu = 5\mu$ H/m و $\sigma = 10\mu$ ℧/m ، عند تردد $\omega = 10^8$ rad/s . (أ) أكتب تعبيرا لـ $E(t)$ وقدر قيمتها لـ $z = 20$m , $t = 100$ns . (ب) اكتب تعبيرا لـ $H(t)$ قدر قيمتها لـ $z = 20$m , $t = 100$ns .



شكل ١١ ـ ١١ مجال كهروستاتيكى ومجال مغناطيسى ثابت يمكن أن يعطيا قيما غير متوقعة لمتجه بوينتنج . انظر مسألة ١٨ .

١٥ ـ موجة مستوية منتظمة ذات 2Mrad/S لها القيمة $E_s = (20\angle 90°)a_x$ mV/m فى المستوى $z = 0$. الوسط له البارامترات $\mu_R = 10$, $\epsilon_R = 2.5$, $\sigma = 10^{-4}$ ℧ /m . حدد قيما عددية لـ(أ) α ، (ب) β ، (جـ) λ ، (د) ν ، (هـ) η ، (و) E عند $z = 10m$, $t = 6\mu s$.

١٦ ـ موجة مستوية منتظمة ذات 150MHz تنتشر فى عازل ذى فقد له $\epsilon_R = 1.4$ و $\mu_R = 1$ ، و $\sigma/\omega\epsilon = 10^{-4}$. كم مترا تستطيع الموجة أن تنتقل فى العازل قبل أن : (أ) ينتصف اتساعها ، (ب) يتغير طورها $90°$ ؟

١٧ ـ عامل القدرة لمكثف معرف بجيب تمام زاوية طور المعاوقة ، و Q له هو ωcR ، حيث R هى المقاومة المتوازية . افرض أن مكثفا متوازى الألواح جعل مثاليا ذا عازل مميز بـ ϵ, σ , و μ_0 . أوجد كلا من عامل القدرة و Q بدلالة ظل الفقد .

١٨ ـ مجال كهروستاتيكى ومجال مغناطيسى ثابت مبينان فى نفس المنطقة من الفراغ فى شكل ١١ ـ ١١ . حدد اتجاه متجه بوينتنج عند النقط المختلفة فى كل انحاء النظام وبين كيف تكون نظرية بوينتنج محققة .

١٩ ـ خط نقل محورى له موصل داخلى نصف قطره 1mm وموصل خارجى نصف قطره الداخلى 5mm . افرض $\sigma = \infty$ لكلا الموصلين . المجال E فى الفضاء الحر بين الموصلين هو $E(\rho, \phi, z, t) = [100/(\rho, ln5)]\cos(10^9 t - 10z/3)a_\rho V/m$. حدد : (أ) $H(\rho,\phi,z,t)$ ، (ب) $\mathcal{P}(\rho,\phi,z,t)$ ، (جـ) $\mathcal{P}_{av}$ لخط النقل .

٢٠ ـ موجة (ليست موجة مستوية منتظمة) فى فضاء حر معطاة فى احداثيات كروية بالصورة $E = (100/r)\sin\theta\cos[\omega(t - r/c)]a_\theta V/m$. (أ) أوجد H . (ب) احصل على $\mathcal{P}$ وكامل على سطح كرة نصف قطرها r لتوجد القدرة اللحظية المنسابة للخارج خلال السطح . (جـ) احسب متوسط القدرة خلال السطح بالوات .

٢١ ـ متجه بوينتنج معطى بالصورة $300\cos^2(3 \times 10^8 t - z)a_z W/m^2$. أوجد متوسط القدرة العابرة : (أ) $1m^2$ من المستوى $z = 5$ ، (ب) $1\ m^2$ من المستوى المعرف بالنقط الثلاث ، $(0,0,0)$, $(0,4,0)$, $(3,0,2)$.

٢٢ ـ موصل معدنى له مقطع عرضى دائرى نصف قطره 1cm . دع $\sigma = 2 \times 10^7$ ℧ /m . الموصل يحمل تيارا مستمرا موزعا بانتظام مقداره 100A فى اتجاه a_z . (أ) احسب المقاومة R لطول 1m من الموصل واستخدم I^2R لتوجد فقد القدرة المستمرة فى ذلك الطول . (ب) احسب J , E , H و $\mathcal{P}$ داخل الموصل . (جـ) كامل $\mathcal{P}$ على السطح الاسطوانى المحتوى على طول 1m من الموصل وبين أن الاجابة هى نفسها كمافى جزء أ آنفا .

٢٣ ـ المجالات لموجة مستوية منتظمة ذات 500KHz فى عازل عديم الفقد معطاة بـ $E_s = 4a_x - a_y + 2a_z kV/m$ و $H_s = 6a_x + 18a_y - 3a_z A/m$. (أ) اعط وحدة متجه فى الاتجاه الذى تنتقل فيه الموجة . (ب) ماهى كثافة القدرة المتوسطة زمنيا فى الموجة ؟ (جـ) اذا كانت $\mu_R = 1$ ، أوجد ϵ_R .

٢٤ ـ كثافة التيار عند سطح لوح نحاسى سميك معطاة بـ $J = 10^4\cos 1000t a_x A/m^2$. المنطقة $z > 0$ نحاس . ارسم منحنى لـ J_x مع z لـ $t = 0$.

٢٥ ـ أوجد التردد المؤثر والموصلية لمادة جيدة التوصيل لها سرعة الانتشار تساوى عُشر فى المائة من سرعة الضوء فى فضاء حر ، والتى فيها طول الموجة 0.3mm . افترض أن المادة غير مغناطيسية .

٢٦ ـ موصل صلب لايصدأ ذو مقطع عرضى دائرى يحمل تيارا كليا $0.8\cos\omega t$A دع $\sigma = 10^6$ ℧/m , $\mu_R = 100$ ، و $\rho = 4$mm . ماهى الفولتية المؤثرة (rms) التى تظهر عبر 100m من الموصل ، وماكمية متوسط القدرة التى تفقد فيه اذا كانت ω تساوى : (أ) 1rad/s ، (ب) 10^9rad/s ؟

٢٧ ـ المنطقة $z < 0$ هى مادة لها $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ ، و $\sigma = 1,000$ ℧ /m ، و $z > 0$ هى فضاء حر . عند $(0,0,0^+)$, $H = 100\cos 4 \times 10^8 t\ a_x$ A/m .

(أ) أوجد $H(t)$ عند $(0,0,0)$ (ب) بفرض انتشار موجة مستوية منتظمة فى اتجاه a_y لـ $z > 0$ ، أوجد $E(t)$ عند $(0,0,0^+)$. (جـ) بفرض انتشار موجة مستوية منتظمة فى اتجاه $-a_z$ لـ $z < 0$ ، أوجد $E(t)$ عند $(0,0,0^-)$.

٢٨ ـ نتائج نموذجية لتربة جافة معطاة فيما يلى لأمدية تردد مختلفة . بحساب قيم لثابت التوهين ، أحصل على اجابات من الرتبة الأولى لكل من الأسئلة الاتية : (أ) هل سيكون هوائيا ذا 20kHz فعالا اذا دفن على عمق 2ft فى الأرض؟ استخدم $\sigma = 2 \times 10^{-4}$ ℧/m , $\epsilon_R = 2.8$ (ب) هل يمكن استخدام نظام رادارى ذى 10GHz للبحث عن خامات معدنية على اعماق 100m ؟ استخدم $\sigma = 8 \times 10^{-3}$ ℧/m , $\epsilon_R = 2.5$. (جـ) هل تكون دودة أرض أكثر أمانا فى التعرض لاشعاع كهرومغناطيسى اذا أنحرفت بضع أقدام تحت الأرض عندما تمر بخط قوى ذى 60Hz ؟ استخدم $\sigma = 8 \times 10^{-5}$ ℧/m , $\epsilon_R = 2.9$.

٢٩ ـ خط نقل محورى مصنوع من نحاس أصفر نصف قطره الداخلى : $a = 2$mm و $b = 8mm$. التشغيل عند 300MHz . احسب المقاومة لكل متر طولى من :

(أ) الموصل الداخلى ، (ب) الموصل الخارجى ، (جـ) الخط المحورى .

٣٠ ـ الموجة $E^+ = 10\cos(3 \times 10^9 t - 30\pi z)a_x$V/m ساقطة على حد مستوى عند $z = 0$. اذا كانت $\mu_R = 1$ فى كل مكان و $\epsilon_R = 4$ لـ $z > 0$ ، أوجد E و H لـ $z > 0$ ،

٣١ ـ موجة مستوية منتظمة لها $\omega = 5 \times 10^8$ rad/s ساقطة من وسط $Z<D$ A ، $\sigma_A = o$ ، $\epsilon_{RA} = 4$ ، $\mu_{R\,A} = 1$ ، على وسط :

$\mu_{RB} = 4$, $\epsilon_{RB} = 10$, $\sigma_B = 0$, $z > 0$. اذا كانت شدة المجال الكهربى للموجة الساقطة هى : 2.4V/m عند $z = 0$ عند $t = 0$ ، أوجد :

(أ) β_A و β_B ، (ب) Γ ، (جـ) $E_A(t)$ ، (د) $E_B(t)$ ، (هـ) H_A عند $(0,0,-1)$ عند $t = 5$ns .

٣٢ ـ مادتان غير مغناطيسيتين عديمتا الفقد لهما سطح بينى مستوى . موجة مستوية منتظمة ساقطة على الحد من منطقة 1 . (أ) أوجد النسبة $\epsilon_{R2}/\epsilon_{R1}$ اذا أنفذت ثلث القدرة الساقطة الى داخل منطقة 2 . (ب) أعد بالنسبة للانتقال فى الاتجاه المضاد .

٣٣ ـ موجة مستوية منتظمة متنقلة فى بوليستيرين فى اتجاه a_z تقابل موصلا مثاليا عند $z = 0.82$cm . اذا كانت $f = 16$ GHz : (أ) عين مواقع المستويات التى عندها $E = 0$ ، (ب) أوجد نسبة شدة المجال الكهربى العظمى الى شدة المجال المغناطيسى العظمى فى البوليستيرين .

٣٤ ـ المجال $E = 45\sin 10^9 t \cos 5z\, a_y$ V/m موجود فى وسط عديم الفقد حيث : $\mu = \mu_0$. (أ) استخدم معادلات ماكسويل لتحديد H . (ب) مرة أخرى استخدم معادلات ماكسويل وأوجد ϵ_R . (جـ) اذا كانت المنطقة التى أنشىء فيها المجال هى $a < z < b$ ، حدد القيمتين الموجبتين الصغيرتين لـ a و b حيث يمكن أن يوجد مستويات موصلة .

٣٥ ـ المنطقة النصف اللانهائية $z < 0$ هى فضاء حر ، بينما $\epsilon = 20$pF/m , $\mu = 5\mu$ H/m ، و $\sigma = 0.004$ ℧/m لـ $z > 0$. موجة مستوية منتظمة $E^+_{x1} = 100e^{-\alpha_1 z}\cos(10^8 t - \beta_1 z)$ V/m ، ساقطة على الحد . (أ) أوجد α_1 و β_1 . (ب) أوجد ثابت الانعكاس عند الحد . (جـ) أوجد E^-_{x1} . (د) E^+_{x2} .

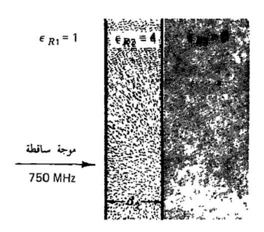
٣٦ ـ موجة مستوية منتظمة ذات 200MHz لها اتساع مجال كهربى مقداره 2V/m يسقط عموديا على حد هواء الى بوليستيرين . كلا المنطقتين لانهائى السمك . (أ) أوجد القيمة العظمى لشدة المجال الكهربى فى الهواء وموضعها . (ب) أعد للقيمة الصغرى . (جـ) أوجد القيم العظمى والصغرى لشدة المجال الكهربى فى البوليستيرين ومواضعها .

٣٧ ـ موجة مستوية منتظمة مع $\lambda = 3$cm فى فضاء حر تسقط عموديا على رادوم من زجاج ليفى (fiberglass) $(\sigma = 0\ ,\ \epsilon_R = 4.9)$. (أ) أى سمك من الزجاج الليفى سوف لاينتج انعكاسا ؟ (ب) ما النسبة المئوية من الطاقة الساقطة ستنفذ خلال الزجاج الليفى اذا تردد أنقص الموجة الساقطة بعشرة فى المائة ؟

٣٨ ـ موجة مستوية منتظمة ، $H_1 = 2\cos(\omega t - \beta_1 z)a_y$A/m ، تنتقل فى وسط يميز بـ $\epsilon_{R1} = 4$ ، $\mu_{R1} = 1$ ، و $\sigma_1 = 0$. تقابل الموجة مادة ثانية فى منطقة 2 ، $z > 0$ ، لها $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 50$ ، و $\sigma_2 = 0$. اذا كانت $f = 5$GHz ، أوجد : (أ) نسبة الموجة الواقفة لـ E فى منطقة 1 ، (ب) القدرة المتوسطة لكل متر مربع التى تنفذ الى داخل منطقة 2 .

٣٩ ـ فى شكل ١١ ـ ٥ ، دع منطقة 1 تكون فضاء حر ، بينما $\mu_{R2} = 1$ ، $\sigma_2 = 0$ ، و ϵ_{R2} مجهولة . أوجد ϵ_{R2} اذا كان : (أ) اتساع E_1 ثلث تلك لـ E^+_1 ؛ (ب) $P^-_{1,av}$ ثلث $P^+_{1,av}$ ، (جـ) $|E_1|_{min}$ ثلث $|E_1|_{max}$.

٤٠ ـ دع $\epsilon_{R1} = 9$ ، $\mu_1 = \mu_2$ ، و $\sigma_1 = 0$ لـ $z < 0$ ، بينما $\epsilon_2 = \epsilon_0$; $\mu_2 = \mu_0$ و $\sigma_2 = 0$ لـ $z > 0$. موجة ساقطة فى منطقة 1 معطاة بـ : $E^+_1 = 20\cos(2\pi 10^8 t - \beta_1 z)a_x$ V/m . (أ) ارسم $|E_1|$ تخطيطيا مع $-0.6 < z < 0$m . (ب) لأى مدى من z حول قيمة صغرى تكون $|E_1| \leqslant 1.1$ $|E_1|_{min}$ ؟ (جـ) لأى مدى من z حول قيمة عظمى تكون $|E_1| \geqslant 0.9|E_1|_{max}$ ؟ (د) أيهما يعين موضعها بأكثر دقة تجريبيا ، $|E_1|_{min}$ أم $|E_1|_{max}$ ؟



شكل ١١ ـ ١٢ انظر مسألة ٤١ .

٤١ ـ المناطق الثلاث المبينة فى شكل ١١ ـ ١٢ جميعها عديمة الفقد وغير منغناطيسية . حدد نسبة الموجة الواقفة لـ E فى المنطقة اليسرى عندما تساوى d_2 : (أ) 0 ، (ب) 5cm ، (جـ) 3cm .

الفصل الثانى عشر

خطوط النقل

تستخدم خطوط النقل لنقل طاقة واشارات كهربية من نقطة الى أخرى . ويصل خط النقل الأساسى منبعا بحمل . هذا قد يكون جهاز ارسال وهوائى ، مسجل تغير وقلب الذاكرة فى حاسب رقمى ، محطة توليد هيدروكهربائية ومحطة فرعية على بعد عدة مئات من الأميال ، هوائى تليفزيون ومستقبل ، أو قناة واحدة لمائدة استريو دوارة ومدخل واحد للمضخم المتقدم . عدة أنواع مختلفة من خطوط النقل متضمنة فى هذه الاستخدامات المختلفة ، وسندرس خصائصها فى القسم الثانى من هذا الفصل .

كيفما كان نحتاج أولا أن نبين أن هناك تناظرا مباشرا بين خط النقل المنتظم والموجة المستوية المنتظمة . سنجد أن الجهد المخصص للموجة المستوية المنتظمة فى الفصل السابق يجعل من الممكن استنباط نتائج مشابهة لخط النقل المنتظم بسهولة وبسرعة . توزيعات المجال للموجة المستوية المنتظمة ولخط النقل المنتظم كلاهما معروف بانها موجات كهرومغناطيسية مستعرضة (TEM) لأن E و H كلاهما عمودى على اتجاه الانتشار ، أو كلاهما يقع فى المستوى المستعرض . التشابه الكبير فى النتائج هو نتيجة مباشرة للحقيقة أننا نتعامل مع موجات TEM فى كل حالة . على أنه فى خط النقل من الممكن والمعتاد تعريف فولتية وتيار . هذه الكميات هى تلك التى سنكتب لها معادلات ، نحصل على حلول ، ونوجد ثوابت انتشار ، معاملات انعكاس ، ومعاوقات دخل . سنعتبر أيضا القدرة بدلا من كثافة القدرة .

اضافة هامة لوسائل تحليلنا وتصميمنا ستكون استخدام طريقة تقنية بيانية لحل مسائل الانعكاس والمواءمة . هذه الطريقة يمكن تطبيقها أيضا على الموجة المستوية المنتظمة .

١٢ - ١ : معادلات خط النقل

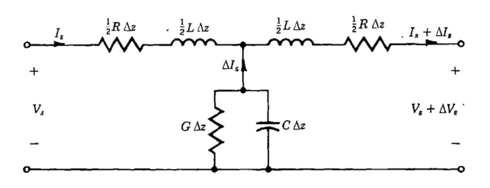
سنحصل أولا على المعادلات التفاضلية التى يجب أن يحققها الفولتية أو التيار على خط نقل منتظم . هذا يمكن أن ينجز بأى من عدة طرق . مثلا ، طريقة واضحة قد تكون حل معادلات ماكسويل خاضعة لشروط الحدود المفروضة بخط النقل الخاص الذى نعتبره . نستطيع حينئذ تعريف فولتية وتيار ، وهكذا نحصل على معادلاتنا المرغوبة . من الممكن أيضا حل مسألة الموجة TEM العامة مرة بلاعودة . بدلا من ذلك ، سننشىء نموذج دائرة لطول عنصرى تزايدى من الخط ، نكتب معادلتى دائرة ،

ونبين أن المعادلات المحصلة تناظر المعادلات الأساسية التى استنبطت منها معادلة الموجة فى الفصل السابق بهذه الوسيلة سنبدأ ربط المجال ونظرية الدوائر معا ، مهمة ستتابعها مرة أخرى فى الفصل التالى .

نموذجا للدائرة سيحتوى على المحاثة ، المكثف ، المواصلة المتصلة على التوازى ، والمقاومة المتصلة على التوالى المرتبطة بطول عنصرى تزايدى من الخط . دعنا نعمل على التفكير بدلالة خط نقل محورى يحتوى على عازل ذى انفاذية μ (عادة μ_0) ، سماحية ϵ ، وموصلية σ . الموصلان الداخلى والخارجى لهما موصلية عالية σ_c . بمعرفة تردد التشغيل والأبعاد ، نستطيع حينئذ تعيين قيم R , G , L و C على اساس لكل وحدة طول باستخدام صيغ مستنبطة فى فصول سابقة . سنراجع هذه التعبيرات ونجمع المعلومات عن عدة أنواع مختلفة من الخطوط فى القسم التالى .

دعنا نفرض مرة أخرى انتشارا فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. لذلك نفصل جزءا طوله Δz يحتوى مقاومة $R\Delta z$ ، محاثة $L\Delta z$ ، مواصلة $G\Delta z$ ، وسعة $C\Delta z$ ، كما هو مبين فى شكل ١٢ - ١ . حيث أن الجزء من الخط يبدو نفسه من كلا الطرفين ، نقسم العناصر المتصلة على التوالى بالنصف لتعطى شبكة متماثلة . وكنا نستطيع على حد سواء تماما وضع نصف المواصلة ونصف السعة عند كل طرف .

حيث أننا متعودون فعلا على الخصائص الأساسية لانتشار الموجة ، دعنا نتحول فى الحال لحالة التغير الجيبى مع الزمن ، وسنستخدم تدوين الكميات المركبة التى استنبطناها فى الفصل الأخير .



شكل ١٢ - ١ طول عنصرى تزايدى من خط نقل منتظم . R , G , L ، و C دوال فى شكل ومواد خط النقل .

الفولتية V بين الموصلين تكون عامة دالة فى z و t مثلا ، بالصورة ،

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

يمكننا استخدام متطابقة أويلر للتعبير عن هذا فى تدوين مركب ،

$$V = \text{Re}\ V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} = \text{Re}\ V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}$$

باسقاط Re وحذف $e^{j\omega t}$ ، نحول الفولتية الى مطاور ، الذى ندل عليه برمز سفلى s ،

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z}$$

يمكننا الان كتابة معادلة الفولتية حول محيط الدائرة لشكل ١٢ ـ ١ ،

$$V_s = (\tfrac{1}{2}R\ \Delta z + j\tfrac{1}{2}\omega L\ \Delta z)I_s + (\tfrac{1}{2}R\ \Delta z + j\tfrac{1}{2}\omega L\ \Delta z)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

أو

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -(R + j\omega L)I_s - (\tfrac{1}{2}R + j\tfrac{1}{2}\omega L)\ \Delta I_s$$

بينما ندع Δz تقترب من الصفر ، تقترب ΔI_s أيضا من الصفر ، ويتلاشى الحد الثانى على اليمين . فى النهاية ،

$$\boxed{\frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s} \qquad (١)$$

باهمال تأثيرات الرتبة الثانية ، نقرب الفولتية عبر الفرع الأوسط باعتبارها V_s ونحصل على معادلة ثانية ،

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} \doteq -(G + j\omega C)V_s$$

أو

$$\boxed{\frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s} \qquad (٢)$$

بدلا من حل هذه المعادلات ، دعنا نوفر بعض الوقت بمقارنتها مع المعادلات التى تنتج من معادلات الالتواء لماكسويل لموجه مستوية منتظمة . من

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

نضع $\mathbf{E}_s = E_{xs}\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{H}_s = H_{ys}\mathbf{a}_y$ ، حيث E_{xs} و H_{ys} دوال فى z فقط ، ونحصل على المعادلة المقياسية المفردة

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu H_{ys} \qquad \left[\frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s \qquad (1)\right]$$

مع بيان معادلة (١) للمقارنة السهلة . بالمثل ، من

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s$$

يكون لدينا

$$\frac{dH_{ys}}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon)E_{xs} \qquad \left[\frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s \quad (٢)\right]$$

المقارنة الدقيقة للمعادلتين فى السطر الأخير تبين تناظرا مباشرا بين أزواج الكميات الاتية : I_s و H_{ys} , G ، و σ , C و ϵ ، و V_s و E_{xs} . استبدال المتغيرات فى أحد المعادلات بالكميات المقابلة ينتج المعادلة الأخرى . التناظر يكون قويا خاصة فى هذا الزوج من المعادلات ، لأن الكميات المقابلة تقاس تقريبا بنفس الوحدات .

باجراء نفس هذا التناظر للزوج الأول من المعادلات ، نرى أنه يستمر فى الاداء ويعطى زوج تناظرا اضافياً ، L و μ . ومع ذلك هناك أيضا مفاجأة ، لأن معادلة خط النقل أكثر تعقيدا من معادلة المجال . ليس هناك مناظر لمقاومة الموصل لكل وحدة طول R . مع أنه قد يكون فن بيع جيدا أن نقول أن هذا يبين أن نظرية المجال أبسط من نظرية الدوائر ، دعنا نكون عادلين فى تحديد سبب هذا الحذف . مقاومة الموصل يجب أن تحدد بالحصول على حل مستقل لمعادلات ماكسويل داخل الموصلات وارغام الحلين على تحقيق شروط الحدود الضرورية عند السطح البينى . اعتبرنا من قبل فى الفصل الخامس مجالات تيار ثابتة فى موصلات ، ولقد اعتبرنا للتو حالة التردد العالى تحت ستار « الظاهرة السطحية » ، مع ذلك ، لقد فحصنا قليلا فقط مسألة مواءمة حلين عند الحد . هكذا يكون الحد الذى حذف فى معادلة المجال يمثل مسألة المجالات داخل الموصلات ، وحل هذه المسألة يمكننا من الحصول على قيمة لـR فى معادلة الدائرة . ونبقى على التناظر بقبول استبدال $R + j\,\omega L$ بـ $j\,\omega\mu$[١] .

شروط الحدود على V_s و E_{xs} هى ذاتها ، كما تكون ، تلك لـ I_s و H_{ys} ، وبالتالى يمكن الحصول على حل معادلتى دائرتنا من معلوماتنا عن حل معادلتى المجال ، مثلما حصل عليه فى الفصل الأخير . من

$$E_{xs} = E_{x0}\,e^{-\gamma z}$$

نحصل على موجة الفولتية

$$(٣) \quad V_s = V_0\,e^{-\gamma z}$$

---

(١) عندما تدخل مواد فريت مسألة المجال ، غالبا تستخدم انفاذية مركبة $\mu = \mu' - j\,\mu''$ لتشمل تأثير الفقد غير الأومى فى تلك المادة . تحت هذه الظروف الخاصة تكون $\omega\mu''$ مناظرة لـ R .

التى تنتشر فى اتجاه +z باتساع $V_s = V_0$ عند $z = 0$ و ($V = V_0$ عند $z = 0$, $t = 0$ لـ $\Psi = 0$) . ثابت الانتشار للموجة المستوية المنتظمة

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

يصبح

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} \qquad (٤)$$

طول الموجة مازال يعرف بالمسافة التى تعطى تغير طور قدره 2πrad ، لذلك

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}} \qquad (٥)$$

أيضا ، سرعة الطور قد عرفت بالصورة

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta}} \qquad (٦)$$

وهذا التعبير صحيح لكل من الموجة المستوية المنتظمة ، وخطوط النقل .
بالنسبة لخط عديم الفقد $(R = G = 0)$ نرى أن

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

لهذا

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad (٧)$$

من تعبير شدة المجال المغناطيسى

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

نرى أن موجة التيار المتنقلة فى الاتجاه الموجب

$$\boxed{I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z}} \qquad (٨)$$

مرتبطة بموجة الفولتية المتنقلة فى الاتجاه الموجب **بمعاوقة مميزة** Z_0 تناظر η حيث أن

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

يكون لدينا

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (٩)$$

عندما ترتطم موجة مستوية منتظمة فى وسط 1 بالسطح البينى مع وسط 2 ، الجزء من الموجة الساقطة التى تنعكس يسمى معامل الانعكاس Γ ،

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

على ذلك يكون الجزء من موجة الفولتية الساقطة الذى ينعكس بخط ذى معاوقة مميزة مختلفة ، مثلا Z_{02} ، هو

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (١٠)$$

بمعرفة معامل الانعكاس ، يمكننا ايجاد نسبة الموجة الواقفة ،

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (١١)$$

أخيرا ، عندما تكون $\eta = \eta_2$ لـ $z > 0$ ، تكون نسبة E_{xs} الى H_{ys} عند $z = -l$ هى

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

ولذلك معاوقة المدخل

$$Z_{in} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l} \quad (١٢)$$

هى نسبة V_s الى I_s عند $z = -l$ حيث $Z_0 = Z_{02}$ لـ $z > 0$. غالبا ننهى خط نقل عند $z = 0$ مع معاوقة حمل Z_l والتى قد تمثل هوائيا ، دائرة دخل لمستقبل تليفزيون ، أو مضخم على خط تليفون . معاوقة الدخل عند $z = -l$ تكتب حينئذ ببساطة بالصورة

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad (١٣)$$

سنستخدم هذه المعادلات لنكتسب بعض التعود مع خطوط النقل بمجرد أن نستطيع تعيين قيم للبارامترات المتعلقة R , G , L ، و C .

ت ١٢ ـ ١ : خط نقل يعمل عند $\omega = 10^8$rad/s له قيم للبارامترات هذه ·
$R = 0.1\ \Omega/m,\ L = 0.2\ \mu H/m,\ G = 10\ \mu℧/m$, and $C = 100$ pF/m.
أوجد : (أ) α ، (ب) β ، (جـ) λ ، (د)v ، (هـ) Z_0 .

ت ١٢ ـ ١ : خط نقل يعمل عند $\omega = 10^8$ rad/s له قيم للبارامترات هذه :
$R = 0.1\ \Omega/m$, $L = 0.2\mu$ H/m , $G = 10\mu$ /m ، و $C = 100$pF/m . أوجد :
(أ) α ، (ب) β ، (جـ) λ ، (د) ، (هـ) Z_0 .

الاجابة :
1.345mNp/m , 0.447rad/m , 14.05m , 2.24×10^8m/s , $44.7\angle -0.11^\circ\ \Omega$.

١٢ ـ ٢ : بارامترات خط النقل

دعنا نستخدم هذا القسم لنجمع نتائج سابقة ونستنبط أخرى جديدة حيثما يكون ضروريا ، لكى تكون قيما لـ R , G , L ، و C متاحة للأنواع الأبسط من خطوط النقل . نبدأ برؤية كم من التعبيرات موجودة لدينا من قبل لكابل محورى ذى نصف قطر داخلى a ونصف قطر خارجى b (شكل ١٢ ـ ٢أ) . السعة لكل وحدة طول ، محصول عليها فى الفصل الخامس ، هى

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln (b/a)} \qquad (١٤)$$

قيمة السماحية المستخدمة يجب أن تكون مناسبة لمدى الترددات العاملة المعتبرة . المواصلة لكل وحدة طول يمكن أن تعين بسهولة باستخدام تناظر التيار الموصوف فى قسم ٦ ـ ٣ . على ذلك ،

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln (b/a)} \qquad (١٥)$$

حيث σ هى موصلية العازل بين الموصلين عند التردد العامل . المحاثة لكل وحدة طول حسبت للكابل المحورى فى الفصل السابق ،

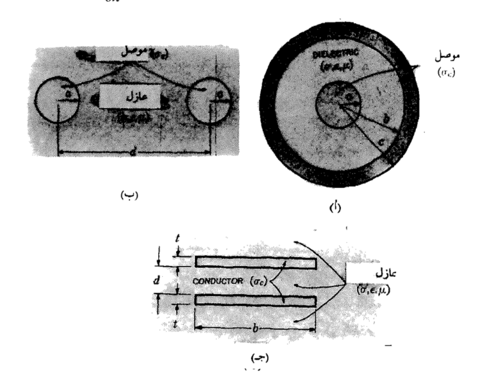
$$L_{ext} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \qquad (١٦)$$

وهى محاثة خارجية ، لأن حسابها لم يأخذ فى الاعتبار أى تدفق داخل أى الموصلين . على أن هذه تكون عادة تقريبا ممتازا للمحاثة الكلية لخط نقل عالى التردد ، لأن عند ترددات راديو نموذجية عاملة ، يكون العمق السطحى صغيرا لدرجة أن يوجد هناك تدفقا مهملا داخل أى الموصلين ومحاثة داخلية مهملة . لاحظ أن $L_{ext}C = \mu\epsilon$ ، ونكون

لذلك قادرين على ايجاد قيمة المحاثة الخارجية لأى خط نقل الذى نعرف له السعة وخصائص العازل .

لكى نعطى صورة معقولة الاكتمال ، مع ذلك ، دعنا نصرف فقرات قليلة للحصول على تعبيرات للمحاثة الداخلية . للترددات المنخفضة جدا حيث يكون توزيع التيار منتظما ، تعطى المحاثة الداخلية للموصل الداخلى فى الفصل التاسع بالصورة

$$L_{a,\,\text{int}} = \frac{\mu}{8\pi} \quad \text{H/m} \qquad (١٧)$$



شكل ١٢ ـ ٢ : هندسة شكل خط النقل : (أ) المحورى ، (ب) ذو السلكين و (جـ) المستوى . مفترض عوازل متجانسة .

هذا التعبير مفيد عند ترددات نقل القدرة ، وليس لخطوط نقل ترددات عالية .

تعيين المحاثة الداخلية للقشرة الخارجية هو مسألة أكثر صعوبة ، ومعظم العمل مطلوب فى مسألة ٧ . ومن تلك المسألة ، الطاقة المختزنة لكل وحدة طول فى قشرة اسطوانية خارجية نصف قطرها الداخلى b ونصف قطرها الخارجى c مع توزيع تيار منتظم هى

$$W_H = \frac{\mu I^2}{16\pi(c^2 - b^2)}\left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^4}{c^2 - b^2}\ln\frac{c}{b}\right)$$

على ذلك تكون المحاثة الداخلية للموصل الخارجى عند ترددات منخفضة جدا هى

$$L_{bc,\,\text{int}} = \frac{\mu}{8\pi(c^2 - b^2)}\left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^4}{c^2 - b^2}\ln\frac{c}{b}\right) \qquad (١٨)$$

عند ترددات منخفضة يحصل على المحاثة الكلية بضم (١٦) ، (١٧) ، و (١٨) :

$$L_{\text{low}} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(c^2 - b^2)}\left(b^2 - c^2 + \frac{4c^4}{c^2 - b^2}\ln\frac{c}{b}\right)\right] \qquad (١٩)$$

استخدام (١٩) يجب أن يقتصر على تلك الموصلات المحورية ذات توزيع التيار المنتظم بدون أى ظاهرة سطحية ملحوظة .

عندما يزيد التردد ، تنقص المحاثة الداخلية . دعنا نعتبر ترددا متوسطا ، حيث لاتزال المحاثة الداخلية تعطى مساهمة هامة للمحاثة الكلية . نفرض أن العمق السطحى δ أقل بكثير من نصف قطر الموصل الدخلى a ، ويكون لدينا حينئذ طبقة رقيقة من التيار عند سطح الموصل . التيار فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ ، وتكون لذلك المركبة المماسة لـ $\mathbf{J}_s$ عند سطح الموصل فى اتجاه $\mathbf{a}_z$ ، لأن $\mathbf{J}_s = \sigma_c \mathbf{E}_s$ ، حيث σ_c هى موصلية الموصل . تكون شدة المجال المغناطيسى مماسة عند سطح الموصل ، و

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi a}$$

الان ، يمكن أخذ نسبة E_{zs} الى $H_{\phi s}$ عند السطح بوصفها المعاوقة الذاتية للمادة الموصلة لموجة مستوية منتظمة . مع أننا نعمل مع شكل هندسى اسطوانى ، يكون العمق السطحى أقل كثيرا من نصف القطر ، والطبقة الرقيقة يمكن أن تعامل كمستوى ملفوف ذى عرض $2\pi a$. من قسم ١١ ـ ٥ ، حينئذ ،

$$\left.\frac{E_{zs}}{H_{\phi s}}\right|_{\rho=a} = \frac{1 + j1}{\sigma_c \delta}$$

أو

$$\left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho=a} = \frac{1 + j1}{2\pi a \delta \sigma_c}$$

حيث أن E_{zs} هى الفولتية لكل وحدة طول فى اتجاه تيار التوصيل ، فان خارج القسمة هذا يجب أن يكون المعاوقة لكل وحدة طول ، أى أن ،

$$Z = R + j\omega L_{\text{int}} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c} + j\frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c}$$

المحاثة هى من النوع الداخلى ، لأنها تعتمد على الموصلية σ_c للمادة الموصلية وليس على الالتواءات واللفات التى يعملها السلك فى مساره خلال الفراغ . لاحظ أن هذه المعاوقة تكون صفرا لموصل تام . على ذلك نحصل على المحاثة الداخلية عند الترددات العالية للموصل الداخلى ،

$$(٢٠) \quad L_{a,\,\text{int}} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c \omega} = \frac{\mu \delta}{4\pi a} \qquad (\delta \ll a)$$

وللموصل الخارجى

$$(٢١) \quad L_{bc,\,\text{int}} = \frac{1}{2\pi b \delta \sigma_c \omega} = \frac{\mu \delta}{4\pi b} \qquad (\delta \ll c - b)$$

لذلك تكون محاثة الترددات العالية الكلية هى

$$(٢٢) \quad \boxed{L_{\text{high}} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln \frac{b}{a} + \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] \qquad (\delta \ll a,\, \delta \ll c - b)}$$

تعبيرنا للمعاوقة انفا يعطينا أيضا قيمة للمقاومة لكل وحدة طول ،

$$(٢٣) \quad \boxed{R = \frac{1}{2\pi \delta \sigma_c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad (\delta \ll a,\, \delta \ll c - b)}$$

عندما توجد الظاهرة السطحية . هذه مقاومة داخلية ، لأن المقاومة الخارجية تمثلها المواصلة لكل وحدة طول . فقد آخر والذى قد يساهم بحد مقاومة اضافى هو الاشعاع من خط نقل غير مدرع أو من الطرف المفتوح لكابل محورى .

مازال هناك فترة تردد قد أهملناها ، تلك التى يوجد لها بعض الظاهرة السطحية ، لكن العمق السطحى مقارن بنصف القطر . توزيع التيار محكوم بدوال بسل ، ولكل من المقاومة والمحاثة الداخلية تعبيرات معقدة . قيم مجدولة فى الكتيبات ، ومن الضرورى استخدامها لأحجام موصل أصغر جدا عند ترددات عالية ، ولأحجام موصل أكبر المستخدمة فى نقل قدرة عند ترددات منخفضة .

المعاوقة المميزة يعبر عنها عادة بدلالة L_{ext} والسعة ،

$$(٢٤) \quad \boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{ext}}}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}}$$

لخط النقل ذى السلكين فى شكل ١٢ ـ ٢ب مع موصلات ذات نصف قطر a وموصلية σ_c مع فاصل d بين المركزين فى وسط ذى انفاذية μ ، سماحية ϵ ، وموصلية σ ، وجد أن السعة تكون

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)} \tag{٢٥}$$

أو

$$C \doteq \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)} \qquad (a \ll d)$$

المحاثة الخارجية هى

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2a} \tag{٢٦}$$

أو

$$L_{\text{ext}} \doteq \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d}{a} \qquad (a \ll d)$$

بينما المحاثة الكلية عند الترددات العالية هى

$$L_{\text{high}} = \frac{\mu}{\pi}\left(\frac{\delta}{2a} + \cosh^{-1}\frac{d}{2a}\right) \qquad (\delta \ll a) \tag{٢٧}$$

المقاومة لكل متر طول هى

$$R = \frac{1}{\pi a\delta\sigma_c} \qquad (\delta \ll a) \tag{٢٨}$$

والمواصلة يحصل عليها مرة أخرى من السعة ،

$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)} \tag{٢٩}$$

باستخدام تعبيرات المحاثة الخارجية والسعة ، نحصل على قيمة للمعاوقة المميزة

$$Z_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\cosh^{-1}\frac{d}{2a} \tag{٣٠}$$

اذا كان لدينا خط النقل ذو المستويين المتوازيين أو خط النقل المستوى فى شكل ١٢ ـ ٢جـ ، ذو مستويين موصلين لهما موصلية σ_c ، وفاصل d ، وعازل ذو بارامترات ϵ , μ ، و σ ، حينئذ يمكننا بسهولة تعيين بارامترات الدائرة لكل وحدة طول لعرض b .

من الضرورى افتراض اما أن $b \gg d$ أو أننا نعتبر عرض b من نظام دليلى أعرض بكثير . يكون لدينا

$$C = \frac{\epsilon b}{d} \quad (٣١)$$

$$L_{ext} = \mu \frac{d}{b} \quad (٣٢)$$

$$L_{total} = \mu \frac{d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b \omega} = \frac{\mu}{b}(d + \delta) \qquad (\delta \ll t) \quad (٣٣)$$

هنا قد فرضنا ظاهرة سطحية متسعة جدا بحيث أن t , $\delta \ll t$ هى سمك أى من المستويين . أيضا ،

$$R = \frac{2}{\sigma_c \delta b} \qquad (\delta \ll t) \quad (٣٤)$$

$$G = \frac{\sigma b}{d} \quad (٣٥)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{ext}}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{d}{b}} \quad (٣٦)$$

ت ١٢ ـ ٢ : كل من خطوط النقل عديمة الفقد التالية تعمل عند 400MHz مع معاوقة حمل مقدارها 100Ω . حدد λ و Γ لكل خط : محورى :

$\mu_R = 1$, $\epsilon_R = 3.1$, $b = 2.8$mm , $a = 0.5$mm ،

(ب) ذو سلكين $\mu_R = 1$, $\epsilon_R = 5$, $d = 9$mm , $a = 0.5$mm

(جـ) مستوى $\mu_R = 1$, $\epsilon_R = 2.2$, $b = 5$mm .

الاجابة : 0.816 , 50.6cm , -0.215 , 33.5cm , 0.260 , 42.6cm .

ت ١٢ ـ ٣ : خط نقل محورى يعمل عند 400MHz له $\sigma_c = 3 \times 10^7$ ℧/m , $\mu_R = 1$

$a = 0.5$mm , $b = 2.8$ mm , $\epsilon_R = 3.1$ و $\sigma = 10^{-5}$ ℧/m . أوجد قيما مناسبة لـ : (أ) المحاثة لكل متر طول ؛ (ب) ثابت التوهين .

الاجابة : 0.346μH/m , 24.2_mNp/m .

١٢ ـ ٣ : بعض أمثلة خط النقل

فى هذا القسم سنطبق كثيرا من النتائج التى قد حصلنا عليها فى القسمين السابقين على عدة مسائل خط نقل نموذجية . سنبسط عملنا بقصر اهتمامنا على الخط عديم الفقد .

دعنا نبدأ بفرض خط ذى سلكين ذو 300Ω $(Z_0 = 300\Omega)$ ، مثل سلك التوصيل من الهوائى لتليفزيون أو مستقبل FM . الدائرة مبينة فى شكل ١٢ ـ ٣ . الخط طوله 2m وثابت العازل يكون بحيث السرعة على الخط هى 2.5×10^8 m/s . سننهى الخط بمستقبل ذى مقاومة دخل مقدارها 300Ω ونمثل الهوائى بمكافئة تبعا لنظرية ثفنان ، 300Ω على التوالى مع 60V عند 100MHz . فولتية الهوائى هذه أكبر بعامل 10^5 تقريبا عما تكون عليه فى حالة عملية ، ولكنها أيضا تعطى قيما أبسط للعمل بها ؛ لكى نفكر أفكارا عملية ، اقسم التيارات أو الفولتيات على 10^5 ، اقسم القدرة على 10^{10} ، واترك المعاوقات كما هى .

حيث أن معاوقة الحمل تساوى المعاوقة المميزة ، فان الخط يكون موائما ، معامل الانعكاس يساوى صفرا ، ونسبة الموجة الواقفة هى الوحدة . للسرعة والتردد المعطيين ، يكون طول الموجة على الخط 2.5m وثابت الطور 0.8πrad/m ، ثابت التوهين صفرا . الطول الكهربى للخط βl هو $0.8\pi \times 2$ ، أو 1.6πrad . هذا الطول يمكن أن يعبر عنه كـ$288°$ ، أو 0.8 طول موجة .

معاوقة الدخل المقدمة لمنبع الفولتية هى 300Ω ، وحيث أن المعاوقة الداخلية للمنبع هى 300Ω ، تكون الفولتية عند المدخل للخط هى نصف 60V أو 30V . المنبع متوائم مع الخط ويعطى القدرة العظمى المتاحة للخط . حيث أنه ليس هناك انعكاس ولاتوهين ، تكون الفولتية عند الحمل هى 30V ، ولكنها تتأخر فى الطور بـ $1.6\ \pi$rad . على ذلك

$$V_{\text{in}} = 30 \cos 2\pi 10^8 t \qquad \text{V}$$

بينما

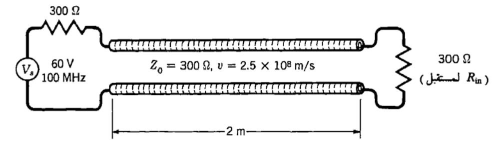
$$V_L = 30 \cos (2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \qquad \text{V}$$

تيار الدخل هو

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{300} = 0.1 \cos 2\pi 10^8 t \qquad \text{A}$$

بينما تيار الحمل هو

$$I_L = 0.1 \cos (2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \qquad \text{A}$$



شكل ١٢ ـ ٣ خط نقل متوائم عند كلا النهايتين لاينتج انعكاسات وعلى ذلك يعطى قدرة عظمى للحمل .

متوسط القدرة المعطاة لمدخل الخط بالمنبع يجب أن تعطى كلها للحمل بواسطة الخط ،

$$P_{in} = P_L = \tfrac{1}{2} \times 30 \times 0.1 = 1.5 \text{ W}$$

الآن دعنا نوصل مستقبلا ثانيا ، أيضاً له مقاومة دخل 300Ω ، عبر الخط على التوازى مع المستقبل الأول . معاوقة الحمل الآن هى 150Ω ، معامل الانعكاس هو

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

ونسبة الموجة الواقفة على الخط هى

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

معاوقة الدخل لم تعد 300Ω ، ولكن الان

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ}$$

$$= 510\underline{/-23.8^\circ} = 466 - j206 \qquad \Omega$$

التى هى معاوقة سعوية . فيزيائيا ، هذا يعنى أن هذا الطول من الخط يختزن طاقة فى

مجاله الكهربى أكثر منها فى مجالة المغناطيسى . على ذلك يكون مطاور تيار الدخل هو

$$I_{s,\,in} = \frac{60}{300 + 466 - j206} = 0.0756\underline{/15.0°}$$

والقدرة المعطاة للخط بالمنبع هى

$$P_{in} = \tfrac{1}{2} \times (0.0756)^2 \times 466 = 1.333 \text{ W}$$

حيث أنه لايوجد هناك فقد فى الخط ، فان 1.333W يجب أيضا أن تزود للحمل . لاحظ أن هذا أقل من الـ 1.50W التى كنا قادرين على تزويدها لحمل موائم ، علاوة علي ذلك ، هذه القدرة يجب أن تقسم بالتساوى بين مستقبلين ، وعلى ذلك فكل مستقبل يتلقى الان 0.667W فقط . حيث أن معاوقة الدخل لكل مستقبل هى 300Ω ، فان الفولتية عبر المستقبل يوجد بسهولة كما يلى

$$0.667 = \frac{1}{2}\,\frac{|V_{s,\,L}|^2}{300}$$

$$|V_{s,\,L}| = 20 \text{ V}$$

بالمقارنة بالـ 30V التى يحصل عليها عبر الحمل المفرد .

قبل أن نترك هذا المثال ، دعنا نسأل أنفسنا عدة اسئلة عن الفولتيات على خط النقل . أين تكون الفولتية قيمة عظمى وقيمة صغرى ، وماهى تلك القيم ؟ هل مازال طور فولتية الحمل يختلف عن فولتية المدخل بـ °288 ؟ . افترضنا ، اذا كنا نستطيع اجابة على هذه الأسئلة للفولتية ، فيمكننا عمل المثل للتيار .

أجبنا على أسئلة من هذه الطبيعة للموجة المستوية المنتظمة فى الفصل الأخير ولذلك يجب أن يمدنا تناظرنا بالمعلومات المقابلة لخط النقل . فى قسم ١١ ـ ٧ ، معادلة (٧٠) تخدم فى تحديد مواقع قيم الفولتية العظمى عند

$$-\beta z_{max} = \frac{\phi}{2} + n\pi \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

على ذلك ، مع $\beta = 0.8\pi$ و $\phi = \pi$ ، نجد

$$z_{max} = -0.625 \text{ and } -1.875 \text{ m}$$

بينما القيم الصغرى تكون على بعد $\lambda/4$ من القيم العظمى ،

$$z_{min} = 0 \text{ and } -1.25 \text{ m}$$

ونجد أن فولتية الحمل (عند $z = 0$) هى قيمة فولتية صغرى . هذا ، طبعا ، يحقق النتيجة العامة التى وصلنا اليها فى الفصل الأخير : تحدث قيمة فولتية صغرى عند الحمل اذا كان $Z_L < Z_0$ ، وتحدث قيمة فولتية عظمى اذا كان $Z_L > Z_0$ ، حيث أن لكلتا المعاوقتين مقاومات خالصة .

قيمة الفولتية الصغرى على الخط هى على ذلك فولتية الحمل ، $20V$ ، قيمة الفولتية العظمى يجب أن تكون $40V$ ، حيث أن نسبة الموجة الواقفة هى . الفولتية عند طرف المدخل للخط هى

$$V_{s,\,in} = I_{s,\,in} Z_{in} = (0.0756\underline{/15.0°})(510\underline{/-23.8°}) = 38.5\underline{/-8.8°}$$

فولتية المدخل تقريبا فى مثل كبر الفولتية العظمى عند أى مكان على الخط لأن طول الخط هو حوالى ثلاثة أرباع طول الموجة ، وهو طول سيضع الفولتية العظمى عند المدخل عندما $Z_L < Z_0$.

السؤال الأخير الذى وضعناه بأنفسنا يتعلق بالطور النسبى لفولتيات المدخل والحمل . مع أننا قد وجدنا كلا من هاتين الفولتيتين ، لانعلم زاوية الطور لفولتية الحمل . من قسم ١١ ـ ٧ ، معادلة (٦٨) ، الفولتية عند أى نقطة على الخط هى

$$\boxed{V_s = (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})V_0^+}$$

يمكننا استخدام هذا التعبير لتحديد الفولتية عند اى نقطة على الخط بدلالة الفولتية عند أى نقطة أخرى . حيث أننا نعرف الفولتية عند المدخل للخط ، ندع $z = -l$ ،

$$V_{s,\,in} = (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l})V_0^+$$

ونحل لـ V_0^+ ،

$$V_0^+ = \frac{V_{s,\,in}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{38.5\underline{/-8.8°}}{e^{j0.8\pi} - \frac{1}{3}e^{-j0.8\pi}} = 30.0\underline{/72.0°}\ V$$

يمكننا الان ايجاد فولتية الحمل عند $z = 0$,

$$V_{s,\,L} = (1 + \Gamma)V_0^+ = 20\underline{/72°} = 20\underline{/-288°}$$

الاتساع يتفق مع قيمتنا السابقة . وجود الموجة المنعكسة يتسبب فى أن تختلف $V_{s,in}$ و $V_{s,L}$ فى الطور بحوالى $279°$ — بدلا من $288°$ — .

كمثال أخير دعنا ننهى خطنا بمعاوقة سعوية $Z_L = -j\,300\Omega$. من الواضح ، أننا لانستطيع مد أى قدرة متوسطة للحمل . كنتيجة ، يكون معامل الانعكاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j1 = 1\underline{/-90^\circ}$$

والموجة المنعكسة تساوى فى الاتساع الموجة الساقطة . لهذا لايجب أن يدهشنا أن نرى أن نسبة الموجة الواقفة هى

$$s = \frac{1 + |-j1|}{1 - |-j1|} = \infty$$

ومعاوقة المدخل تكون مفاعلة خالصة ،

$$Z_{\text{in}} = 300\,\frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j589$$

التى لايمكن أن يعطى لها متوسط قدرة

مع أننا نستطيع الاستمرار لنجد عديدا من حقائق واشكال هندسية أخرى لهذا المثال ، معظم العمل يمكن أن يعمل بسهولة أكثر لمسائل من هذا النوع باستخدام طرق تقنية تخطيطية . سنلاقى هذه فى القسم التالى .

ت ١٢ - ٤ : خط عديم الفقد ذو 50Ω طوله 1.5λ منهى بمقاومة خالصة مقدارها 60Ω ، فولتية الحمل هى $20\,40^\circ$V . أوجد : (أ) القدرة المتوسطة المعطاة للحمل ، (ب) مقدار الفولتية الصغرى على الخط ؛ (جـ) مقدار التيار الأعظم على الخط .

الاجابة : 3.33W ، 16.67V ، 0.400A .

ت ١٢ - ٥ : خط نقل ذو 300Ω عديم الفقد ، طوله 0.25λ ، ومنهى فى : $Z_L = 500\Omega$. الخط له مولد ذو $90\underline{/0^\circ}$V على التوالى مع 100Ω موصلة للمدخل . (أ) أوجد فولتية الحمل . (ب) أوجد الفولتية عند نقطة منتصف الخط .

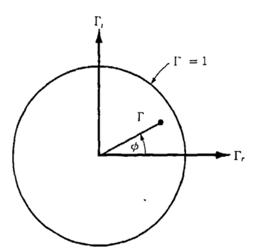
الاجابة : $96.4\underline{/-90^\circ}$V ، $79.5\underline{/-59.0^\circ}$V .

١٢ - ٤ : طرق تخطيطة

مسائل خط النقل غالبا تشتمل على تعامل مع أعداد مركبة ، مما يجعل الوقت والجهد المطلوبين لايجاد حل أكبر عدة مرات من تلك التى يحتاج اليها لتتابع مماثل من العمليات على أعداد حقيقية . أحد طرق تقليل الجهد بدون تأثير خطير على الدقة تكون باستخدام مخططات خط نقل . ربما يكون الأكثر اتساعا فى الاستخدام هو مخطط سميث[١] .

(١) P.H. Smith, TRANSMISSION – Line Calculator, Electronics, Vol. 12, pp. 29 — 31 January 1939.

يبين هذا الرسم البيانى أساسا ، منحنيات تخص مقاومة ثابتة ومفاعلة ثابتة ، هذه يمكن أن تمثل إما معاوقة دخل أو معاوقة حمل . الأخيرة ، طبعا ، هى معاوقة الدخل لخط طوله صفر . استدلال على الموضع على طول الخط معطى أيضا . عادة بدلالة أجزاء طول موجة من موضع فولتية عظمى أو صغرى . مع أنها ليست مبينة بالتخصيص على المخطط ، نسبة الموجة الواقفة ومقدار وزاوية معامل الانعكاس تعين بسرعة جدا . كحقيقة واقعة ، الرسم البيانى منشأ داخل دائرة نصف قطرها الوحدة ، باستخدام إحداثيات قطبية ، بنصف قطر متغير $|\Gamma|$ وزاوية متغيرة ϕ مقدرة فى عكس دوران عقرب الساعة ، حيث $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$ شكل ١٢ ـ ٤ يبين هذه الدائرة . حيث أن $|\Gamma| \leq 1$ ، كل معلوماتنا يجب أن تقع على أو داخل دائرة الوحدة .



شكل ١٢ ـ ٤ الاحداثيات القطبية لمخطط سميث هى مقدار وزاوية طور معامل الانعكاس ، الاحداثيات الكرتيزية هى الأجزاء الحقيقية والتخيلية لمعامل الانعكاس . المخطط بأكمله يقع داخل دائرة الوحدة : $|\Gamma| = 1$.

من الغريب فعلا أن ، معامل الانعكاس نفسه سوف لايرسم على المخطط النهائى ، لأن هذه الكنتورات الاضافية سوف يصعب جدا قراءة المخطط .

العلاقة الأساسية التى ينشأ عليها المخطط هى

$$\boxed{\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}} \qquad (٣٧)$$

المعاوقات التى نرسمها على المخطط ستكون معايرة بالنسبة للمعاوقة المميزة . دعنا نجازف بخلط محتمل مع الاحداثيات الكرتيزية ونستخدم z لنصف معاوقة الحمل المعايرة .

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

وعلى ذلك

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

أو

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \qquad (٣٨)$$

فى الصورة القطبية ، قد استخدمنا $|\Gamma|$ و ϕ كمقدار وزاوية Γ ، دعنا الان نختار Γ_r و Γ_i كالأجزاء الحقيقية والتخيلية من Γ ،

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i \qquad (٣٩)$$

على ذلك

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i} \qquad (٤٠)$$

الأجزاء الحقيقية والتخيلية لهذه المعادلة هى

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \qquad (٤١)$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \qquad (٤٢)$$

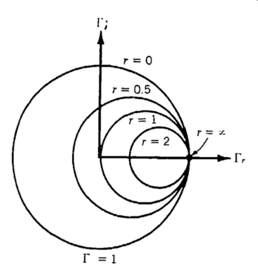
بعد عدة سطور من عمليات جبر أولية ، يمكننا كتابة (٤١) و (٤٢) فى صور تظهر بجلاء طبيعة المنحنيات على محاور Γ_r و Γ_i ،

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \qquad (٤٣)$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \qquad (٤٤)$$

المعادلة الأولى تصف عائلة من دوائر ، حيث كل دائرة ترتبط مع قيمة معينة لمقاومة r . مثلا ، إذا كانت $r = 0$ نصف قطر هذه الدائرة ذات المقاومة الصفرية يرى أنه الوحدة ، وهى تتمركز عند $\Gamma_r = 0$, $\Gamma_i = 0$ ، نقطة الأصل . هذا يحقق ، لأن نهاية ذات مفاعلة خالصة تؤدى الى معامل انعكاس مقداره الوحدة لكن ، اذا كانت $r = \infty$،

فان $Z_L = \infty$ ، ويجب أن يكون لدينا $\Gamma = 1$. الدائرة الموصوفة بـ (٤٣) ممركزة عند $\Gamma_r = 1$, $\Gamma_i = 0$ ولها نصف قطر صفرى . فهى لذلك النقطة $\Gamma = 1$ ، حسب ماقررنا وجوب حدوثه . كمثال آخر ، الدائرة لـ $r = 1$ ممركزة عند $\Gamma_r = 0.5$, $\Gamma_i = 0$ ولها نصف قطر مقداره 0.5 .



شكل ١٢ ـ ٥ دوائر ذات r ثابتة مبينة على المستوى Γ_r Γ_i . نصف قطر أى دائرة هو $1/(1 + r)$.

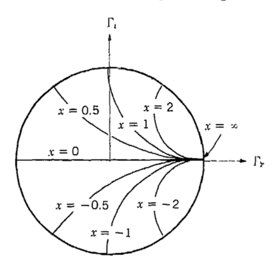
هذه الدائرة مبينة على شكل ١٢ ـ ٥ بالاضافة الى دوائر لـ $r = 0.5$ و $r = 2$. كل الدوائر ممركزة على المحور Γ_r وتمر خلال النقطة $\Gamma_r = 1$, $\Gamma_i = 0$.

معادلة (٤٤) تمثل ايضا عائلة دوائر ، ولكن كلا من هذه الدوائر تعرف بقيمة خاصة لـ x ، بدلا من r . اذا كانت $x = \infty$ ، فان $Z_L = \infty$ و Γ يجب أن تكون $1 + j0$ مرة أخرى . الدائرة الموصوفة ـ (٤٤) ممركزة عند $\Gamma_r = 1$, $\Gamma_i = 0$ ولها نصف قطر صفرى ، فهى لذلك النقطة $\Gamma = 1$. اذا كانت $x = +1$ ، فان الدائرة تتمركز عند $\Gamma_r = \Gamma_i = 1$ ولها نصف قطر يساوى الوحدة . ربع هذه الدائرة فقط يقع داخل منحنى الحدود $|\Gamma| = 1$ ، كما هو مبين فى شكل ١٢ ـ ٦ . ربع دائرة مماثلة تظهر تحت المحور Γ_r

لـ $x = -1$. الأجزاء من دوائر أخرى لـ $x = 0.5$, -0.5 , 2 , and -2 مبينة أيضا .
« الدائرة » الممثلة لـ $x = 0$ هى المحور Γ_r ، هذه أيضا مكتوبة على شكل ١٢ ـ ٦ .

كلا عائلتى الدوائر يظهر على مخطط سميث ، كما هو مبين فى شكل ١٢ ـ ٧ . من الواضح الان أنه اذا أعطينا Z_L ، يمكننا قسمتها على Z_0 لنحصل على z ، نحدد مواقع دوائر r و x الخاصة بالمسألة (مستكملين من الداخل حسب الضرورة) ، ونعين Γ بتقاطع الدائرتين . حيث أن المخطط ليس به دوائر متحدة المركز مبينة قيم $|\Gamma|$ ، فمن

الضرورى قياس المسافة نصف القطرية من نقطة الأصل الى التقاطع بفرجار ونستخدم مقياس مساعد لنوجد $|\Gamma|$. أجزاء الخط المدرجة تحت المخطط فى شكل ١٢ ـ ٧ تخدم هذا الغرض . زاوية Γ هى الزاوية المقدرة فى ضد عقرب دوران الساعة من المحور Γ_r . مرة أخرى ، خطوط نصف قطرية مبينة الزاويّة قد يزحم المخطط بطريقة سيئة ، ولذلك فان الزاوية مبينة على محيط الدائرة . خط مستقيم من نقطة الأصل مارا بالتقاطع يمكن أن يمتد الى محيط المخطط كمثال ، اذا كانت $Z_L = 25+j50\Omega$ على خط ذى $z = 0.5 + j1$ ، ونقطة A على شكل ١٢ ـ ٧ تبين تقاطع الدوائر $r = 0.5$ و $x = 1$. معامل الانعكاس هو تقريبا 0.65 عند زاوية ϕ مقدارها $83°$.



شكل ١٢ ـ ٦ أجزاء الدوائر ذات x ثابتة الواقعة داخل $|\Gamma| = 1$ مبينة على محاور $\Gamma_R\Gamma_i$ نصف قطر دائرة ما معطاة هو $1/x$.

يكتمل مخطط سميث باضافة تدريج ثان على المحيط يمكن بواسطته حساب المسافة على طول الخط . هذا التدريج يكون فى وحدات طول موجة ، ولكن القيم الموضوعة عليه ليست واضحة . لكى نحصل عليها ، نقسم أولا الفولتية عند أى نقطة على الخط ،

$$V_s = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

على التيار

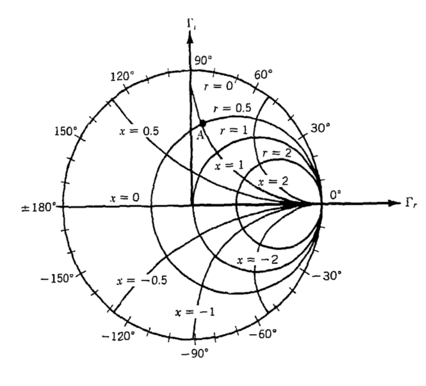
$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

حاصلين على معاوقة الدخل المعايرة

$$z_{\text{in}} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

باستبدال l — بـ z ، يكون لدينا المعادلة العامة التى تربط معاوقة الدخل المعايرة ، معامل الانعكاس ، وطول الخط ،

$$z_{in} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} \quad (٤٥)$$



شكل ١٢ ـ ٧ . مخطط سميث يحتوى على دوائر ذات r ثابتة ودوائر ذات x ثابتة ، تدريج نصف قطرى مساعد لتعيين $|\Gamma|$ وتدريج زاوى على المحيط لقياس ϕ .

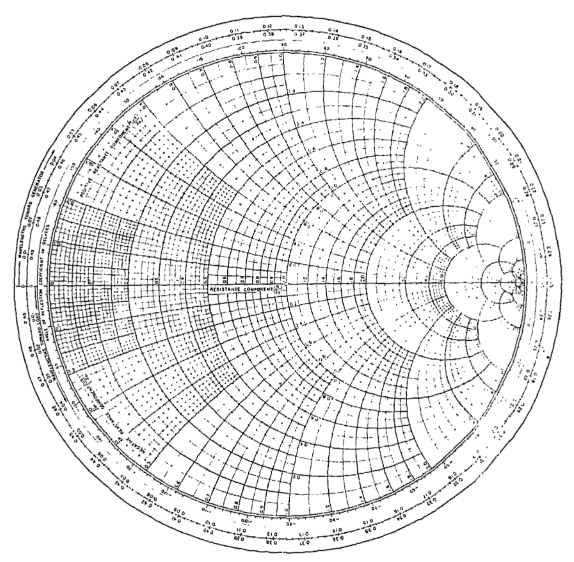
لاحظ أنه عندما $l = 0$ ، نقع عند الحمل ، و $z_{in} = z$.

نستخدم (٤٥) لنوجد معاوقة الدخل عند مسافة l من معاوقة حمل ما معطى (فى اتجاه المنبع) . بايجاد موقع معاوقة الحمل z على مخطط سميث ، يمكننا ايجاد النقطة المحددة لـ z_{in} باضافة زاوية $2\beta l$ — الى Γ . أى أن ،

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}$$

على ذلك ، بينما نتقدم من الحمل z الى معاوقة الدخل z_{in} ، نتحرك فى اتجاه المولد مسافة l على خط النقل ، ولكننا نتحرك خلال زاوية $2\beta\, l$ فى اتجاه دوران عقرب

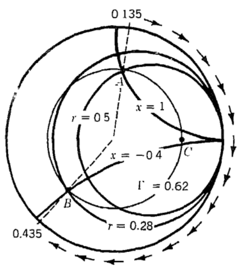
الساعة على مخطط سميث . ولذلك تستكمل دورة واحدة حول المخطط كلما تتغير βl بـ πrad ، أو عندما تتغير l بنصف طول موجة . هذا يتفق مع اكتشافنا السابق ان معاوقة الدخل لخط عديم الفقد طوله نصف طول موجه تساوى معاوقة الحمل .



شكل ١٢ ـ ٨ : تصغير فوتوغرافى لنسخة من مخطط سميث مفيد :
(باذن من the Emeloid company, Hillside, N.J.) . للعمل الدقيق ، مخططات أكبر متاحة حيثما تباع كتب تكنولوجية راقية .

على ذلك يستكمل مخطط سميث باضافة تدريج يبين تغير 0.5λ لكل ملاحة محيطية لدائرة الوحدة . للتيسير ، عادة يعطى تدريجين ، واحدا يبين زيادة فى المسافة لحركة فى اتجاه دوران عقرب الساعة ، والاخر زيادة لانتقال عكس دوران عقرب الساعة . هذان التدريجان مبينان فى شكل ١٢ ـ ٨ . لاحظ أن الواحد المعلم بـ « طول

موجة نحو المولد Wavelength toward generator، *(Wtg)* يبين قيما متزايدة لـ l/λ لانتقال مع دوران عقرب الساعة ، كما هو موصوف آنفا .



شكل ١٢ ـ ٩ معاوقة الدخل المعايرة الناتجة من معاوقة دخل معايرة $z = 0.5 + j1$ على خط طوله 0.3λ هى $z_{in} = 0.28 - j\ 0.40$.

نقطة الصفر على تدريج الـ wtg فضل تحديد موقعها اختياريا الى اليسار . هذا يقابل معاوقات دخل لها زوايا طور مقدارها $0°$ و $r_L < Z_0$. قد رأينا أيضا أن قيم فولتية صغرى دائما تقع هنا .

الأفضل بيان استخدام مخطط خط النقل بمثال . دعنا مرة أخرى نعتبر معاوقة الحمل $Z_L = 25 + j50\Omega$ ، التى تنهى خطا ذا 50Ω . على ذلك $z = 0.5 + j1$ ، كما هو معلم عند A على شكل ١٢ ـ ٩ ، $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62\underline{/83°}$. برسم خط مستقيم من نقطة الأصل مارا بـ A الى المحيط ، نلحظ قراءة مقدارها 0.135 على تدريج الـ Wtg . اذا كان طول الخط 60cm ويكون تردد التشغيل بحيث أن طول الموجة على الخط هو 2m ، فان $l/\lambda = 0.3$ ، وهو لذلك 0.3λ من الحمل الى المدخل . ولذلك نجد z_{in} على الدائرة $|\Gamma| = 0.62$ مقابل قراءة wtg مقدارها $0.135 + 0.300 = 0.435$. هذا الانشاء مبين فى شكل ١٢ ـ ٩ ، والنقطة التى تحدد موقع معاوقة الدخل معلمة بـ B . معاوقة الدخل المعايرة تقرأ $0.28 - jo.40$ ، وعلى ذلك $Z_{in} = 14 - j20$. حساب تحليلى أكثر دقة يعطى $Z_{in} = 13.7 - j20.2$.

المعلومات المتعلقة بموضع الفولتيات العظمى والصغرى يحصل عليها بسهولة أيضا على مخطط سميث . نحن نعرف مسبقا أن قيمة عظمى أو صغرى يجب أن تحدث عند الحمل عندما تكون Z_L مقاومة خالصة ، اذا كانت $R_L > Z_0$ يكون هناك قيمة

عظمى عند الحمل ، واذا كانت $R_L < Z_0$ يكون هناك قيمة صغرى . يمكننا مد هذه النتيجة الان بملاحظة أننا نستطيع فصل طرف الحمل لخط نقل عند نقطة حيث تكون معاوقة الدخل مقاومة خالصة ونستبدل ذلك الجزء بمقاومة R_{in} ، سوف لايكون هناك تغييرات على جزء المولد من الخط . يتبع ، حينئذ أن موقع الفولتيات عظمى وصغرى يجب أن يكون عند تلك النقط حيث تكون Z_{in} مقاومة خالصة . معاوقات الدخل المقاومية الخالصة يجب أن تحدث على الخط $x = 0$ (المحور Γ_r) لمخطط سميث . الفولتيات العظمى أو التيارات الصغرى تحدث عندما $r > 1$ ، أو عند wtg= 0.25 ، وتحدث الفولتيات الصغرى أو التيارات العظمى عندما $r < 1$ ، أو عند wtg= 0 . اذن فى المثال آنفا يجب أن تحدث القيمة العظمى عند wtg = 0.250 على مسافة $0.250 - 0.135 = 0.115$ من طول الموجة فى اتجاه المولد من الحمل . هذه هى مسافة 0.115×200 ، أو 23cm من الحمل .

يجب أن نلاحظ أيضا أنه حيث أن نسبة الموجة الواقفة المنتجة بحمل مقاومى R_L هى اما R_L/R_0 أو R_0/R_L , أيهما تكون أكبر من الوحدة ، قيمة s يمكن أن تقرأ مباشرة كقيمة r عند تقاطع دائرة $|\Gamma|$ والمحور r , $r > 1$. فى مثالنا هذا التقاطع معلم بنقطة C ، و $r = 4.2$ ، على ذلك $s = 4.2$.

مخططات خط النقل يمكن أيضا أن تستخدم مسامحة معايرة ، مع أن هناك عدة فروق طفيفة فى مثل هذا الاستخدام . ندع $y = Y_I/Y_0 = g + jb$ ونستخدم دوائر r كدوائر g ودوائر x كدوائر b . الفرقان ، اذن ، هما أن $b = 0$, $g > 1$ تقابل فولتية صغرى ، ويجب اضافة $180°$ لزاوية Γ كما تقرأ من محيط الخطط . سنستخدم مخطط سميث بهذه الطريقة فى القسم التالى .

مخططات خاصة متاحة أيضا لخطوط غير معايرة ، خاصة مخططات 50Ω ومخططات ℧ 20m .

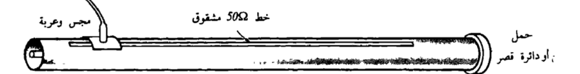
ت ١٢ - ٦ : حمل معاير ، $z = 2 - j0.5$ ، موضوع عند 0.6λ من مدخل خط نقل عديم الفقد . (أ) أوجد z_{in} ، (ب) ما البعد (فى λ) من المدخل لأقرب فولتية عظمى ؟ (جـ) ما البعد من الحمل لأقرب فولتية صغرى ؟ (د) ما هى نسبة الموجة الواقفة ؟

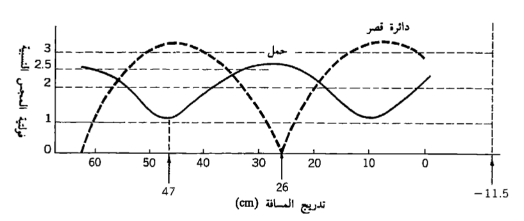
الاجابة : $0.77 - j0.65$, 0.12λ , 0.23λ , 2.2 .

١٢ - ٥ : عدة مسائل عملية

فى هذا القسم سنوجه اهتمامنا لمثالين من مسائل خط نقل عملية . الأول هو تحديد معاوقة حمل من نتائج تجريبية ، والثانى هو تصميم شبكة موائمة لعقب مفرد .

دعنا نفرض أننا قد عملنا قياسات تجريبية على خط هوائى ذى 50Ω التى تبين أن هناك نسبة موجة واقفة مقدارها 2.5 . هذه قد حددت بتحريك عربة انزلاق جيئة وذهابا على طول الخط لتعيين القراءات العظمى والصغرى . ويبين تدريج مجهز على المسلك الذى تتحرك العربة عليه أن قيمة صغرى تحدث عند قراءة تدريج مقدارها $47.0cm$ ، كما هو مبين فى شكل ١٢ ـ ١٠ . نقطة الصفر للتدريج اختيارية ولاتقابل موقع الحمل . موقع القيمة الصغرى تحدد عادة بدلا من القيمة العظمى لأنها يمكن أن تحدد بدقة أعلى من تلك التى للقيمة العظمى ؛ فكر فى القيم الصغرى الأكثر حدة على موجة جيبية مقومة .





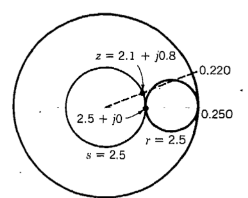
شكل ١٢ ـ ١٠ رسم تخطيطى لخط محورى مشقوق . تدريج المسافة هو على الخط المشقوق . مع الحمل فى مكانه ، $s = 2.5$ ، والقيمة الصغرى تحدث عند قراءة تدريج مقدارها $47cm$ ، لدائرة قصر تقع القيمة الصغرى عند قراءة تدريج مقدارها $26cm$. طول الموجة هو $75cm$.

تردد التشغيل هو $400MHz$ ، لذلك يكون طول الموجة $75cm$. لكى نحدد بدقة موقع الحمل ، ننزعه ونستبدله دائرة قصر به حينئذ يعين موضع القيمة الصغرى $26.0cms$.

نعرف أن دائرة القصر يجب أن تقع على بعد عدد صحيح من أنصاف طول موجة من القيمة الصغرى ، دعنا اختياريا نضعها على بعد نصف طول موجة عند : $26.0 - 37.5 = -11.5cm$ على التدريج . حيث أن دائرة القصر قد حلت محل الحمل ، يكون الحمل أيضا موضوعا عند $-11.5cm$. على ذلك تبين نتائجنا أن القيمة الصغرى على بعد $47.2 - (-11.5) = 58.5$ من الحمل ، أو بطرح نصف طول

موجة ، تكون قيمة صغرى على بعد 21.0cm من الحمل . على ذلك تكون الفولتية العظمى على بعد :
2.25 cm $= (37.5/2) — 21.5$ من الحمل ، أو $0.030 = 2.25/75$ من طول الموجة من الحمل .

بهذه المعلومات ، يمكننا الان أن نتجه لمخطط سميث . عند فولتية عظمى تكون معاوقة الدخل مقاومة خالصة تساوى sR_0 ، على أساس معاير ، $z_{in} = 2.5$. لذلك ندخل المخطط.عند $z_{in} = 2.5$ ونقرأ 0.250 على المقياس wtg . بطرح 0.030 طول موجة لنصل الى الحمل ، نجد أن تقاطع الدائرة $s = 2.5$ (أو $|\Gamma| = 0.429$) والخط نصف القطرى الى 0.220 طول موجة هو عند $z = 2.1 + j0.8$. الانشاء مرسوم تخطيطيا على مخطط سميث لشكل ١٢ - ١١ .



شكل ١٢ - ١١ اذا كانت $z_{in} = 2.5 + j0$ على خط طوله 0.03 طول موجة ، فان $z = 2.1 + j0.8$.

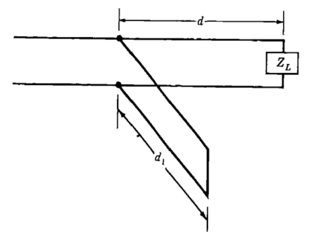
على ذلك $Z_L = 105 + j40$ ، وهى قيمة تتخذ موضعها عند قراءة تدريج مقدارها 11.5 cm — ، أوعدد صحيح من نصف طول موجة من ذلك الموضع . طبعا ، يمكننا اختيار « موضع » حملنا كما نشاء بوضع دائرة القصر عند تلك النقطة التى نود اعتبارها كموضع الحمل . حيث أن مواضع الحمل ليست معرفة جيدا ، من الضرورى تحديد النقطة (أو المستوى) التى تعين عندها معاوقة الحمل .

كمثال أخير ، دعنا نحاول مواءمة هذا الحمل لخط 50Ω بوضع عقب مقصر الدائرة طوله d_1 على مسافة d من الحمل (أنظر شكل ١٢ - ١٢) . خط العقب له نفس المعاوقة المميزة مثل الخط الرئيسى . يجب أن نحدد الأطوال d و d_1 .

معاوقة الدخل للعقب هى مفاعلة خالصة ، عندما تضم على التوازى مع معاوقة الدخل للطول d المحتوى على الحمل ، يجب أن تكون معاوقة الدخل المحصلة $1 + j0$. حيث أنه أسهل جدا ضم مسامحات على التوازى عن معاوقات ، دعنا نُعد صياغة هدفنا بلغة المسامحة (admittance) : مسامحة الدخل للطول d المحتوى على

الحمل يجب أن تكون $1 + jb_{in}$ لأن اضافة مسامحة الدخل للعقب $j\,b_{\text{stub}}$ لتُنتج مسامحة كلية مقدارها $1 + j0$. لهذا تكون مسامحة العقب $-jb_{in}$. لذلك سنستخدم مخطط سميث كمخطط مسامحة بدلا من مخطط معاوقة .

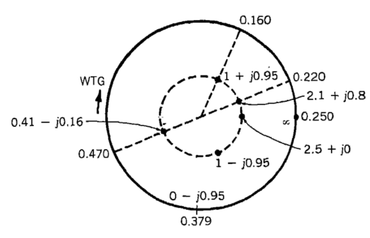
معاوقة الحمل هى $2.1 + j0.8$ ، وموقعها عند -11.5 cm . مسامحة الحمل هى لذلك $1/(2.1 + j0.8)$ ، وهذه القيمة يمكن أن تحدد باضافة ربع طول موجة على مخطط سميث ، حيث أن Z_{in} لخط ربع طول موجة هى R^2_0/Z_L ، او $z_{in} = 1/z$ ، أو $y_{in} = z$.
بدخول المخطط (شكل ١٢ ـ ١٣) عند $z = 2.1 + jo08$ ، نقرأ 0.220 على تدريج الـ wtg ، نضيف (أو نطرح) 0.250 ونجد المسامحة $0.41 - j0.16$ المقابلة لهذه المعاوقة . هذه النقطة لاتزال تقع على الدائرة $s = 2.5$. الان ، عند أى نقطة أو نقط على هذه الدائرة يكون الجزء الحقيقى للمسامحة مساويا الوحدة ؟ .



شكل ١٢ ـ ١٢ عقب مقصر الدائرة طولة d_1 ، يقع على بعد d من حمل Z_L ، مستخدم ليجهز حملا موائما على يسار العقب .

هناك اجابتان ، $1 + j0.95$ عند $\text{wtg} = 0.16$ ، و $1 - j0.95$ عند $\text{wtg} = 0.34$ ، كما هو مبين فى شكل ١٢ ـ ١٣ . دعنا نختر القيمة الأولى حيث أن هذا يؤدى الى العقب الأقصر . لهذا $y_{\text{stub}} = j0.95$ ، وموضع العقب يقابل $\text{wtg} = 0.16$. حيث أن مسامحة الحمل وجدت عند $wtg = 0.470$ حينئذ يجب أن نتحرك $(0.5 - 0.47) + 016 = 0.19$ من طول الموجة لنحصل على موضع العقب .

أخيرا ، يمكننا استخدام المخطط لتحديد الطول الضرورى للعقب المقصر الدائرة . مواصلة المدخل صفر لأى طول للعقب المقصر الدائرة ، لذلك فنحن مقصورون على محيط المخطط . عند دائرة القصر ، $y = \infty$ و $\text{wtg} = 0.250$. نجد أن $b_{in} = -0.95$ يتم عند $\text{wtg} = 0.379$ ، كما هو مبين فى شكل ١٢ ـ ١٣ .



شكل ١٢ ـ ١٣ حمل معاير $z = 2.1 + j0.8$ موائم بوضع عقب مقصر الدائرة طوله 0.129 طول موجة على بعد 0.19 طول موجة من الحمل .

لذلك يكون العقب $0.129 = 0.250 - 0.379$ طول موجة ، أو طوله $9.67cm$.

مع أننا سنختتم تقديمنا لخطوط النقل عند هذه النقطة ، فهناك مسائل عديدة هامة وشيقة لم نناقشها . ربما الأعظم أهمية تشمل تأثيرات الفقد التى لايمكن تجنبه . وأخرى تشمل استخدام خطوط النقل كعناصر دائرة ، دوائر رنانة ، خطوط تأخير ، التصرف العابر للخطوط ، الدوائر المكافئة لخط النقل ، الخطوط غير المنتظمة ، طرق مواءمة أخرى ، وتقريبات خاصة تفيد فى معالجة خطوط النقل منخفضة التردد عالية الفولتية . معظم هذه المواضيع مناقشة فى معظم المراجع المدرجة الاتية بعد .

ت ١٢ ـ ٧ : عندما وضعت دائرة قصر على خط فى الهواء ذى 50Ω عديم الفقد ، وجدت قيم صغرى مجاورة عند قراءات تدريج مقدارها 12cm و 27cm . عندما تستبدل دائرة القصر بالحمل ، تكون القيم الصغرى 0.4V فى الاتساع ، وأحدها وجد عند 9 cm ، كل القيم العظمى هى 0.72V . أوجد : (أ) λ ، (ب) f ، (جـ) s للحمل ، (د) Γ للحمل ، (هـ) Z_L .

الاجابة : 0.3m , 1GHz , 1.8 , $0.286\underline{/108^\circ}$; $36.5 + j\,21.6\ \Omega$.

ت ١٢ ـ ٨ : خط نقل 50Ω عديم الفقد منتهى بحمل $Z_L = 100 + j100\Omega$. الخط متوائم بوضع عقب مقصر الدائرة طوله d_1 عبر الخط على مسافة d من الحمل . اذا كانت $v = 2c/3$ على الخط و$f = 10$ MHz ، أوجد : (أ) λ ، (ب) d ، اذا كانت d_1 لها أقل قيمة ممكنة ، (جـ) d_1 .

الاجابة : 20m , 4.4m , 1.8m .

مراجع مقترحة :

1 Adler, R. B., L. J. Chu, and R. M. Fano: "Electromagnetic Energy Transmission and Radiation," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

خطوط النقل معالجة كاملة فى الفصول من الثالث الى السادس .

2 Brown, R. G., R. A. Sharpe, W. L. Hughes, and R. E. Post: "Lines, Waves, and Antennas," 2d ed., The Ronald Press Company, New York, 1973.

خطوط النقل مغطاة فى الفصول الستة الأول ، مع عديد من الأمثلة .

3 Moore, R. K.: "Traveling-Wave Engineering," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

هذا الكتاب يقدم الموجات المستوية وخطوط النقل جنبا الى جنب . أنواع أخرى من الموجات مناقشة أيضا باختصار .

4 Paris, D. T., and F. K. Hurd: "Basic Electromagnetic Theory," McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.

الموجات المستوية مغطاة فى الفصلين السابع والثامن ، وفى الفصل التاسع تناقش خطوط النقل وأدلة الموجات .

5 - Seshadri, S.R.: (انظر المراجع المقترحة للفصل الحادى عشر)

6 Weeks, W. L.: "Electromagnetic Theory for Engineering Applications," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

عدة تجارب توضيحية على خطوط نقل موضوفة ابتداء من *p.72* .

مسائل :

١ ـ بارامترات خط نقل معين هى :
$R = 25\ \Omega/m$, $L = 0.5\ \mu\ H/m$, $G = 100\ \mu\ \mho\ /m$ و $C = 50 pF/m$.
الخط يعمل عند $\omega = 10^7$ rad/s (أ) احسب γ , α , β , λ , Z_0 والسرعة على الخط . (ب) ما الطول من الخط الذى سيسبب أن تكون موجة متنقلة لها عشرة فى المائة من اتساع مدخلها ؟

٢ ـ خط نقل عديم الفقد له $L = 0.25\mu$ H/m ، والسرعة على الخط هى $220 m/\mu s$.
أوجد : (أ) C ، (ب) Z_0 . الخط الان منهى فى $R_L = 100\Omega$. (جـ) أوجد Γ .
(د) أوجد معامل النفاذ .

٣ ـ خط عديم الفقد يعمل عند 1Grad/s له $z_0 = 60\Omega$ و $\beta = 5$rad/m . الخط منهى بمجموعة على التوازى من مقاومة 100Ω ومكثف 12.5pF . حدد : (أ) L بـ μH/m ، (ب) C بـ pF/m ، (جـ) معامل الانعكاس للحمل .

٤ ـ خط عديم الفقد له $Z_0 = 50\Omega$ و $\lambda = 50$cm يعمل عند 600MHz . اذا كانت $Z_L = 50 + j75\Omega$ ، أوجد معاوقة الدخل للخط عند z تساوى : (أ) 0 ، (ب) -5cm ، (جـ) -30cm .

٥ ـ دع $\gamma = 0 + j\,0.2$m^{-1} لخط نقل معين عند 10^8rad/s ، بينما $Z_0 = 72\Omega$ الخط يعمل مع حمل 100Ω . (أ) أوجد Γ . (ب) احسب s . (جـ) حدد Z_{in} عند نقطة 6m من Z_1 .

٦ ـ خط نقل 50Ω عديم الفقد يعمل عند $f = 25$MHz مع سرعة تساوى ٨٠ فى المائة من سرعة الضوء . اذا كانت معاوقة الدخل مقاومة خالصة تساوى $0.4Z_0$ عند نقطة 1.5m من الحمل ، حدد : (أ) Z_L ، (ب) Γ ، (جـ) s .

٧ ـ بعدى الموصل الخارجى لكابل محورى هما b و c , $c > b$. افرض موصلية σ_c ودع $\mu = \mu_0$. أوجد الطاقة المغناطيسية المختزنة فى المنطقة $b < \rho < c$ لتيار كلى I منتظم التوزيع يمر فى اتجاهين متضادين فى الموصلين الخارجى والداخلى .

٨ ـ أوجد R , L , C , G , α و β للكابل المحورى المبين فى شكل ١٢ ـ ١٤ اذا كانت $f = 100$MHz .

٩ ـ (أ) خط محورى :

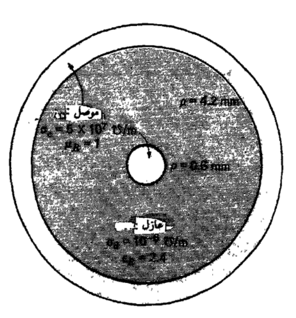
$a = 0.5$ mm, $b = 3$ mm, ; $c = 3.5$ mm, $\epsilon_R = 1.44$, $\mu_R = 1$, $\sigma_c = \infty$. and $\sigma = 0$

احسب L و C . (ب) اعد اذا تضاعف كل بعد و ϵ_R لم تتغير . (جـ) غير الحقيقة أن أحد الخطين أكبر ، اثقل ، وأغلى ثمنا من الاخر ، ما الفرق بينهما ؟

١٠ ـ (أ) حدد المعاوقة المميزة لخط ذى سلكين فى هواء اذا كان الموصلان قطرهما 1in وعلى بعد 5ft بين المركزين . (ب) ما المعاوقة المميزة لموصل مفرد قطره 1in مركزه على بعد 5ft من مستوى أرض تامة التوصيل ؟ (أقتراح : قد يساعد القسم الأخير من الفصل الخامس) .

١١ ـ كابل محورى قليل الفقد معين طوله 10m ومفتوح الدائرة عند كلا النهايتين . سعة مقدارها 600pF مقاسة بين الموصلين الداخلى والخارجى . اذا قصرت دائرة احد النهايتين ووصل مولد نبضات ومرسمة تذبذبات الى النهاية الأخرى ، وجد أن نبضة تحتاج 0.1μs لتكمل رحلة الذهاب والعودة . ما هى المعاوقة المميزة للكابل ؟

١٢ ـ خط النقل المستوى فى شكل ١٢ ـ ٢جـ له الأبعاد $b = 5$mm و $d = 0.4$mm مادة العازل لها $\mu_R = 1$. (أ) بفرض أن العازل له فقد قليل ، عين ϵ_R اذا كانت : $Z_0 = 20\Omega$. (ب) اذا كانت الموصلات نحاسا و $\omega = {}^8$rad/s ، عين ظل الفقد للعازل بحيث أن $RC = GL$.



شكل ١٢ - ١٤ انظر مسألة ٨ .

١٣ - خط نقل عديم الفقد ذى $Z_0 = 60\Omega$ طوله 400m . منتهى بحمل ، $Z_L = 40 + j80\Omega$ ، ويعمل عند تردد 1MHz . دع $v = 0.8c$ على الخط . أوجد (أ) معامل الانعكاس ، (ب) نسبة الموجة الواقفة على الخط ، (جـ) معاوقة الدخل .

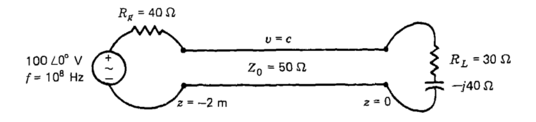
١٤ - خط نقل 300Ω عديم الفقد ، طوله 3m ، يعمل مع الطول موجة 4m وحمل ، $Z_L = 100 - j200\Omega$. اذا كانت فولتية الحمل $80\underline{/30^\circ}$V ، عين الفولتية : (أ) عند المدخل ، (ب) عند موضع الفولتية العظمى .

١٥ - خط نقل عديم الفقد ذو $L = 2 \times 10^{-7}$H/m و $c = 8 \times 10^{-11}F/m$ طوله 40m ومنهى بـ $Z_L = 20 + j0\Omega$ اذا وصل منبع فولتية مثالى ، $100\underline{/0^\circ}$V عند $f = 5$MHz ، للمدخل ، فعين : (أ) مقدار تيار المدخل ، (ب) مقدار تيار الحمل ، (جـ) القدرة المعطاة للحمل .

١٦ - خط نقل عديم الفقد ذى $L = 400$ nH/m و $C = 40$pF/m طوله 75cm ومنهى فى دائرة قصر . تردد التشغيل هو 100MHz . اذا كان اتساع فولتية الخط هو 25V عند نقطة على بعد 20cm من دائرة القصر : (أ) ما هو اتساع الفولتية عند مدخل الخط ، (ب) ما هو اتساع التيار عند مدخل الخط ؟

١٧ - للخط عديم الفقد المبين فى شكل ١٢ - ١٥ ، أوجد : (أ) s ، (ب) Z_{in} عند $z = -2$ ، (جـ) $V_{s,in}$ عند $z = -2$. أوجد القدرة المتوسطة المستنفذة فى : (د) R_g ، (هـ) R_L ، (و) X_L (المكثف) ، (ز) خط النقل نفسه .

١٨ - موجة فولتية ساقطة ، $100\, e^{-j0.1\pi z}$ V ، ترتطم على حمل $Z_L = (0.5 - j2)\, Z_0$



شكل ١٢ ـ ١٥ انظر مسألة ١٧ .

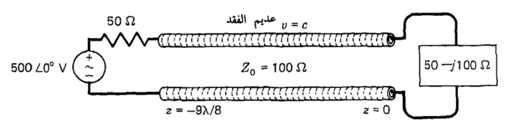
(أ) ما نسبة الموجة الواقفة التى توجد على الخط ؟ (ب) ما هو اتساع الفولتية العظمى على الخط ؟ (جـ) على أى مسافة من الحمل تقع أول فولتية عظمى ؟

١٩ ـ لخط النقل البين فى شكل ١٢ ـ ١٦ ، احسب : (أ) Γ ، (ب) s ، (جـ) Z_{in} عند $z = -9\lambda/8$ ، (د) V_s عند $z = -9\lambda/8$ (هـ) I_S عند $z = -9\lambda/8$ ، (و) القدرة المتوسطة المزودة لخط النقل عند $z = -9\lambda/8$ ، (ز) V_s عند $z = 0$ ، (ك) I_s عند $z = 0$ ، (ل) P_L ، باستخدام نتائج (ز) ، (ك) .

٢ ـ حمل $Z_L = 200 + j300\Omega$ ، ينهى خط عديم الفقد طوله 6.125 ع د $Z_0 = 100\Omega$ و $\lambda = 1$m . منبع فولتية له معاوقة داخلية مقدارها 100Ω وفولتية دائرية مفتوحة مقدارها $500\angle 0°$V موصل بالمدخل . احسب : (أ) $V_{s,in}$ ، (ب) $P_{L,av}$ ، (جـ) $V_{s,L}$.

٢١ ـ حمل ، $Z_L = 110 - j65\Omega$ ، ينهى خط فى الهواء 72Ω عديم الفقد . استخدم مخطط سميث لتعيين : (أ) Z_{in} لخط طوله 0.1λ ، (ب) نسبة الموجة الواقفة ، (جـ) المسافة من الحمل للفولتية العظمى الأولى .

٢٢ ـ ارسم تخطيطيا مخطط سميث بتقريب كبير ثم بين البيانات أو العمليات الاتية عليه .(أ) $Z_L = 75 - j100\Omega$ عند $z = 0$ على خط عديم الفقد ذى $Z_0 = 500\Omega$. (ب) عين Γ . (جـ) طول الخط 40cm و $\beta = 5\pi/3$rad/m . (د) عين Z_{in} ، (ه) أوجد نسبة الموجة الواقفة على الخط .



شكل ١٢ ـ ١٦ انظر مسألة ١٩ .

٢٣ ـ دع $Z_L = 80 - j30\Omega$, $\lambda = 80$cm و $Z_0 = 50\Omega$ لخط عديم الفقد ، واستخدم مخطط سميث لايجاد : (أ) s ، (ب) المسافة من الحمل لأقرب فولتية صغرى ، (جـ) قيمة X_{in} عند النقطة حيث $Z_{in} = 50 + j X_{in}$, $X_{in} > 0$.

٢٤ ـ خط نقل 75Ω مملوء بالهواء عديم الفقد طوله 20m ويعمل عند 32MHz . وجد أن معاوقة الدخل $Z_{in} = 30 + j0\Omega$. استخدم مخطط سميث لتجيب على الأسئلة الاتية : (أ) ما هي s على الخط ؟ (ب) ماهي Z_l ؟ (جـ) ما هو أقل قدر من الخط يمكن فصله من طرف المدخل لنحصل على معاوقة دخل ، $Z_{in} = 75 + jX_{in}$ حيث X_{in} موجبة ، ما هي القيمة العددية لـ X_{in} ؟

٢٥ ـ خط نقل عديم الفقد له $Z_0 = 50\Omega$, $Z_L = 23 - j48\Omega$ و $\lambda = 2.5$m . استخدم مخطط سميث لايجاد : (أ) Γ ، (ب) s ، (جـ) المسافة من الحمل لأقرب فولتية عظمى ، (د) مسامحة الدخل اذا كان طول الخط 3.45m .

٢٦ ـ حمل معاير ، $z = 2 - j0.8$ ، وصل بخط نقل 50Ω عديم الفقد . استخدم مخطط سميث ليساعد في ايجاد : (أ) نسبة موجة الفولتية الواقفة على الخط ، (ب) المسافة مقدرة بأطوال الموجة من الحمل الى النقطة الأولى التي عندها Z_{in} حقيقية ، (جـ) قيمة Z_{in} هناك ، (د) مسامحة الدخل عند نقطة على بعد 0.1λ من الحمل .

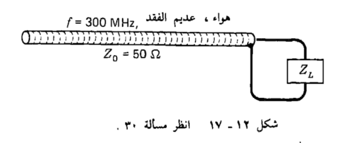
٢٧ ـ اذا كانت $Y_L = 1.2 + j1.4$ على خط 50Ω عديم الفقد مع $\lambda = 80$cm ، عين اقصر مسافة من الحمل الى نقطة عندها : (أ) $|Y_{in}|$ قيمة صغرى ، (ب) $\mathrm{R_e}\, Y_{in} = Y_0$ ، (جـ) زاوية Y_{in} هي $45°$.

٢٨ ـ خط نقل 1 طوله 120cm ومنهى بـ $2Z_0$. خط 2 طوله 20cm ومنهى بـ $(1 + j1)\, Z_0$. وصل الخطين على التوازي عند مدخلهما وغذيا بخط 3 . اذا كانت كلها خطوط 50Ω عديمة الفقد و$\lambda = 80$cm ، عين s على كل خط .

٢٩ ـ تبين قياسات على خط نقل عديم الفقد أن $s = 1.8$ مع فولتية صغرى تقع عند $z = - l_1$. اذا قصرت دائرة الحمل ، تغير موضع القيمة الصغرى الى : $z = - l_1 - 8$cm . بفرض خط 50Ω مع $\lambda = 80$cm ، ماهي Z_l ؟

٣٠ ـ خط النقل المبين في شكل ١٢ ـ ١٧ له نسبة موجة واقفة مقدارها 2.5 مع اقرب قيمة صغرى واقعة على بعد 15cm من Z_L . أوجد Z_L .

٣١ ـ عندما قصرت دائرة حمل خط نقل ، وجدت قيم الفولتية الصغرى القريبة على أبعاد 23.6cm و 35.4cm من الحمل . عندما أزيلت دائرة القصر ، انتقلت القيم الصغرى الى نقط 27.5cm و 39.3 من الحمل مع $s = 1.6$ ، بفرض خط 50Ω عديم الفقد مع $\nu = c$ ، عين تردد التشغيل و Z_L .



شكل ١٢ ـ ١٧   انظر مسألة ٣٠ .

هواء ، عديم الفقد .
$Z_0 = 50\ \Omega$
z
$z = a$

شكل ١٢ ـ ١٨   انظر مسألة ٣٢ .

٣٢ ـ عندما وصلت دائرة قصر للخط المبين فى شكل ١٢ ـ ١٨ عند $z = a$ ، وجدت فولتيات صغرى عند $z = -21$cm و -46cm . عندما وصل حمل مجهول Z_L عند $z = a$ ، وقعت القيم الصغرى عند $z = -15$cm و -40cm ، و $s = 1.6$. أوجد Z_L .

٣٣ ـ حمل ، $Z_L = 60 - j80\Omega$ ، على خط 50Ω عديم الفقد يعمل على مواءمته مع عقب مقصر الدائرة طوله d_1 يقع على بعد d meters من الحمل .
دع $\lambda = 1$m على الخط . (أ) عين d_1 و d . (ب) أوجد s على كل من أجزاء الخط الثلاثة .

٣٤ ـ عقب مقصر الدائرة طوله 12cm ويقع على بعد 20cm من حمل Z_L . دع $Z_0 = 50\Omega$, $f = 500$MHz ، و $v = c$ ، ودع كل الخطوط تكون عديمة الفقد . عين Z_L .

٣٥ ـ تبين قياسات على خط عديم الفقد نسبة موجة واقفة $2 : 1$ مع القيمة العظمى واقعة على بعد نصف طول موجة من الحمل . على بعد كم من أطوال الموجة من الحمل يجب أن يقع عقب مقصر الدائرة ، وكم من أطوال الموجة يجب أن يكون طوله ؟

٣٦ ـ دعنا نفترض أنه يمكن تمثيل اشارة مستقبلة بهوائى TV بواسطة مكافىء تيفينين ذى $\underline{1/0^\circ}$mv عند $\omega = 5 \times 10^8$ rad/m و 300Ω . (أ) ما قدر القدرة المتوسطة يمكن مدها الى مستقبل TV ذى 300Ω باستخدام خط 300Ω عديم الفقد ؟ (ب) هل يمكن مد نفس هذه القدرة المتوسطة لكل من مستقبلين 300Ω بهذا الهوائى الواحد ؟ اذا كانت الاجابة لا ، برهنها . واذا كانت الاجابة نعم ، فصمم نظاما تنفذ به .

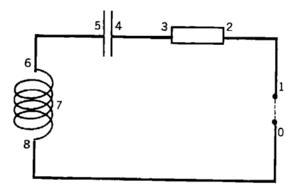
الفصل الثالث عشر

عدة تطبيقات اخرى لمعادلات ماكسويل

سنختتم تقديمنا للنظرية الكهرومغناطيسية باعتبار عدة تطبيقات هامة أخرى لمعادلات ماكسويل ـ نظرية الدوائر ، الفجوة الرنانة ، والاشعاع من هوائى . تغطية هذه المواضيع لاتبين فقط تطبيق وفائدة المعادلات الأساسية المقدمة فى الفصول السابقة ، ولكنها أيضا يجب أن تمدنا ببعض المفاهيم الهامة عن التقريبات المتأصلة فى نظرية الدوائر ، ظاهرة الرنين عند الترددات العالية ، والآلية التى يمكن بها إطلاق الطاقة فى خط نقل الى الفراغ . المراجع المدرجة عند نهاية الفصل يجب ان تكون جميعها الآن ممكنة القراءة جدا ، وأولئك الذين لهم اهتمامات خاصة فى أى من هذه التطبيقات يجب أن يستطيعوا الاستمرار فى دراساتهم بمتعة .

١٣ ـ ١ : قوانين نظرية الدوائر

لنبين كيف أن معادلات ماكسويل ، تعريفات الجهد ، ومفاهيم المقاومة ، السعة ، والمحاثة تجتمع لتعطى التعبيرات العامة لتحليل الدوائر ، اعتبر التشكل المبين فى شكل ١٣ ـ ١ . مؤثر بمجال كهربى خارجى بين النقطتين 0 و 1 . هذان الطرفان قريبان من بعضهما جدا ، ويمكن فرض مجال كهربى جيبى .



شكل ١٣ ـ ١ ترجمة المجال لدائرة *RLC* . التشكل والمواد مرتبة بحيث يمكن التعرف على مقاومة ، مكثف ، عضو حث ، ومنبع فولتية .

ربما يمكننا تصور مذبذب ترانزستورميكروسكوبى ، آلة دوارة بحجم رأس دبوس (كامل مع محرك أساسى) أو حتى برغوث متعاون محركا فما مليئا بالشحنة بالتناوب نحو نقطة

1 ونقطة 0 . مهما تكن طبيعة المنبع ، فهو يستمر فى انتاج مجال كهربى بين هذين الطرفين يكون غير معتمد على اى تيارات قد تمر بالتبعية . بين النقطتين 2 و 3 هناك منطقة من مادة ذات فقد مساحة مقطعها العرضى S_R ، طول d_R ، وموصلية σ . عند نقطتى 4 و 5 موضوع لوحا مكثف ذاتا مساحة S_c ، بفاصل d_c وعازل ذى سماحية ϵ . هذه النقط العديدة متصلة كما هو مبين بموصل تام فتيلى ذى مقطع عرضى مهمل . بين نقطتى 6 و 8 الفتيلة ملفوفة على شكل لولب ذى N من اللفات له خطوة دقيقة جدا .

محتمل أنه واضح أننا نتيجة لاستنباط معادلة الدائرة المألوفة .

$$(١) \quad V_{10} = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I\,dt$$

من معادلات ماكسويل . عندما نعمل هذا ، من المهم مراقبة كيف تنشأ كل من هذه الحدود وماهى الفروض التى نضطر لعملها أثناء العملية . نقطة بدايتنا هى الصورة التكاملية لقانون فاراداى ،

$$(٢) \quad \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

سنرى أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يمدنا بحد واحد فقط فى (١) ، ذاك الذى يشتمل على المحاثة . الحدود الثلاثة الأخرى كلها تنشأ عن التكامل الخطى المغلق .

دعنا نعتبر التكامل السطحى فى الطرف الأيمن لـ (٢) . حيث أن شكل الدائرة لايتغير مع الزمن ، يمكن استبدال مشتقة عادية بالمشتقة الجزئية . أيضا ، الفتيلة بين نقطتى 6 و 8 ، هى لولب ذو N من اللفات ، تحذم فى انتاج مجال مغناطيسى داخل اللولب أكبر بكثير من المجال فى أى منطقة أخرى على طول الفتيلة . إذا فرضنا تدفقا مغناطيسيا كليا Φ يرتبط بجميع اللفات N ، يصبح التكامل السطحى $-d\Phi/dt$ ، أو $-L\,(dI/dt)$ من تعريف المحاثة ، و

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -L\frac{dI}{dt}$$

حيث I هو التيار الفتيلى فى كل لفة من اللولب .

التكامل الخطى المغلق مأخوذ على طول الفتيلة ، مباشرة بين لوحى المكثف ونقطتى 0 و 1 ، كما هو مبين بخط الشرط . المساهمة من الفتيلة التامة التوصيل هى صفر ، لأن E المماسة يجب أن تكون صفرا هناك ، هذا يشمل اللولب ، رغم ما قد يحمله من غرابة . لذلك يكون لدينا

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_0^1 + \int_2^3 + \int_4^5$$

التكامل الأول على اليمين هو السالب للفولتية نقطتى 1 و 0 ،

$$\int_{0}^{1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -V_{10}$$

هذا التكامل هو دالة فقط فى المنبع الخارجى ولايعتمد على التشكل المبين فى شكل ١٣ ـ ١ . ويكون المسار مباشرة بين الطرفين المتجاورين ، وحيث أننا معتادون أكثر على اعتبار منبع خارجى على أنه فولتية عن أنه شدة مجال كهربى ، عادة نسمى V_{10} فولتية مسلطة .

التكامل الثانى مأخوذ عبر المادة ذات الفقد ، ونطبق قانون أوم فى صورة نقطية وتعريف المقاومة الكلية R ،

$$\int_{2}^{3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_{2}^{3} \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{L} = \int_{2}^{3} \frac{J\, dL}{\sigma} = \frac{Jd_R}{\sigma} = \frac{Id_R}{\sigma S_R} = IR$$

مفروض نفس التيار الكلى I ، وهذا مبرر فقط عندما يستوفى شرطان . لايمكن أن يكون هناك تيارات ازاحة سارية من جزء ما من الفتيلة الى آخر (مثل من نقطة 3 الى نقطة 8) ، لأننا نتطلب استمرارية كثافة تيار التوصيل بالاضافة الى الازاحة أن يكون متحققا بواسطة تيار توصيل بمفرده . بتعبير آخر نحن مفترضون أن السعات الشاردة مهملة . أيضا يجب أن تكون أبعاد المسار الفتيلى صغيرة بالنسبة لطول الموجة . هذا سيظهر جدا فى القسم الأخير من هذا الفصل ، ولكن دراستنا للحركة الموجبة وخطوط النقل يجب أن تبين الانعكاس الكامل الذى يمكن حدوثه فى مجال على مسافة نصف طول موجة . هنا نود أن نتجنب الاشعاع ، ولكنه سيمدنا بموضوع اهتمامنا الرئيسى مؤخرا فى الفصل .

التكامل الثالث تقدر قيمته عبر المنطقة بين لوحى المكثف حيث يكون تيار التوصيل صفرا ، ولكن تيار الازاحة يساوى التيار I ، كما أخذنا سابقا . هنا يمكن تمثيل التكامل بـ

$$\int_{4}^{5} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_{4}^{5} \frac{D}{\epsilon}\, dL = \frac{Dd_C}{\epsilon} = \frac{Qd_C}{\epsilon S_C} = \frac{Q}{C}$$

أو

$$\int_{4}^{5} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} I\, dt$$

حيث نفرض أنه لايوجد هناك شحنة على المكثف عند $t = -\infty$.

بضم هذه النتائج ، يكون لدينا

$$-V_{10} + IR + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I\,dt = -L\frac{dI}{dt}$$

أو

$$\boxed{V_{10} = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I\,dt}$$

التى هى المعادلة المألوفة لدائرة التوال RLC التى آملنا أن نحصل عليها .

الفروض التى بنى عليها هذا التساوى . المفروضة ضمنيا فى معظم مسائل الدوائر ، هى كمايلى :

١ ـ موصل فتيلى يحدد المسار المغلق أو الدائرة .
٢ ـ الأبعاد العظمى للدائرة صغيرة بالنسبة لطول موجة .
٣ ـ تيار الازاحة مقصور على المكثفات .
٤ ـ التدفق المغناطيسى مقصور على أعضاء الحث .
٥ ـ الموصلية غير التامة مقصورة على المقاومات .

الفرض الأول يعرف ببساطة ما نعنيه « بدائرة » . والثانى يقتضى ضمنيا أن أى دائرة تكف عن إطاعة قوانين نظرية الدوائر إذا كان التردد عاليا بالقدر الكافى . الفروض الثلاثة الأخيرة تقصر علاقات الدوائر على العناصر المثالية . اذا كانت لمكثفاتنا مقاومات ، أو أعضائنا للحث لها سعات ، لانستطيع تطبيق معادلات الدائرة حتى نستبدل بالمكثف ذا الفقد أو بعضو الحث بالاضافة الى السعات الشاردة بعض الشبكات المحتوية على عناصر مثالية فقط . اختيار تجميع مناسب لعناصر مثالية يصير ممكنا بمعلوماتنا عن تصرف المجالات الكهرومغناطيسية فى وحول الأجهزة ، وتدخل الخبرة أيضا ميسرة الأمور .

من الممكن أيضا استخدام « المعالجة بطريقة دائرة » لكثير من الأجهزة التى لاتحقق الشروط آنفا ، مثل خطوط النقل . أدلة الموجات ، الفجوات الرنانة وكثير من مسائل الهوائيات يمكن أيضا أن تعامل كدوائر فى بعض النواحى . عندما يعمل هذا ، يجب أن يكون الوصف التفصيلى للمجالات الكهربية والمغناطيسية ثانوى الأهمية ؛ ويوصف الجهاز بدلالة فولتية وتيار مكافئين عند كل مدخل أو مخرج . الفجوة الرنانة المناقشة فى القسم التالى هى احدى هذه الأمثلة .

ت ١٣ ـ ١ : عبر عن كل من الأبعاد الاتية بدلالة طول موجة : (أ) خط قوى 60Hz طوله 100mi ، (ب) سلك طوله 10m يحمل اشارة 20kHz من مضخم قدرة الى مجهار ، (جـ) مرحلة مضخم RF ، طولها 3cm ، تعمل عند 1,500kHz (د) مرحلة موالف TV

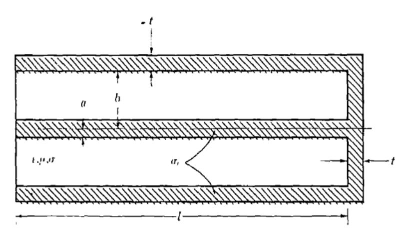
تعمل عند 200Mhz قطرها 2cm ، (هـ) مكشاف موجات دقيقة 30GHz أبعاده العظمى هى 1cm .

الاجابة : 0.0322λ , 0.000667λ , 0.000150λ , 0.0133λ , 1.000λ .

١٣ ـ ٢ : الفجوة المحورية (متحدة المركز) الرنانة

وجدنا فى القسم الأخير أن أساسيات نظرية الدوائر مؤسسة على معادلات ماكسويل ، ولكننا يجب أيضا أن يكون لدينا مسار مغلق (ليس بالضرورة كونه مسارا موصلا) ، أبعاد دائرة تكون صغيرة بالنسبة لطول موجة ، وعناصر دائرة ممكنة التحديد . الان دعنا نعتبر جهازا لاتتحقق فيه معظم هذه المتطلبات ، ولكن مع ذلك يعطى نتائج تحليلية عديدة يمكن تفسيرها بدلالة نظرية الدوائر .

يمكننا التفكير فى معمل مغلق يمر داخله موصل محورى مفرد . داخل المعمل هناك دائرة موزعة ، أى أن ، دائرة لها أبعاد مقارنة بطول موجة مع خواصها المقاومية ، الحثية والسعوية موزعة خلال كل هذه المنطقة . لذلك علاقات الدائرة غير قابلة للتطبيق فى المعمل . مع ذلك نستطيع عند النقطة التى يدخل عندها الموصل المحورى المعمل تعريف فولتية بين الموصلين الخارجى والداخلى والتيار فى كل .



شكل ١٣ ـ ٢ فجوة محورية لها $b \ll \lambda$. هذا الجهاز يمكن أن يمثل بدائرة تواز رنانة بالقرب من التردد الرنان .

هذا ممكن لأن الأبعاد نصف القطرية للموصل المحورى مفروض أنها جزء صغير من طول موجة برغم أن طوله ليس كذلك . المسألة التى نرغب فى اعتبارها هى وصف الجهاز فى المعمل بدلالة دائرة مكافئة . إذا نجحنا ، فحينئذ سوف يكون مستحيلا تعيين ما اذا كان المعمل يحتوى على دائرة مكافئة تستوفى كل متطلبات نظرية الدوائر ، أو دائرة موزعة لاتستوفيها . سنرى أنه خلال نطاق تردد ضيق بالقدر الكافى ، تكون هذه هى الحالة بالفعل .

الجهاز الذى سنستخدمه كمثال فى استنباط دائرة مكافئة هو فجوة رنانة محورية . مثل هذه المرنانات انتقائية جدا بالنسبة للتردد ، وعلى ذلك تجد استخداما فى مقاييس التردد ، مضخمات موالفة ، ومذبذبات ، ويمكن أيضا استخدامها لتعيين الموصلية والسماحية لمواد عازلة ، ربما للتحكم فى بعض عمليات التصنيع أو لتحديد خصائص تربة .

دعنا نعتبر الفجوة المحورية المبينة فى شكل ١٣ ـ ٢ . نفرض أن a , t ، و b أقل كثيرا من طول موجة ؛ l يمكن أن يكون أى طول ، مع أننا سنختار بالتحديد ربع طول موجة . حيث أن ثوابت العازل والموصل معروفة ، نستطيع حساب R , G , L و C للخط ، ومن هذه Z_0 و γ . نستطيع حينئذ قضاء بضع دقائق فى الحصول على تعبير لمعاوقة المدخل لخط نقل ذى فقد ، وعلى ذلك نعين معاوقة المدخل للخط المنهى بحمل قليل المعاوقة ، اللوح المقصر للدائرة . وقد حصلنا على معاوقة المدخل ، سوف نكون حينئذ قادرين على تحديد شكل دائرة مكافئة تعطى نفس معاوقة المدخل ، على الأقل خلال مدى ما ، مرغوب من التردد حول التردد الرنان .

مع ذلك دعنا نختر طريقة عامة أكثر تبين الأسس المتضمنة فى تعيين دائرة مكافئة لأى فجوة ذات موجة دقيقة قريبة من الرنين . سنبدأ بايجاد المجالات التى سوف توجد فى فجوة عديمة الفقد . عندئذ نوجد قيم هذه المجالات عند حدود الموصل ونحسب الفقود التى سوف تحدث اذا كانت هذه المجالات موجودة . مع أننا عند ذلك نستطيع استخدام النتائج الخاصة بتحليل الفقد فى اعادة حساب مجالات الفجوة ونستخدم هذه القيم لتحسين حساباتنا للفقد ، فهذه الطريقة التكرارية ليست ضرورية فى الفجوات ذات الفقد القليل ، التقريب الأول يعطى دقة ممتازة .

بالنسبة للخط المحورى عديم الفقد المنهى بدائرة قصر عند $z = 0$ ، حيث يوجه المحور z الى اليمين ، مطاور الفولتية عند أى نقطة على طول الخط هى مجموع الموجتين الساقطة والمنعكسة ،

$$V_s = V_0 e^{-j\beta z} - V_0 e^{j\beta z} \qquad (٣)$$

أو

$$V_s = -j2V_0 \sin \beta z$$

والتيار هو

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-j\beta z} + \frac{V_0}{Z_0} e^{j\beta z}$$

أو

$$(٤) \quad I_s = \frac{2V_0}{Z_0} \cos \beta z$$

حيث

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

و

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$

شدة المجال المغناطيسى مرتبطة مباشرة بالتيار ،

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho}$$

وعلى ذلك

$$(٥) \quad H_{\phi s} = \frac{V_0}{\pi\rho Z_0} \cos \beta z$$

حينئذ نتذكر[١] أن علاقة شدة المجال الكهربى بالفولتية بين موصلى خط محورى هى

$$(٦) \quad E_{\rho s} = \frac{V_s}{\rho \ln (b/a)} = \frac{-j2V_0}{\rho \ln (b/a)} \sin \beta z$$

حيث فولتية الموصل الخارجى صفر ، وتلك للداخلى V_s .

هاتان المعادلتان الأخيرتان تعطيان المجالات للفجوة عديمة الفقد .

ينشأ فقدان القدرة فى الفجوة فى مواطن مختلفة عديدة : فى عازل غير تام الذى قد يملأ الفجوة ، وفى الموصلات المكونة للموصل المركزى ، والموصل الخارجى ، ولوح النهاية المفرد . دعنا أولا نفرض أن فقد القدرة فى العازل أكبر بكثير منه فى الحوائط ، كما ستكون الحالة اذا كانت الفجوة مملوءة بالبيرة ، الدقيق ، أوبعض الأطعمة الصحية التى يراقب انتاجها كهربيا . الفقد فى العازل يحدد بتكامل كثافة القدرة الأومية خلال كل أنحاء الفجوة . نبدأ بايجاد كثافة تيار التوصيل ،

$$J_{\rho s} = \sigma E_{\rho s} = \frac{-j2\sigma V_0}{\rho \ln (b/a)} \sin \beta z$$

أو ككمية حقيقية ،

$$J_\rho = \frac{2\sigma V_0}{\rho \ln (b/a)} \sin \beta z \sin \omega t$$

(١) القراء الذين ليس لديهم تذكر تام يمكنهم الرجوع لمثال ٢ فى قسم ٧ - ٣ .

القدرة اللحظية المبددة فى العازل هى

$$P_d = \int_{\text{vol}} \frac{1}{\sigma} J_\rho^2 \, dv$$

$$= \int_{-l}^{0} \int_{0}^{2\pi} \int_{a}^{b} \frac{4\sigma V_0^2}{\rho[\ln (b/a)]^2} \sin^2 \beta z \sin^2 \omega t \, d\rho \, d\phi \, dz$$

or أو

$$P_d = \frac{4\pi\sigma V_0^2}{\ln (b/a)} \left(l - \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \sin^2 \omega t$$

والمتوسط الزمنى لفقد القدرة هو

$$P_{d,\text{av}} = \frac{2\pi\sigma V_0^2}{\ln (b/a)} \left(l - \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right)$$

لكى نجهز فجوة رنانة ، دعنا الآن نختر الطول l مساويا ربع طول موجة . إذا كانت الفجوة حقا عديمة الفقد ، سيكون التيار عند المدخل صفرا ، وتكون معاوقة المدخل لانهائية . بدلا من ذلك ، سنجد أن القدرة المفقودة فى العازل والحوائط الموصلة تسبب تيار مدخل صغير ومعاوقة مدخل التى تكون مقاومة عالية عند الرنين . إذا رمزنا للتردد الرنان بـ f_0 فان

$$l = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{1}{4f_0\sqrt{\mu\epsilon}}$$

و

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2l}$$

على ذلك يكون متوسط فقد القدرة فى العازل عند التردد الرنان هو

$$P_{d0,\text{av}} = \frac{2\pi\sigma V_0^2 l}{\ln (b/a)} \quad (٧)$$

نحاول الآن نوفق نتائجنا مع دائرة مكافئة ذات الشكل المبين فى شكل ١٣ ـ ٣ ، دائرة تواز رنانة . عند الرنين تكون معاوقة المدخل مقاومة خالصة R_e (من تعريف الرنين) . من (٣) لدينا الفولتية عند أى نقطة وعند أى زمن ،

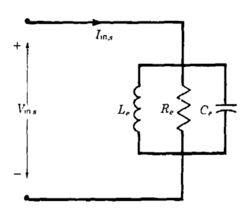
$$V = 2V_0 \sin \beta z \sin \omega t$$

وعلى ذلك تكون فولتية المدخل $(z = -l)$ هى

$$V_{\text{in}} = -2V_0 \sin \beta l \sin \omega t$$

عند الرنين ، $\beta_0 l = \pi/2$ و

$$V_{0,\,in} = -2V_0 \sin \omega t$$



شكل ١٣ ـ ٣ اختيارات مناسبة لـ R_e , Le و Ce تسبب أن تكون هذه الدائرة مكافئة للفجوة المحورية الرنانة فى شكل ١٣ ـ ٢ بالقرب من $f_0 = 1/2\pi\sqrt{L_e C_e} = 1/4l\sqrt{\mu\varepsilon}$ حيث l هو طول الفجوة .

حيث أن اتساع القمة هى $2V_0$ ، يمكننا متوسط فقد القدرة

$$P_{d0,\,av} = \frac{1}{2}\frac{(-2V_0)^2}{R_e} = \frac{2\pi\sigma V_0{}^2 l}{\ln (b/a)}$$

أن نجد المقاومة المكافئة

$$R_e = \frac{\ln (b/a)}{\pi\sigma l} \qquad (٨)$$

هذا التعبير ، بالطبع ، لايفرض فقدا فى حدود الموصل .

لكى نجد تعبيرات لـ Ce و Le فى شكل ١٣ ـ ٣ ، يمكننا إيجاد قيمة للطاقة المختزنة فى المرنان عند الرنين . نستطيع حينئذ استخدام التعريف العام لـ Q ،

$$Q = 2\pi \frac{\text{الطاقة المختزنة}}{\text{الطاقة المفقودة فى دوره}}$$

أو

$$Q = \omega \frac{\text{الطاقة المختزنة}}{\text{متوسط القدرة المفقودة}} \qquad (٩)$$

لتعيين Q . اذا عرفنا Q ، ستمكننا معادلات الدائرة المألوفة من ايجاد Le و Ce .

الطاقة المختزنة فى الفجوة هى مجموع الطاقات المختزنة فى المجالين الكهربى والمغناطيسى . ومع ذلك يمكن بيان أن هذه الطاقة الكلية هى نفسها مثل الطاقة العظمى المختزنة فى أى من المجالين الكهربى أو المغناطيسى . أى أن ، الطاقة الكلية ثابتة ، وعندما تكون الطاقة المغناطيسية صفرا ، تكون الطاقة فى المجال الكهربى قيمة عظمى ، والعكس بالعكس . دعنا نختر القيمة العظمى للمجال المغناطيسى (٥) ،

$$H_{\phi,\max} = \frac{V_0}{\pi\rho Z_0}\cos\beta z$$

وعلى ذلك

$$\begin{aligned} W_{H,\max} &= \int_{\text{vol}} \tfrac{1}{2}\mu H_{\max}^2\, dv \\ &= \frac{\mu V_0{}^2}{2\pi^2 Z_0{}^2}\int_{-l}^{0}\int_{0}^{2\pi}\int_{a}^{b}\frac{1}{\rho}\cos^2\beta z\, d\rho\, d\phi\, dz \\ &= \frac{\mu V_0{}^2 \ln(b/a)}{2\pi Z_0{}^2}\left(l + \frac{\sin 2\beta l}{2\beta}\right) \end{aligned}$$

عند الرنين

$$W_{H0,\max} = W_{0,\max} = \frac{\mu l V_0{}^2 \ln(b/a)}{2\pi Z_0{}^2} = \frac{2\pi\epsilon l V_0{}^2}{\ln(b/a)} \qquad (١٠)$$

تعيين الطاقة المختزنة العظمى فى المجال الكهربى يؤدى الى نفس النتيجة .

بتجميع تعبيراتنا لمتوسط القدرة المفقودة فى العازل (٧) ، والتعريف الخاص بـ Q (٩) ، والطاقة الكلية (١٠) ، جميعها مقدرة عند التردد الرنان ، نجد Q المنتجة بالعازل عند الرنين ،

$$Q_{d0} = \omega_0 \frac{2\pi\epsilon l V_0{}^2/\ln(b/a)}{2\pi\sigma l V_0{}^2/\ln(b/a)}$$

أو

$$Q_{d0} = \frac{\omega_0\epsilon}{\sigma}$$

التى تعطى أنها مقلوب ظل الفقد ، القيمة التى تأخذها مع مكثف محورى عند ترددات أدنى ، وهذه كثيرة الأهمية .

السعة المكافئة Ce يمكن أن توجد اما من تعبير الطاقة فى مكثف ،

$$W_{0,\max} = \tfrac{1}{2}C_e(2V_0)^2$$

أو Q لدائرة تواز رنانة ،

$$Q_{d0} = \omega_0 C_e R_e$$

أنها

$$C_e = \frac{\pi\epsilon l}{\ln (b/a)} \qquad (١١)$$

بمعرفة السعة ، نوجد المحاثة من

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{L_e C_e}$$

أومن Q

$$Q_{d0} = \frac{R_e}{\omega_0 L_e}$$

أنها

$$L_e = \frac{4\mu l}{\pi^3} \ln \frac{b}{a} \qquad (١٢)$$

لفجوة فيها $b/a = 2.72$ ، أو

$\ln (b/a) = 1$, $a = 1$cm , $f_0 = 100$MHz , $\sigma/\omega\epsilon = 0.001$, $\epsilon_R = 4$ ،
و $\mu_R = 1$ ، يكون لدينا

$$l = 37.5 \text{ cm}$$

$$Q_{d0} = 1{,}000$$

$$R_e = 38{,}100\ \Omega$$

$$C_e = 41.7 \text{ pF}$$

$$L_e = 0.0607\ \mu\text{H}$$

لذلك يكون عرض النطاق الترددى للفجوة هو$f_0/Qd_0 = 0.1$ MHz . أيضا ، نقص ثابت العازل للمادة التى تملأ الفجو بـ 0.25 فى المائة من 4 الى 3.99 ، سوف يزيد التردد الرنان بـ 0.125 فى المائة أو 125kHz . مثل هذا التغيير يمكن أن يتعرف عليه بسهولة ، وعلى ذلك يمكن استخدام قياس التردد الرنان لعينة فى الفجوة للتحكم فى جفاف الدقيق ، مثلا .

الآن دعنا نعتبر الفقود فى حوائط الفجوة . قيمة H_ϕ عند الاسطوانة الخارجية $\rho = b$ هى

$$H_{\phi b} = \frac{V_0}{\pi b Z_0} \cos \beta z \cos \omega t$$

إذا كان الموصل تاما ، سيوجد تيار سطحى

$$K_z = -H_{\phi b} = \frac{-V_0}{\pi b Z_0} \cos \beta z \cos \omega t$$

مع موصلية محدودة ، هذا التيار الكلى لكل وحدة عرض يوزع خلال طبقة رقيقة بالقرب من السطح . كما رأينا فى الفصل الحادى عشر ، يمكن ايجاد فقد القدرة الكلى بفرض كثافة تيار منتظمة خلال منطقة سمكها عمق سطحى واحد . لذلك تكون كثافة التيار المنتظمة هذه

$$J_z = \frac{K_z}{\delta} = \frac{-V_0}{\pi b \delta Z_0} \cos \beta z \cos \omega t$$

فقد القدرة الأومى فى الاسطوانة الخارجية (ذات الموصلية σ_c) هو لذلك

$$\begin{aligned} P_b &= \int_{\text{vol}} \frac{1}{\sigma_c} J_z^2 \, dv \\ &= \int_{-l}^{0} \frac{1}{\sigma_c} J_z^2 \delta 2\pi b \, dz \\ &= \frac{V_0^2}{\sigma_c \pi b \delta Z_0^2} \left(l + \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

لذلك متوسط فقد القدرة عند الرنين هو

$$P_{b0,\text{av}} = \frac{V_0^2 l}{2\pi \sigma_c b \delta Z_0^2} \qquad (١٣)$$

يعطى حسابا مماثلا بالنسبة للموصل الداخلى

$$P_{a0,\text{av}} = \frac{V_0^2 l}{2\pi \sigma_c a \delta Z_0^2} \qquad (١٤)$$

السطح المتبقى الوحيد هو لوح النهاية عند $z = 0$. شدة المجال المغناطيسى عند $z = 0$ هى

$$H_\phi \bigg|_{z=0} = \frac{V_0}{\pi \rho Z_0} \cos \omega t$$

مؤدية الى تيار سطحى

$$K_\rho = \frac{V_0}{\pi \rho Z_0} \cos \omega t$$

وكثافة تيار لاتعتمد على z فى العمق السطحى الأول ،

$$J_\rho = \frac{K_\rho}{\delta} = \frac{V_0}{\pi\rho\delta Z_0}\cos\omega t$$

على ذلك يكون فقد القدرة فى لوح النهاية

$$P_{\text{end}} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma_c}\frac{{V_0}^2}{\pi^2\rho^2\delta^2{Z_0}^2}\,\delta\cos^2\omega t\,\rho\,d\phi\,d\rho$$

$$= \frac{2{V_0}^2}{\pi\sigma_c\delta{Z_0}^2}\ln\frac{b}{a}\cos^2\omega t$$

ولذلك

$$(١٥)\quad P_{\text{end, 0, av}} = \frac{{V_0}^2}{\pi\sigma_c\delta{Z_0}^2}\ln\frac{b}{a}$$

بضم (١٣) ، (١٤) ، و(١٥) يكون فقد القدرة الكلى فى الحوائط الموصلة عند الرنين هو

$$P_{\text{av}} = \frac{{V_0}^2 l}{2\pi\sigma_c\delta{Z_0}^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{l}\ln\frac{b}{a}\right)$$

حيث أننا نعرف الطاقة المختزنة الكلية ، يمكننا حساب Q للفجوة الرنانة ذات فقد حائط فقط ،

$$Q_{w0} = \frac{(2/\delta)\ln(b/a)}{(1/a)+(1/b)+(2/l)\ln(b/a)}$$

الآن يحصل على عناصر الدائرة المكافئة بسهولة . حيث أن الطاقة المختزنة الكلية لم تتغير فان Ce لاتتغير . Le يمكن مرة أخرى إيجادها من Ce والتردد الرنان ω_0 ، على ذلك ، فهى أيضا لم تتغير . من ثم فان Q المتغير تؤثر فقط على المقاومة المكافئة R_e ،

$$(١٦)\quad R_e = \frac{Q_{w0}}{\omega_0 C_e} = \frac{4\eta[\ln(b/a)]^2}{\pi^2\delta[(1/a)+(1/b)+(2/l)\ln(b/a)]}$$

حيث

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

باستخدام نفس الفجوة كمثال ، دعنا نفرض أنها مطلية بالفضة $(\sigma_c = 6.18\times10^7\ \mho/m)$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_c}} = 6.40\ \mu\text{m}$$

وعلى ذلك

$$Q_{w0} = 2{,}200$$

بينما

$$R_e = 83{,}900\ \Omega$$

عندما يوجد كلا الفقدين ، يكون فقد القدرة الكلى هو مجموعهما ، وتثبت المقاومة المكافئة أنها تجمع على التوازى للمقاومتين المحصول عليهما باعتبار كل صورة من الفقد على انفراد Q للفجوة عند الرنين هى

$$Q_0 = \frac{1}{(1/Q_{d0}) + (1/Q_{w0})}$$

مختتمين مثلنا ، Q عند الرنين للفجوة المبطنة بالفضة المملوءة بعازل ذى فقد هى

$$Q_0 = \frac{1}{1/1{,}000 + 1/2{,}200} = 687$$

وتقل المقاومة المكافئة الى 26.200Ω .

إذا كانت $V_0 = 1\text{V}$ $(|V_{in,s}| = 2\text{V})$ ، يكون فقد القدرة الكلى $76.3\mu\text{W}$ يوزع هذا بين أجزاء الفجوة المختلفة كما يلى : العازل $52.4\mu\text{W}$ ؛ الموصل المركزى ، $16.8\mu\text{W}$ ، الموصل الخارجى ، $6.2\mu\text{W}$ ، ولوح النهاية ، $0.9\mu\text{W}$.

باستخدام قيم العناصر للدائرة المكافئة ، يمكن تعيين معاوقة المدخل للفجوة المحورية عند ترددات بالقرب من الرنين . هذه مسألة دوائر نموذجية ، وسوف لانحاول استنتاج أو استخدام هذه الصيغ . مع ذلك ، إنه جدير بالاهتمام أن نسأل على أى بعد من الرنين ينطبق التكافؤ . يجب إبقاء حقيقتين فى الذاكرة . أولا ، ستظهر الفجوة المحورية رنينا تواليا عندما يكون طولها نصف طول الموجة ، أو عند 200MHz ، الدائرة المكافئة لاتعطى رنيناً آخر . ثانيا ، بارامترات الفجوة ، مثل موصلية وسماحية العازل ، تتغير مع التردد ، بينما لم يعمل تزويد يتعلق بهذه الظاهرة فى الدائرة المكافئة .

هذه الخصائص المختلفة تسبب أن التناظر بين الدائرة والفجوة يصبح مقصورا على مدى تردد ربما 20 فى المائة من التردد الرنان ، حيث أن اهتمامنا فى تصرف الفجوة يحتمل أن يكون مقصورا على نطاق تردد ضيق بالقرب من الرنين ، وهو واحد يحتوى كل النطاقات الجانبية ذات اتساع محسوس لاشارة معدلة ، مثلا ، فان دائرتنا المكافئة تثبت أنها مفيدة جدا .

ت ١٣ - ٢ : لكل من التعديلات الآتية للفجوة الرنانة المستخدمة كمثال فى هذا القسم ، اعط التردد الرنان الجديد : (أ) l تنقص من 37.5cm الى 30cm (ب) ϵ_R تنقص من 4 الى 3 ، (جـ) μ_R تزيد من 1 الى 1.2 ، (د) a تنقص من 1cm الى 0.8cm .

الاجابة : 125MHz , 115.5MHz , 91.3MHz , 100MHz .

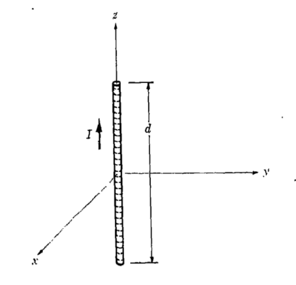
ت ١٣ - ٣ : الفجوة الرنانة ذات ربع طول الموجة المبينة فى شكل ١٣ - ٢ لها قيم البارامترات الآتية :

$l = 30\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $a = 2\text{cm}$, $\sigma = 2 \times 10^{-5}$ ℧/m , $\epsilon_R = 2.225$, $\mu_R = 1$, $\sigma_c = 5 \times 10^7$ ℧/m . إذا كان اتساع الفولتية عبر المدخل الى الفجوة هو 20V عند $\omega = \omega_0$ ، حدد متوسط فقد القدرة فى : (أ) العازل ؛ (ب) الموصل المركزى ؛ (جـ) الموصل الخارجى ؛ (د) لوح النهاية .

الاجابة : 4.11mW , 0.64mW , 0.26mW , 0.08mW .

١٣ - ٣ : الاشعاع

فى هذا المثال الأخير لتطبيق معادلات ماكسويل سنوجد المجال الكهرومغناطيسى الذى ينتج من توزيع معطى لتيار . لذلك ، سيكون لدينا للمرة الأولى المجال المعين الذى ينتج من منبع معين متغير مع الزمن . فى مناقشة الموجة المستوية المنتظمة استقصيت فقط الحركة الموجية فى فضاء حر ، ولم يعتبر منبع المجال . توزيع التيار فى موصل كان مسألة مماثلة ، رغم أننا قمنا على الأقل بربط التيار بشدة مجال كهربى مفترض عند سطح الموصل . هذا يمكن أن يعتبر كمنبع ، ولكنه ليس عمليا جدا لكونه لانهائيا فى الامتداد .



شكل ١٣ - ٤ فتيلة تيار تفاضلية طولها d تحمل تيارا $I = I_0 \cos \omega t$

نفرض الآن فتيلة تيار على أنها المنبع . وهى مأخوذة كطول تفاضلى ، ولكننا سيمكننا مد النتائج بسهولة لفتيلة قصيرة بالنسبة لطول موجة ، بالتحديد أقل من ربع طول موجة تقريبا ككل . الفتيلة التفاضلية مبينة عند نقطة الأصل وموجهة فى اتجاه المحور z فى شكل ١٣ ـ ٤ . الاتجاه الموجب للتيار مأخوذ فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. نفرض تيارا منتظما $I_0 \cos \omega t$ فى هذا الطول القصير d ولانشغل أنفسنا حاليا بعدم الاتصال الظاهرى عند كل طرف .

وسوف لانحاول حالياً اكتشاف « منبع المنبع » ، ولكننا فقط سنفرض أن توزيع التيار لايمكن تغييره بأى مجال ينتجه .

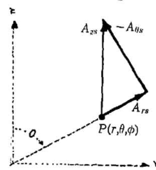
الخطوة الأولى هى تطبيق تعبير الجهد المغناطيسى المتجه المؤخر ، قسم ١٠ ـ ٥ ،

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu[I]\, d\mathbf{L}}{4\pi R}$$

حيث $[I]$ دالة فى الزمن المؤخر $t - R/v$. حيث أنه لايحتاج الى تكامل بالنسبة للفتيلة القصيرة جدا المفترضة ، يكون لدينا

$$\mathbf{A} = \frac{\mu[I]d}{4\pi R}\mathbf{a}_z$$

توجد فقط المركبة فى اتجاه z لـ $\mathbf{A}$ ، لأن التيار يكون فقط فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. عند أى نقطة P ، على مسافة R من نقطة الأصل ، يؤخر التيار بـ R/v و



شكل ١٣ ـ ٥ : تحليل A_{zs} عند $P(r,\theta,\phi)$ الى المركبتين الكرويتين A_{rs} و $A_{\theta s}$. الرسم التخطيطى مرسوم اختياريا فى المستوى $\phi = 90°$.

$$I = I_0 \cos \omega t$$

تصبح

$$[I] = I_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)\right]$$

$$[I_s] = I_0 e^{-j\omega R/v}$$

على ذلك

$$A_{zs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi R} e^{-j\omega R/v}$$

باستخدام نظامى إحداثى مختلط مؤقتا ، دعنا نستبدل R بـ r الصغيرة فى نظام الاحداثيات الكروى ثم نحدد أى المركبات الكروية تمثل بـ A_{zs} . شكل ١٣ ـ ٥ يساعدنا فى تحديد أن

$$A_{rs} = A_{zs} \cos \theta$$

$$A_{\theta s} = -A_{zs} \sin \theta$$

ولذلك

$$A_{rs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \cos \theta \; e^{-j\omega r/v}$$

$$A_{\theta s} = -\frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \sin \theta \; e^{-j\omega r/v}$$

من هاتين المركبتين للجهد المغناطيسى المتجه عند P ، يمكننا إيجاد $\mathbf{B}_s$ أو $\mathbf{H}_s$ من تعريف $\mathbf{A}_s$ ،

$$\mathbf{B}_s = \mu \mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$$

بمجرد أخذ المشتقات الجزئية المبينة . هكذا

$$H_{\phi s} = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta s}) - \frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_{rs}}{\partial \theta}$$

$$H_{rs} = H_{\theta s} = 0$$

و

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta \; e^{-j\omega r/v} \left(j \frac{\omega}{vr} + \frac{1}{r^2} \right)$$

مركبات المجال الكهربى التى يجب أن تقترن بهذا المجال المغناطيسى توجد من الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى عندما تطبق على منطقة يغيب فيها تيار التوصيل والحمل ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

أو فى التدوين المركب ،

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon \mathbf{E}_s$$

فك الالتواء فى احداثيات كروية يؤدى الى

$$E_{rs} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_{\phi s} \sin \theta)$$

$$E_{\theta s} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(- \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\phi s})$$

أو

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi} \cos \theta \, e^{-j\omega r/v} \left(\frac{1}{\epsilon v r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta \, e^{-j\omega r/v} \left(\frac{j\omega}{\epsilon v^2 r} + \frac{1}{\epsilon v r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right)$$

لكى نبسط شرح الحدود المحتواة فى الأقواس آنفاً ، نعمل التعويضات $\omega = 2\pi f$, $f\lambda = v$, $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, و $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ، منتجة

(١٧) $$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta \, e^{-j2\pi r/\lambda} \left(j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} \right)$$

(١٨) $$E_{rs} = \frac{I_0 d\eta}{2\pi} \cos \theta \, e^{-j2\pi r/\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right)$$

(١٩) $$E_{\theta s} = \frac{I_0 d\eta}{4\pi} \sin \theta \, e^{-j2\pi r/\lambda} \left(j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right)$$

هذه المعادلات الثلاث تبين أن السبب فى أن مسائل عديدة جدا تشمل هوائيات تحل بطرق تجريبية أفضل منها بطرق نظرية . لقد نتجت عن ثلاث خطوات عامة : تكامل (تافه لانموذجى) وتفاضلان . هذه الخطوات كافية أن تجعل عنصر التيار البسيط وتعبير تياره البسيط أن « ينفجر » الى المجال المعقد ، الموصف بـ (١٧) الى (١٩) . بالرغم من هذا التعقيد يمكن الحصول على عدة ملاحظات هامة .

يمكننا ملاحظة : أولا العامل $e^{-j2\pi r/\lambda}$ الظاهر مع كل مركبة . هذا يبين انتشارا للخارج من نقطة الأصل فى اتجاه r الموجب بطول موجة λ وسرعة $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ نستخدم المصطلح « طول موجة » الآن بمعنى أوسع الى حد ما عن التعريف الأصلى ، الذى يرمز لطول الموجة ، لموجة مستوية منتظمة بالمسافة بين نقطتين ، مقاسة فى اتّجاه الانتشار ، اللتين عندهما يكون للموجة قيم لحظية متطابقة . هنا يوجد تعقيدات إضافية ناشئة عن

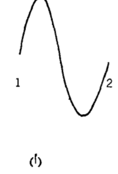
الحدود المحتواة فى الأقواس ، التى هى دوال مركبة فى r . هذه التغييرات يجب أن تهمل الآن فى تحديد طول الموجة . هذا مكافىء لتحديد طول الموجة عند مسافة كبيرة من نقطة الأصل ، ويمكننا توضيح هذا برسم المركبة H_ϕ تخطيطياً كدالة فى r تحت الشروط الآتية :

$$I_0 d = 4\pi \qquad \theta = 90° \qquad t = 0 \qquad f = 300 \text{ MHz}$$

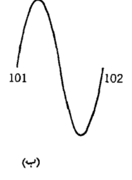
$$v = 3 \times 10^8 \text{ m/s (free space)} \qquad \lambda = 1 \text{ m}$$

لذلك

$$H_{\phi s} = \left(j\frac{2\pi}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-j2\pi r}$$



(أ)



(ب)

شكل ١٣ ـ ٦ : الاتساع اللحظى لـ $H\phi$ فى الحالة الخاصة لعنصر تيار له $I_0 d = 4\pi$. و $\lambda = 1$ مرسوم عند $\theta = 90°$ و $t = 0$ (أ) فى المنطقة $1 \leqslant r \leqslant 2$ بالقرب من الهوائى ، و (ب) فى المنطقة $101 \leqslant r \leqslant 102$ بعيدا عن الهوائى . المنحنى الأيمن غير جيبى بقدر ملحوظ .

والجزء الحقيقى يمكن تعيينه عند $t = 0$ ،

$$H_\phi = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^4}} \cos\left(\tan^{-1} 2\pi r - 2\pi r\right)$$

بمعرفة أن $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ، وأن $\cos(\tan^{-1} x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$ ، يمكن تبسيط هذه النتيجة الى

$$H_\phi = \frac{1}{r^2}\left(\cos 2\pi r + 2\pi r \sin 2\pi r\right)$$

القيم المحصول عليها من هذه المعادلة الأخيرة مرسومة ضد r فى المدى $2 \geqslant r \geqslant 1$ فى شكل ١٣ ـ ٦أ ، المنحنى غير جيبى بقدر ملحوظ . عند $r = 1$ ، $H_{\phi} = 1$ بينما عند $r = 2$ ، أكبر بطول موجة ، $H_{\phi} = 0.25$. علاوة على ذلك ، يقطع المنحنى المحور (بميل موجب) عند $r = 1 - 0.0258$ و $r = 2 - 0.0127$ ، مرة أخرى على مسافة لاتساوى طول موجة . اذا عمل رسم تخطيطى مشابه فى المدى : $102 \geqslant r \geqslant |0|$ مبين فى شكل ١٣ ـ ٦ب على مقياس رسم مختلف الاتساع ، يحصل على موجة جيبية أساسا والقيم اللحظية لـ H_{ϕ} عند $r = 101$ و $r = 102$ هى : 0.0000998 و 0.0000996 . الاتساعات العظمى للأجزاء الموجبة والسالبة لشكل الموجة تختلف بأقل من واحد فى المائة ، ويمكننا القول أنه لكل الأغراض العملية تكون الموجة فى هذه المنطقة موجة مستوية منتظمة ذات تغير جيبى مع المسافة (والزمن ، بالطبع) وطول موجة محدد تماما . واضح ان هذه الموجة تحمل طاقة بعيدا عن الهوائى التفاضلى ، وسنحسب هذه القدرة بعد قليل .

باستمرار استقصاء (١٧) الى (١٩) ، دعنا الان نلقى نظرة اهتمام أكثر على التعبيرات المحتوية على حدود متغيرة بالصورة $1/r^3$, $1/r^2$ ، و $1/r$ عند نقط قريبة جدا من عنصر التيار يجب أن يكون الحد $1/r^3$ هو الغالب .

فى المثال العددى الذى قد استخدمناه ، القيم النسبية للحدود فى $1/r^3$, $1/r^2$ و $1/r$ فى تعبير $E_{\theta s}$ هى حوالى 250 , 16 ، و 1 بالترتيب ، عندما تكون r هى 1cm . تغير مجال كهربى بصورة $1/r^3$ يجب أن يذكرنا بالمجال **الكهروستاتيكى** لثنائى القطب (الفصل الرابع . هذا الحد يمثل طاقة مختزنة فى مجال مفاعل (سعوى) ، ولايساهم فى القدرة المشعة . حد التربيع العكسى فى تعبير $H_{\phi s}$ هو بالمثل هام فقط فى المنطقة القريبة جدا من عنصر التيار ويقابل المجال **الحثى** لعنصر التيار المستمر المعطى بقانون بيو ـ سافار . عند مسافات تقابل عشرة اطوال الموجة أو أكثر من عنصر التيار المتذبذب ، كل الحدود عدا حد مقلوب المسافة $(1/r)$ يمكن أن تهمل والمجالات البعيدة أومجالات الاشعاع تصبح .

$$E_{rs} = 0$$

$$E_{\theta s} = j\frac{I_0\, d\eta}{2\lambda r}\sin\theta\, e^{-j2\pi r/\lambda} \qquad (٢٠)$$

$$H_{\phi s} = j\frac{I_0\, d}{2\lambda r}\sin\theta\, e^{-j2\pi r/\lambda} \qquad (٢١)$$

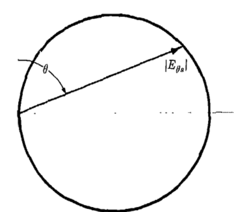
أو

$$E_{\theta s} = \eta H_{\phi s}$$

على ذلك يرى أن العلاقة بين $E_{\theta s}$ و $H_{\phi s}$ هى تلك بين المجالين الكهربى والمغناطيسى للموجة المستوية المنتظمة ، على ذلك تؤكد النتيجة التى وصلنا اليها عند استقصاء طول الموجة .

تغير كلا مجالى الاشعاع مع الزاوية القطبية θ هو نفسه ؛ المجالات لها قيم عظمى فى المستوى الاستوائى لعنصر التيار وتنعدم على طول أى من امتدادى العنصر التغير مع الزاوية يمكن أن يبين برسم **نمط رأسى** (بفرض توجيه رأسى لعنصر التيار) الذى فيه يرسم المقدار النسبى لـ $E_{\theta s}$ مع θ مع ثبات r . عادة يبين النمط على إحداثيات قطبية ، كما فى شكل ١٣ ـ ٧ . يمكن أيضا رسم **نمط أفقى** لنظم هوائيات أكثر تعقيدا وتبين تغير شدة المجال مع φ . النمط الافقى لعنصر التيار هو دائرة ممركزة عند نقطة الأصل حيث أن المجال ليس دالة فى زاوية السمت .

لكى نحصل على تعبير كمى للقدرة المشعة ، نحتاج تطبيق متجه بوينتنج $\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ المستخلص فى قسم ١١ ـ ٤ .



شكل ١٣ ـ ٧ الرسم القطبى للنمط الرأسى لعنصر تيار رأسى . اتساع القمة لـ $E_{\theta s}$ مرسوم كدالة للزاوية القطبية θعند مسافة r ثابتة . المحل الهندسى هو دائرة .

التعبيرات اللحظية لمركبتى الاشعاع الخاصتين بشدتى المجال الكهربى والمغناطيسى هى

$$E_\theta = \eta H_\phi$$

$$H_\phi = -\frac{I_0 d}{2\lambda r} \sin\theta \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

وعلى ذلك

$$\mathscr{P}_r = E_\theta H_\phi = \left(\frac{I_0 d}{2\lambda r}\right)^2 \eta \sin^2\theta \sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

إذن القدرة الكلية (فى الفراغ) اللحظية (فى الزمن) العابرة لسطح كرة نصف قطرها r_0 هى

$$P = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathscr{P}_r r_0^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \left(\frac{I_0 d}{\lambda}\right)^2 \eta \frac{2\pi}{3} \sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi r_0}{\lambda}\right)$$

والمتوسط الزمنى للقدرة يعطى بنصف الاتساع الأقصى ،

$$P_{av} = \left(\frac{I_0 d}{\lambda}\right)^2 \eta \frac{\pi}{3} = 40\pi^2 \left(\frac{I_0 d}{\lambda}\right)^2$$

حيث $\eta = 120\pi\Omega$ فى فضاء حر .

هذه هى نفس القدرة كتلك التى ستبدد فى مقاومة R_{rad} بالتيار I_0 فى غياب أى اشعاع ، حيث

$$\boxed{P_{av} = \tfrac{1}{2} I_0^2 R_{rad}}$$

$$\boxed{R_{rad} = \frac{2P_{av}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2} \quad (٢٢)$$

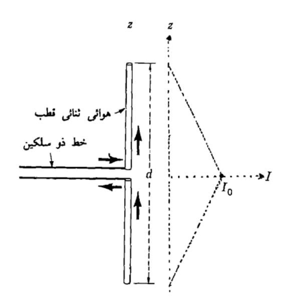
إذا فرضنا الطول التفاضلى 0.01λ ، حينئذ تكون R_{rad} هى 0.08Ω هذه المقاومة الصغيرة ربما تكون مقارنة بالمقاومة الأومية لهوائى عملى ، وعلى ذلك قد تكون كفاءة الهوائى صغيرة بدرجة غير مرضية . أيضا مواءمة فعالة مع المنبع تصبح صعبة التحقيق جدا ، لأن مفاعلة الدخل لهوائى قصير أكبر كثيرا فى المقدار عن مقاومة المدخل R_{rad} . هذا هو أساس التصريح بأن هوائيا فعالا يجب أن يكون طوله جزءا ملموسا من طول موجة .

توزيع التيار الفعلى على هوائى خطى رفيع هو تقريبا جدا جيبى ، حتى بالنسبة لهوائيات قد تكون طولا عدة أطوال موجية . لاحظ أنه إذا طوى موصلا خط نقل ذى سلكين مفتوح الدائرة الى الخلف بـ $90°$ ، يكون توزيع الموجة الواقفة على الخط هى نفسها مثل التوزيع المفروض على الهوائى . التيار صفر عند كلا النهايتين وقيمة عظمى على بعد ربع طول موجة من كلا النهايتين ، ويستمر التيار فى التغيير بهذه الطريقة فى

اتجاه المركز . التيار عند المركز ، لذلك ، سيكون صغيرا جدا بالنسبة لهوائى طوله عدد صحيح من أطوال الموجة ، ولكنه سيساوى القيمة العظمى الموجودة عند أى نقطة على الهوائى اذا كان طول الهوائى $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$ . . الخ .

حينئذ على هوائى قصير نرى فقط الجزء الأول من موجة الجيب ، اتساع التيار يكون صفرا عند كلا النهايتين وتزيد تقريبا بطريقة خطية الى قيمة عظمى I_0 عند المركز . هذا مقترح فى الرسم التخطيطى فى شكل ١٣ ـ ٨ . لاحظ أن هذا الهوائى له تيارات متطابقة فى النصفين ويمكن أن تغذى بيسر بخط ذى سلكين ، حيث يكون التياران فى الموصلين متساويى الاتساع ولكن متضادى الاتجاه . الثغرة عند نقطة التغذية صغيرة ولها تأثيرات مهملة يسمى هوائى متماثل من هذا النوع ثنائى قطب . تغير التيار الخطى مع المسافة هو فرض معقول لهوائيات ذات طول كلى أقل من ربع طول موجة تقريبا .

من الممكن مد تحليل عنصر التيار التفاضلى الى ثنائى القطب القصير اذا فرضنا ان الطول قصير بالقدر الكافى بحيث يمكن اهمال تأثيرات التأخير . أى أننا نعتبر الاشارتين اللتين تصلان عند أى نقطة مجال P من نهايتى الهوائى تكونان فى نفس الطور .



شكل ١٣ ـ ٨ هوائى قصير $(d < \lambda/4)$ له توزيع خطى للتيار ويمكن أن يغذى بخط ذى سلكين .

التيار المتوسط على طول الهوائى هو $I_0/2$ ، حيث I_0 هو تيار مدخل عند طرفى المركز . على ذلك ، شدتا المجال الكهربى والمغناطيسى ستكونا نصفى القيمتين المعطيتين فى (٢٠) و (٢١) ، وليس هناك تغيرات فى الانماط الرأسية والأفقية . القدرة ستكون ربع قيمتها السابقة ، وعلى ذلك ستكون مقاومة الاشعاع ايضا ربع القيمة المعطاة بـ (٢٢) .

اذا حاولنا تحسين نتائجنا بفرض تغير جيبى لاتساع التيار مع المسافة على طول الهوائى ، واذا ضمنت تأثيرات التأخير فى التحليل ، فحينئذ تصبح التكاملات المطلوبة لايجاد A والقدرة المشعة اكثر صعوبة بشكل هائل حيث أننا نريد أن نسرع نحو الصفحة الأخيرة ، دعنا فقط ندون أنه بالنسبة للهوائى الأكثر شيوعا فى العالم ، ثنائى القطب النصف موجى $(d = \lambda/2)$ ، يحصل فى اخر الأمر على النتائج الاتية :

$$E_{0s} = \frac{I_0 \eta}{2\pi r} \frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} \quad (٢٣)$$

$$H_{\phi s} = \frac{E_{0s}}{\eta} \quad (٢٤)$$

$$R_{rad} = 30\left[\frac{(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2\pi)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(2\pi)^6}{6 \cdot 6!} - \frac{(2\pi)^8}{8 \cdot 8!} + \cdots\right] = 73.1\ \Omega \quad (٢٥)$$

دعنا نقارن هذه القيمة الدقيقة مع نتائج محصول عليها بوسائل تقريبية أكثر . افترض أننا حاولنا أولا أن نجد مقاومة الاشعاع بفرض توزيع تيار منتظم وبإهمال تأثيرات التأخير . النتيجة يحصل عليها من (٢٢) بـ $d/\lambda = 1/2$, $R_{rad} = 20\pi^2 = 197.4\Omega$. هذه أكبر بكثير من 73.1Ω ، ولكننا أيضا قد فرضنا تيارا أعلى بكثير على الهوائى عما هو موجود بالفعل .

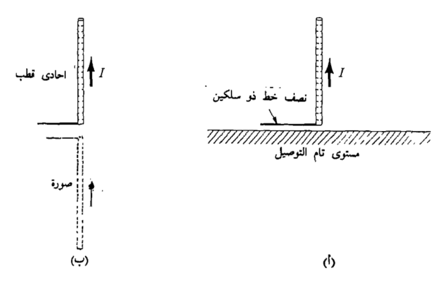
يمكن تحسين النتيجة باعتبار توزيع خطى للتيار بينما ما نزال نتجاهل التأخير . التيار المتوسط هو نصف القيمة العظمى ، القدرة تكون ربع واحد ، وتنقص مقاومة الاشعاع الى $5\pi^2$ أو 49.3Ω الان تكون النتيجة صغيرة كثيرا ، اساسا لأن القيمة المتوسطة لموجة مثلثية اقل من القيمة المتوسطة لموجة جيبية .

أخيرا ، إذا فرضنا توزيع تيار جيبى ، يكون لدينا قيمة متوسطة $2/\pi$ مضروبة فى القيمة العظمى ، وتصل مقاومة الاشعاع الى $(2/\pi)^2(20\pi^2)$ أو 80Ω . هذه قريبة بقدر معقول من القيمة الحقيقية ، والاختلاف يكمن فى إهمال التأخير . فى هوائى خطى ، تأثير التأخير يكون دائما تأثير حذف ، ولذلك فاعتباره يجب أن يؤدى دائما الى قيم اصغر لمقاومة الاشعاع . هذا النقص ذو مقدار صغير نسبياً هنا (من 80 الى 73.1Ω) لأن عناصر التيار المتجة الى أن تلاشى بعضها البعض هى تلك عند نهايتى ثنائى القطب ، وهذه ذات اتساع صغير ، علاوة على ذلك ، يكون التلاشى أعظم فى اتجاه طول محور الهوائى حيث كل مجالات الاشعاع أصفار بالنسبة لهوائى خطى .

هوائيات مألوفة والتى تقع ضمن تصنيف ثنائى القطب هى العناصر المستخدمة فى هوائيات استقبال الـ TV و FM الشائعة .

كمثال أخير على هوائى عملى ، دعنا نجمع قليلا من الحقائق عن الهوائى أحادى القطب هذا نصف ثنائى قطب بالاضافة الى مستوى تام التوصيل ، كما هو مبين فى شكل ١٣ ـ ٩أ . مبدأ الصور المناقش فى قسم ٥ ـ ٥ يعطى الصورة المبينة فى شكل ١٣ ـ ٩ب ويؤكد لنا أن المجالات فوق المستوى هى نفسها بالنسبة لأحادى القطب وثنائى القطب . لهذا ، فالتعبيران (٢٠) و (٢١) صحيحان بحد سواء بالنسبة لأحادى القطب . لذلك يكون متجه بوينتنج أيضا نفسه فوق المستوى ، ولكن التكامل لايجاد القدرة الكلية المشعة يمتد خلال نصف الحجم فقط . على ذلك تكون القدرة المشعة ومقاومة الاشعاع بالنسبة لأحادى القطب نصف القيم المقابلة بالنسبة لثنائى القطب . كمثال ، احادى قطب بتوزيع تيار منتظم مفترض يكون له $R_{rad} = 40\pi^2 (d/\lambda)^2$ ، تيار مثلثى يؤدى الى $R_{rad} = 10\pi^2 (d/\lambda)^2$ وتوزيع التيار الجيبى لأحادى قطب طوله $\lambda/4$ يؤدى الى : $R_{rad} = 36.5$.

يمكن أن نغذى هوائيات أحادية القطب بواسطة كابل محورى تحت المستوى ، موصله المركزى موصل بالهوائى خلال فتحة صغيرة ، وموصله الخارجى موصل بالمستوى . اذا كانت المنطقة تحت المستوى لايمكن الوصول اليها أوغير ملائمة ، يمكن وضع الكبل المحورى فوق المستوى وموصله الخارجى موصل به .



شكل ١٣ ـ ٩ : (أ) هوائى احادى القطب المثالى يرتفق دائما بمستوى تام التوصيل . (ب) أحادى القطب بالاضافة الى صورته يكونان ثنائى قطب .

أمثلة على هذا النوع من الهوائيات تشمل أبراج إذاعة AM وهوائيات CB .

ت ١٣ ـ ٤ : بالنسبة لهوائى قصير مع توزيع تيار منتظم فى الهواء ، دع $I_0 d = 0.3$A.m

و $\lambda = 10$cm ، وأوجد عند نقطة $P(10\text{cm}, \theta = 90°, \phi = 0°)$ اتساع : (أ) الحد $1/r$ لـ $E_{\theta s}$ ، (ب) الحد $1/r^2$ لـ $E_{\theta s}$ ، (جـ) الحد $1/r^3$ لـ $E_{\theta s}$.

الاجابة : 5,660V/m , 900V/m , 143V/m .

ت ١٣ ـ ٥ : هوائى ثنائى قطب قصير بـ d = 4m ، $\lambda = 100$m ، و $I_0 = 40$A ومع اتساع تيار متزايد خطيا على طول الهوائى ، يعمل فى الهواء . إذا أعطيت نقطة بعيدة $P(5\text{km}, \theta = 75°, \phi = 55°)$ ، حدد : (أ) $E_{\theta s}$ عند P ، (ب) $H_{\phi s}$ عند P ، (جـ) متوسط القدرة المشعة الكلية .

الاجابة : j29.1mV/m , j77.3μA/m , 253W .

مراجع مقترحة

1 - American Radio Relay League: "The A.R.R.L. Antenna Book", The American Radio Relay League, Inc., Newington, Conn., 1970.

هذا المنشور يحتوى على ثروة من معلومات عملية ووصفية عن الهوائيات وخطوط النقل وهو أيضا يكلف قليلا جدا .

(انظر المراجع المقترحة للفصل الثامن) :

2 - Jordan, E.C., and K.G. Balmain

كل من المواضيع المغطاة فى هذا الفصل نوقش بعمق .

3 - Marcuvitz, N.: "Waveguide Handbook". M.I.T. Radiation Laboratory Series, vol. 10, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

هذا المرجع القياسى عن خطوط النقل ، أدلة الموجات ، والفجوات الرنانة يعطى كلا النظرية وبيانات عددية .

(انظر المراجع المقترحة للفصل السادس) :

4 - Ramo, S., J. R. Whinnery, and T.Van Duzer :

كل من المواضيع المناقشة فى هذا الفصل معالج بتفصيل أكثر .

5 - Weeks, W.L.: "Antenna Engineering", McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
هذا المرجع الممتاز ربما يحتوى على الهوائيات أكثر مما تريد معرفته .

مسائل :

١ - جزء من كابل محورى 50Ω عديم الفقد طوله 40cm . يستخدم عازل له $\epsilon_R = 3$ و $\mu_R = 1$. الكابل مقصر الدائرة عند احدى النهايات ومستخدم كمحاثة فعالة . (أ) احسب L_{eq} عند f تساوى 10^4 , 10^6 و 10^8Hz (ب) ارسم L_e ضد f ، $0 \leqslant f \leqslant 108$MHz .

٢ - ملف لولبى ذو طبقة واحدة ملفوف على قلب اسطوانى ذو قطر خارجى 6mm وطول 3.2cm . السلك النحاسى المستخدم ذو نصف قطر 0.4mm ، شاملا 0.02mm من العزل . (أ) كم طول قطعة من سلك مطلوبة لانشاء ملف لولبى محزوم باحكام ذو طبقة واحدة ، (ب) عند أى تردد يساوى هذا الطول 0.1λ فى هواء ؟ (جـ) ما هى محاثة التردد المنخفض لهذا الملف اللولبى ؟ (د) ما هى مقاومة التوالى التى يجب أن تضمن مع نموذج التردد المنخفض ؟

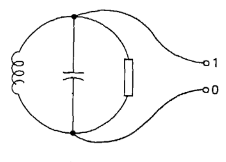
٣ - المحاثة الخارجية لقطعة مستقيمة من سلك غير مغناطيسى ذى نصف قطر a وطول d فى هواء معطاة فى Jordan and Balmain[1] بالصورة :
$L_{ext} = (\mu_0 d/2\pi)\ln(3 \times 10^8/\omega a)$. المحاثة الداخلية يمكن إهمالها عند الترددات العالية . إذا كان لمكثف 10pF أطراف طول كل منها 5cm ومصنوعة من سلك صغير القطر نسبيا ،
$a = 10^{-4}$m ، كم سيكون تردد التوالى الرنان لتجمع $C - L_{ext}$ ؟

٤ - مكثف دائرة مكاملة يستخدم الكترود الومنيوم له مساحة 1 mm× 1 mm ، طبقة عازل ثانى أكسيد السيليكون سمكها 0.1μm ، وقاعدة سيليكون تعمل بصفتها الالكترود الثانى . إذا كان SiO_2 له ثابت عازل ذو 3.8 وموصلية 2×10^{-6} /m عند 100MHz ، احسب : (أ) C (ب) المقاومة على التوازى مع c عند : 100 MHz (جـ) النسبة Q للمقاومة الى المفاعلة للمكثف عند 100MHz .

٥ - طول 2m من كابل محورى ذو 50Ω مفتوح الدائرة عند إحدى النهايتين بينما النهاية الأخرى موصلة بقنطرة مسامحة تعمل عند 1KHz . يبين الجهاز سعة مقدارها 160pF مع ظل فقد مقداره 4.5×10^{-4} (أ) حدد ϵ_R و σ للعازل عند 1KHz ، (ب) ما هى سعة المدخل التى سوف تقاس عند 10MHz ، بفرض أن الفقد يمكن أن يهمل ؟

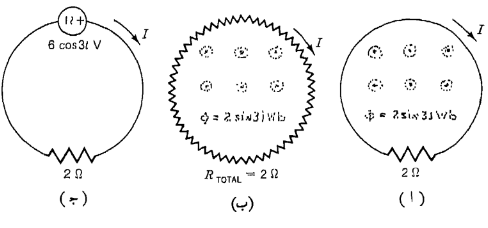
(١) انظر المراجع المقترحه للفصل الثامن.

٦ ـ دائرة RLC متصلة على التوازى محاطة بسطح مغلق ، كما يوحى به شكل ١٣ ـ ١٠ . طبق نظرية بوينتنج ، معادلة (٣٨) فى قسم ١١ ـ ٤ ، على السطح المغلق وبين أنها تؤدى الى نتيجة نظرية الدوائر أن القدرة اللحظية التى تمد بواسطة المولد بين نقطتى 0 و 1 تساوى مجموع القدرات المعطاة لعناصر الدوائر الثلاثة .



شكل ١٣ ـ ١٠ : انظر مسألة ٦ .

٧ ـ ثلاثة مسارات موصلة مبينة فى شكل ١٣ ـ ١١ . مجالات مغناطيسية خارجية مسلطة فى أ و ب تحقق تدفقات كلية مقدارها $2\sin 3t$Wb داخل العروتين . لايوجد مجال مغناطيسى خارجى مسلط فى جـ . تحتوى العروة (أ) على مقاومة 2Ω مجمعة ، والعروة (ب) لها مقاومة كلية مقدارها 2Ω موزعة بانتظام والعروة (جـ) تحتوى على مقاومة 2Ω مجمعة ومنبع فولتية تيار متردد $6\cos 3t$ V(ac) جميع أسلاك التوصيل تامة التوصيل . (أ) احسب I لكل عروة ، مهملا أى تدفق قد ينتج عن I نفسها . (ب) احسب قيمة التكامل الخطى المغلق فى عكس اتجاه دوران عقرب الساعة لشدة المجال الكهربى حول كل عروة ، معطيا النتيجة الكلية والمساهمة من كل جزء من المسار .



شكل ١٣ ـ ١١ : انظر مسألة ٧ .

٨ ـ الأسطح x تساوى 0 , 10cm , y تساوى 0 , 10cm , z تساوى 0 , 10cm جميعها موصلات معدنية لها $\sigma_c = \infty$. داخل هذا الحيز المكعبى هواء ، ويحتوى المجال الكهربى $E = 1{,}000 \sin 10\pi x \sin 10\pi y \cos 3\sqrt{2}\, \pi 10^9 t\, a_z$ V/m

(أ) أوجد H . (ب) احسب H_y عند السطح $x = 0$. (جـ) احسب K_z عند هذا السطح . (د) اذا كانت $\sigma_c = 5 \times 10^7$ ℧/m ، ماهى قدرة الفقد المتوسطة فى المساحة المربعة ، $x = 0$, $0 < y < 10$cm , $0 < z < 10$cm ؟

٩ ـ المجال $E_z = 1{,}000 \sin 10\pi x \sin 10\pi y \cos 15 \times 10^8 \pi t$ V/m موجود فى المنطقة $0 < x < 0.1$m , $0 < y < 0.1$m , $0 < z < 0.1$m . اذا كان للوسط المتجانس $\epsilon_R = 2$, $\mu_R = 1$ و $\sigma = 5 \times 10^{-6}$ ℧/m عند هذا التردد ، ما المقدرة المتوسطة التى تفقد فى العازل ؟

١٠ ـ فجوة محورية لها الأبعاد $a = 0.8$cm , $b = 4$cm ، و $l = 12$cm الداخل مفرغ . حدد التردد الرنان اذا كانت : (أ) احدى النهايتين مفتوحة الدائرة والأخرى مقصرة الدائرة ، (ب) كلا النهايتين مقصرتى الدائرة ، (جـ) كانت احدى النهايتين مفتوحة واحدى النهايتين مقصر الدائرة ، وربع الطول (أى النهايتين تفضل) مملوء تماما بعازل له $\epsilon_R = 9$, $\mu_R = 1$, $\sigma = 0$.

١١ ـ للفجوة الربع موجية المبينة فى شكل ١٣ ـ ٢ ، دع $a = 0.8$cm , $b = 4$cm , $l = 15$cm , $\mu_R = 1$ ، و $\epsilon_R = 6.25$. (أ) احسب C_e و L_e . احسب Q_0 و R_e اذا كانت : (ب) $\sigma = 10^{-4}$℧/m و $\sigma_c = \infty$ ، (ج) $\sigma = 0$ و $\sigma_c = 5 \times 10^7$ ℧/m ، (د) $\sigma = 10^{-4}$ ℧/m و $\sigma_c = 5 \times 10^7$ ℧/m .

١٢ ـ الدائرة المكافئة لفجوة معينة ربع طول موجة طولا تتركب من $L_e = 10^{-7}$H , $C_e = 10^{-11}$F و $R_e = 50$kΩ . فولتية ، $2\cos\omega t$V ، أثرت عند مدخل الفجوة . حدد مقدار تيار المدخل اذا كانت ω تساوى : (أ) ω_0 (ب) $1.01\omega_0$.

١٣ ـ أبعاد الفجوة المبينة فى شكل ١٣ ـ ٢ هى $a = 5$mm , $b = 3$mm و $l = 40$cm افرض أن الفجوة مملوءة بالهواء ومصنوعة من مادة لها $\sigma_c = 4 \times 10^7$℧/m . (أ) اذا كان $l = \lambda_0/4$ ، حدد L_e , C_e , R_e و Q_0 . (ب) اذا كان $l = 3\lambda_0/4$ ، حدد L_e و C_e .

١٤ ـ فجوة محورية طولها 75cm ، مملوءة بالهواء ، مقصرة عند كلا النهايتين ، ومصنوعة من مادة لها $\delta = 10\mu$m عند التردد العامل ، ولها $\text{Ln}(b/a) = 2$ مع $a = 0.4$cm . عملت توصيلات خارجية للموصل الداخلى والخارجى عند نقطة منتصف الفجوة . عين قيما لـ C_e , L_e و R_e .

١٥ ـ فجوة محورية ربع طول موجية لها فقود حوائط الموصل مقسمة بحيث ينشأ 80 فى المائة فى الموصل المركزى ، 15 فى المائة فى الموصل الخارجى و 5 فى المائة فى لوح النهاية المفرد . اذا كان الموصل المركزى ذو قطر 8 mm ، أوجد التردد الرنان لفجوة مفرغة .

١٦ ـ موجة مستوية منتظمة فى الهواء ، $\mathbf{E} = E_{x0}\cos(10^8 t - \beta z)\mathbf{a}_x$ ، تسقط عموديا على سطح صلب مستوى له $\sigma_c = 2 \times 10^6$ ℧/m , $\mu_R = 250$. اذا مثلث هذه الموجة الساقطة كثافة قدرة متوسطة مقدارها 1W/m^2 ، ما هو فقد القدرة المتوسطة فى 1m^2 من السطح العاكس ؟

١٧ ـ الهوائى القصير فى شكل ١٣ ـ ٤ له $I = \cos 6\pi 10^8 t$A و $d = 10$cm .
دع $\mu = \mu_0$ و $\epsilon = \epsilon_0$. حدد $H_{\phi s}$ فى صورة قطبية فى المستوى $z = 0$ عند r تساوى : (أ) 1cm ، (ب) , 10cm (جـ) 1m .

١٨ ـ دع $I_0 d\eta/(4\pi\lambda^2) = 2$ V/m لعنصر تيار تفاضلى فى فضاء حر . أوجد النسبة : $E_{\theta s}/H_{\phi s}$ عند r/λ تساوى (أ) 0.2 ، (ب) 1 ، (جـ) 5 .

١٩ ـ اذا أعطيت عنصر تيار موجه فى اتجاه z عند نقطة الأصل فى الهواء مع $I_0\, d = 1$A.m : (أ) بين أن القدرة المتوسطة الكلية المشعة بالعنصر هى : $40\pi^2/\lambda^2$W ، (ب) اوجد الزاوية θ_1 بحيث يشع نصف القدرة المتوسطة الكلية فى المنطقة $1/2\pi - \theta_1 < \theta < 1/2\,\pi + \theta_1\,,\ 0 < \phi < 2\pi$.

٢٠ ـ هوائى عند نقطة الأصل فى فضاء حر ينتج المجال البعيد
$E_{\theta s} = (100/r)\sin^2\theta\, e^{-j2\pi r/\lambda}$ V/m أوجد P_{av} .

٢١ ـ هوائى أحادى القطب ربع موجى فى هواء يعطى شدة مجال كهربى مقدارها 100mV/m عند نقطة $1mi$ من قاعدة الهوائى عند سطح المستوى التام التوصيل (أ) ما مقدار التيار الذى يجب أن يغذى به أحادى القطب ؟ . (ب) ما مقدار القدرة المتوسطة الى يجب أن تمد للهوائى ؟

٢٢ ـ هوائى ثنائى قطب نصف ـ موجى فى هواء يعطى شدة مجال كهربى مقدارها 100mV/m عند نقطة $1mi$ من مركز الهوائى ومتساوية البعد من النهايتين . (أ) ما مقدار التيار الذى يجب أن يغذى به الهوائى ؟ (ب) ما مقدار القدرة المتوسطة التى يجب أن تمد لثنائى القطب ؟

٢٣ ـ عناصر تيار تفاضلية موضوعة على المحور z عند $z = \pm\, \lambda/2$ وتحمل تيارات متساوية مقدارها $I_0\cos\omega t$ فى اتجاه $\mathbf{a}_z$. احسب المسافة بدقة من كل عنصر الى النقطة $P(r = 5\lambda, \theta, \phi = 0)$ ، حيث θ تساوى : (أ) $0°$ (ب) $30°$ ، (جـ) $60°$ ، (د) $90°$ (هـ) جهز رسما قطبيا للاتساع النسبى لـ A_{zs} ضد θ لنقط عندها $\phi = 0,\ \ r = 5\lambda$.

الملحق (أ)

تحليل المتجهات

أ-١ : إحداثيات الخطوط المنحنية العامة

دعنا نعتبرنظاما احداثيا متعامداً عاما الذى توقع فيه نقطة بتقاطع ثلاثة أسطح متعامدة مع بعضها (ذات هيئة أو شكل غير محدد) ،

u = ثابت

v = ثابت

w = ثابت

حيث v, u و w هى متغيرات فى النظام الاحداثى . اذا أزيد كل متغير بقدر تفاضلى ورسمت ثلاثة أسطح اضافية متعامدة مع بعضها مقابلة لهذه القيم الجديدة ، يتكون حجم تفاضلى هو متوازى سطوح قائم تقريبا . حيث أن w, v , u لايشترط أن تكون مقاييس لطول ، كما ، على سبيل المثال ، المتغيرات الزاوية لنظامى الاحداثيات الاسطوانية والكروية ، فكل يجب أن يضرب بدالة عامة فى u , v و w لكى نحصل على الجوانب التفاضلية لمتوازى السطوح .

على ذلك نعرف عوامل المقياس h_1 , h_2 و h_3 كل بأنه دالة للمتغيرات الثلاثة u , v و w ونكتب أطوال الجوانب للحجم التفاضلى بالصورة

$$dL_1 = h_1 \, du$$

$$dL_2 = h_2 \, dv$$

$$dL_3 = h_3 \, dw$$

	كرتيزى	:	$u = x$	$v = y$	$w = z$
			$h_1 = 1$	$h_2 = 1$	$h_3 = 1$
(١)	اسطوانى	:	$u = \rho$	$v = \phi$	$w = z$
			$h_1 = 1$	$h_2 = \rho$	$h_3 = 1$
	كروى	:	$u = r$	$v = \theta$	$w = \phi$
			$h_1 = 1$	$h_2 = r$	$h_3 = r \sin \theta$

اختيار u , v و w آنفا قد عمل بحيث $\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v = \mathbf{a}_w$ فى جميع الحالات . يجب توقع تعبيرات أكثر تعقيدا لـ h_1 , h_2 و h_3 فى نظم إحداثيات أخرى أقل شيوعا [1]

ا , ٢ : الانفراج ، التدرج والالتواء فى احداثيات الخطوط المنحنية العامة

اذا طبقت الطريقة المستخدمة فى استنباط الانفراج فى قسمى ٣ ـ ٤ و ٣ ـ ٥ على نظام احداثيات الخطوط المنحنية العامة ، يكون تدفق المتجه D المار خلال سطح متوازى السطوح الذى وحدة العمود عليه هى $\mathbf{a}_u$

$$D_{u0}\, dL_2\, dL_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(D_u\, dL_2\, dL_3)\, du$$

أو

$$D_{u0}\, h_2 h_3\, dv\, dw + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2 h_3\, dv\, dw)\, du$$

ويكون للوجه المضاد

$$-D_{u0}\, h_2 h_3\, dv\, dw + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2 h_3\, dv\, dw)\, du$$

معطيا مجموعا كليا لهذين الوجهين مقداره

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2 h_3\, dv\, dw)\, du$$

حيث أن u , v و w هى متغيرات مستقلة ، يمكن كتابة هذا التعبير الاخير بالصورة

$$\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 D_u)\, du\, dv\, dw$$

ويحصل على التعبيرين المقابلين الأخرين بتبديل بسيط للرموز السفلية ولـ u , v و w . على ذلك يكون التدفق الكلى التارك للحجم التفاضلى هو

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3 h_1 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1 h_2 D_w)\right] du\, dv\, dw$$

---

(١) المتغيرات وعوامل المقياس معطاة لتسعة نظم احداثيات متعامدة على pp, 55 — 59 فى a, . أيضا كل نظام موصوف بايجاز .

ويوجد الانفراج D بالقسمة على الحجم التفاضلى

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3 h_1 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1 h_2 D_w)\right] \quad (٢)$$

مركبات التدرج لمقياسى V يمكن الحصول عليها (باتباع طرق قسم ٤ ـ ٦) بالتعبير عن التفاضل الكلى لـV ،

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u}du + \frac{\partial V}{\partial v}dv + \frac{\partial V}{\partial w}dw$$

بدلالة الأطوال التفاضلية المركبة ، $h_3dw,\ h_2dv\ ,\ h_1du$

$$dV = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u}h_1\ du + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}h_2\ dv + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}h_3\ dw$$

حينئذ ، حيث أن

$$d\mathbf{L} = h_1\ du\ \mathbf{a}_u + h_2\ dv\ \mathbf{a}_v + h_3\ dw\ \mathbf{a}_w \qquad \text{and} \qquad dV = \nabla V \cdot d\mathbf{L}$$

نرى أن

$$\nabla V = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u}\mathbf{a}_u + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}\mathbf{a}_v + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}\mathbf{a}_w \quad (٣)$$

مركبات الالتواء لمتجه H يحصل عليها باعتبار مسار تفاضلى أولا فى سطح u = ثابت ، وايجاد دوران H حول ذلك المسار ، كما نوقش بالنسبة للاحداثيات الكرتيزية فى قسم ٨ ـ ٣ . المساهمة على طول الجزء فى الاتجاه $\mathbf{a}_u$ هى

$$H_{v0}h_2\ dv - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}(H_v h_2\ dv)\ dw$$

وتلك من الجزء المضاد التوجيه هى

$$-H_{v0}h_2\ dv - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}(H_v h_2\ dv)\ dw$$

ومجموع هذين الجزئين هو

$$-\frac{\partial}{\partial w}(H_v h_2\ dv)\ dw$$

أو

$$-\frac{\partial}{\partial w}(h_2 H_v)\, dv\, dw$$

ومجموع المساهمات من الجانبين الأخرين من المسار هو

$$\frac{\partial}{\partial v}(h_3 H_w)\, dv\, dw$$

المركبة فى الاتجاه $\mathbf{a}_u$ لالتواء $\mathbf{H}$ هى لذلك

$$(\nabla \times \mathbf{H})_u = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_3 H_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2 H_v)\right]$$

والمركبتان الاخريتان يمكن الحصول عليهما بتبديل دورى . النتجية يمكن التعبير عنها كمحددة .

$$(\text{٤}) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{a}_u}{h_2 h_3} & \dfrac{\mathbf{a}_v}{h_3 h_1} & \dfrac{\mathbf{a}_w}{h_1 h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_1 H_u & h_2 H_v & h_3 H_w \end{vmatrix}$$

اللابلاسى لمقياسى يوجد باستخدام (٢) و (٣) :

$$(\text{٥}) \quad \nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right]$$

المعادلات (٢) الى (٥) يمكن أن تستخدم لايجاد الانفراج ، التدرج ، الالتواء واللابلاسى فى أى نظام أحداثيات متعامدة فيه h_1 , h_2 و h_3 معروفة .

أ ـ ٣ : متطابقات متجهة :

المتطابقات المتجهة المدرجة فيما بعد يمكن اثباتها بالفك فى احداثيات كرتيزية (أو خطوط منحنية عامة) . المتطابقتان الأوليتان تشتملان على حاصل الضرب الثلاثى المقياسى والاتجاهى ، الثلاث التالية تختص بالعمليات على حواصل جمع ، الثلاث التالية تطبق على عمليات عندما يضرب المتغير المطلق بدالة مقياسية ، الثلاث التالية تطبق على عمليات حواصل ضرب مقياسية أو متجهة ، والأربع الأخيرة تختص بعمليات من الرتبة الثانية .

(٦) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \equiv (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \equiv (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$

(٧) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

(٨) $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$

(٩) $\nabla(V + W) \equiv \nabla V + \nabla W$

(١٠) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

(١١) $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \cdot \nabla V + V\, \nabla \cdot \mathbf{A}$

(١٢) $\nabla(VW) \equiv V\, \nabla W + W\, \nabla V$

(١٣) $\nabla \times (V\mathbf{A}) \equiv \nabla V \times \mathbf{A} + V\, \nabla \times \mathbf{A}$

(١٤) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

(١٥) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$

(١٦) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}\, \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\, \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

(١٧) $\nabla \cdot \nabla V \equiv \nabla^2 V$

(١٨) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$

(١٩) $\nabla \times \nabla V \equiv 0$

(٢٠) $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

الملحق (ب)

الوحدات

سنصف أولا الوحدات الدولية
(مختصرة Systeme International d'unités , SI) ، المستخدمة فى هذا الكتاب والتى هى قياسية الان فى الهندسة الكهربية ، وكثير من الفيزياء . وقد أتخذت رسميا كنظام دولى للوحدات بكثير من الدولة بما فيها الولايات المتحدة [١].

وحدة الطول الاساسية هى المتر ، ومعرف على أنه *1,650,763.73* مرة من طول موجة الاشعاع فى فراغ المتوافقة ع الانتقال غير المضطرب بين المستوين $2p_{10}$ و $5d_5$ للكربتون *86* الخط البرتقالى - الأحمر . الثانية هى الوحدة الأساسية للزمن ، والثانية الدولية معرفة بأنها *9,192,631,770* من مدد دورات تردد الانتقال بين المستويين الفائقى الدقة $m_F=O,F=4$ و $m_F=O,F=3$ لحالة الهمود $^2S½$ لذرة سيزيوم ١٣٣ ، غير مضطربة بمجالات خارجية . الكتلة العيارية ذات الكيلوجرام الواحد معرفة بأنها كتلة معيار دولى على هيئة اسطوانة بلاتين - ايريديوم فى المكتب الدولى للأوزآن والمقاييس فى سيفر ، بفرنسا .

وحدة درجة الحرارة هى الكلفن ، معرف بوضع درجة حرارة النقطة الثلاثية للماء عند *273.16* kelvins وحدة خامسة هى الكانديلا ، معرفة بشدة الاضاءة لمشع لجميع الاتجاهات عند درجة حرارة تجمد البلاتين (*2042* K) له مساحة 1/600,000 متر مربع وتحت ضغط *101,325* نيوتن لكل متر مربع .

---

(١) النظام الدولى للوحدات أقره المؤتمر العام الحادى عشر عن الموازين والمقاييس فى باريس فى *1960* وتبن رسميا للاستخدام العلمى بالمكتب القومى للمعايير فى *1964* وهو نظام مترى ويكفى أن يكون هاما أنه النظام الوحيد الذى لقى تصديقا خاصا من الكنجرس . حدث هذا أولا فى *1866* ثم مرة أخرى فى *1975* مع قانون التحويل المترى ، الذى ينهض بأعباء «التحويل الاختيارى» للنظام المترى . مع ذلك ، لم يحدد وقت معين ، ونستطيع فرض أنه لايزال هناك عدة سنين قبل أن تدرج عدادات المسافات بالكيلومترات ، ويقرأ مقياس الحمام الكتلة بالكيلوجرامات .

آخر الوحدات الأساسية هو الأمبير . قبل تعريف الأمبير بوضوح ، يجب أولا أن نعرف النيوتن . وهو معرف بدلالة الوحدات الأساسية الأخرى من قانون نيوتن الثالث بأنه القوة المطلوبة لتنتج عجلة مقدارها متر واحد لكل ثانية على كتلة كيلوجرام واحد . يمكننا الآن تعريف الأمبير بأنه التيار الثابت الموجود فى موصلين مستقيمين متوازيين ذوى طول لانهائى ومقطع عرضى مهمل ، يفصلهما متر واحد فى فراغ ، الذى ينتج قوة تنافر مقدارها 2×10^{-7} نيوتن لكل متر طول بين الموصلين . القوة بين الموصلين المتوازيين معروف أنها

$$F = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi d}$$

وعلى ذلك

$$2 \times 10^{-7} = \mu_0 \frac{1}{2\pi}$$

أو

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \qquad (\text{kg} \cdot \text{m/A}^2 \cdot \text{s}^2, \text{ or H/m})$$

على ذلك نجد أن تعريفنا للأمبير قد صيغ بطريقة بحيث نخصص قيمة عددية مضبوطة بسيطة لانفاذية الفضاء الحر .

مع أن المتر ، الثانية ، الكيلوجرام ، الكلفن والكندلا قد عرفت بمقارنة مباشرة بمعيار دولى أوبقياس مباشر ، نرى أن الأمبير معرف بطريقة غير مباشرة . علاوة على ذلك ، واضح أن الخطوة الخامسة فى تتابع التعريف كان تخصيص قيمة مقدارها $4\pi10^{-7}$ لـμ_0 ، مع أننا لانقول هكذا . هذا التعريف غير المباشر للأمبير يمكن أن يوضح من اعتبار تتابع من لتعريفات نعرف فيها أولا الكتلة العيارية كما سبق ، نختار الزمن كالبعد الأساسى التالى ، ثم نعرف وحدة الزمن الأساسية بأنها «الجيفى» (Jiffy) الزمن المطلوب لانتقال متر واحد بسرعة الضوء فى فضاء حر . سرعة الضوء سيكون لها حينئذ القيمة البسيطة ، متر واحد لكل جيفى ، لكن قيمة الجيفى العيارى سوف تعتمد على قياس مناظر لقياسنا لسرعة الضوء فى النظام الدولى . العلماء سيجهزون تجارب معقدة ، ليس لتعيين سرعة الضوء (متر واحد لكل جيفى ، كما يعرف كل تلميذ مدرسة) ، ولكن لتحرى عدد فترات انتقال السيزيوم فى جيفى واحد [1] .

---

(١) معطى (بالضبط) فى مجلات Jiffly land العلمية بأنها *(3066.331905+0.000011)* فترة انتقال/ جيفى .

بالرجوع للنظام الدولى ، الوحدات التى تقاس بها الكميات الكهربية والمغناطيسية الأخرى معطاه فى نص المرجع فى الوقت الذى تعرف فيه كل كمية ، وجميعها يمكن ربطها بالوحدات الأساسية المعرفة سابقا . مثلا ، تعاملنا مع الموجة المستوية فى الفصل الحادى عشر يبين أن السرعة التى تنتشر بها موجة كهرومغناطيسية فى فضاء حرهى

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

وعلى ذلك

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi 10^{-7} c^2}$$

واضح أن القيمة العددية لـ ϵ_0 تعتمد على القيمة المقاسة لسرعة الضوء فى الفراغ ، (a)

الوحدات معطاة أيضا فى جدول ب ـ ١ للرجوع اليها بسهولة وهى مدرجة بنفس الترتيب المعرفة به فى المرجع .

أخيرا ، قد استخدمت نظم أحداثيات أخرى فى الكهربية والمغناطيسية . فى نظام الاحداثيات الكهروستاتيكى (esu) يكتب قانون كولوم لفضاء حر ،

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \qquad \text{(esu)}$$

سماحية الفضاء الحر مخصص لها قيمة الوحدة . الجرام والسنتيمتر هما الوحدتان الأساسيتان للكتلة والمسافة ، ونظام الـesu هو لذلك نظام cgs الوحدات الحاملة للبادئة stat— تنتمى لنظام الوحدات الكهروستاتيكى .

بكيفية مماثلة ، نظام الوحدات الكهرومغناطيسى (emu) مؤسس على قانون كولوم لثنائيات قطب مغناطيسية ، وانفاذية الفضاء الحر هى الوحدة . البادئة ـ ab تميز وحدات emu . عندما يعبر عن كميات كهربية فى وحدات esu . كميات مغناطيسية فى وحدات emu ، وكلاهما يظهر فى نفس المعادلة (مثل معادلات الالتواء لما كسويل) ، تظهر سرعة الضوء صريحة . يتبع هذا من ملاحظة أن فى $\epsilon_0 = 1$ esu , لكن $\mu_0\epsilon_0 = 1/C^2$ ولذلك $\mu_0 = 1/C^2$ وفى $\mu_0 = 1$ emu ولهذا $\epsilon_0 = 1/C^2$ على ذلك ، فى هذا النظام المتمازج المعروف بالنظام الجاوسى .

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(gaussian)}$$

هو نظام cgs غير مرشد (عندما يرشد يعرف بنظام هفيسيد ـ لورنز) والنظام الدولى الذى قد استخدمناه فى جميع أقسام هذا الكتاب هو نظام *mks* مرشد .

الرمز	الاسم	الوحدة	الاختصار
v	سرعة	متر/ثانية	m/s
F	قوة	نيوتن	N
Q	شحنة	كولوم	C
r,R	مسافة	متر	m
ϵ_0	سماحية	فاراد/متر	F/m
E	شدة مجال كهربى	فولت/متر	V/m
ρ,ρ_v	كثافة شحنة حجمية	كولوم/متر٣	C/m^3
v	حجم	متر٣	m^3
ρ_L	كثافة شحنة خطية	كولوم/متر	C/m
ρ_s	كثافة شحنة سطحية	كولوم/متر٢	C/m^2
ψ	تدفق كهربى	كولوم	C
D	كثافة تدفق كهربى	كولوم/متر٢	C/m^2
S	مساحة	متر٢	m^2
W	شغل ، طاقة	جول	J
L	طول	متر	m
V	جهد	فولت	V
p	عزم ثنائى قطب	كولوم ـ متر	C.m
I	تيار	أمبير	A
J	كثافة تيار	أمبير/متر٢	A/m^2
μ_e,μ_n	حركية	متر٢/فولت ـ ثانية	$m^2/V.S$
σ	موصلية	مهو/متر	℧ /m
R	مقاومة	أوم	Ω
P	استقطاب	كولوم/متر٢	C/m^2
$\chi_{e,m}$	قابلية التأثر		

الرمز	الاسم	الوحدة	الاختصار
C	سعة	فاراد	F
H	شدة مجال مغناطيسى	أمبير/متر	A/m
K	كثافة تيار سطحى	أمبير/متر	A/m
B	كثافة تدفق مغناطيسى	وبر/متر٢	Wb/m^2
		(أوتسلا)	(أو T)
μ_0	إنفاذية	هنرى/متر	H/m
Φ	تفق مغناطيسى	وبر	Wb
Vm	جهد مغناطيسى مقياسى	أمبير	A
A	جهد مغناطيسى متجه	وبر/متر	Wb/m
T	عزم تدوير	نيوتن ـ متر	N.m
m	عزم مغناطيسى	أمبير ـ متر٢	$A.m^2$
M	تمغنط	أمبير/متر	A/m
$\mathfrak{R}$	ممانعة	أمبير ـ لفة/وبر	A.t/Wb
L	محاثة	هنرى	H
M	محادثة متبادلة	هنرى	H
ω	تردد زاوى	زاوية نصف قطرية/ثانية	rad/s
c	سرعة الضئ	متر/ثانية	m/s
λ	طول موجة	متر	m
n	معاوقة ذاتية	أوم	Ω

جدول ب ـ ١ : أسماء ووحدات الكميات الكهربية والمغناطيسية فى النظام الدولى
(بالترتيب التى تظهر به فى المرجع)

الرمز	الاسم	الوحدة	الاختصار
γ	ثابت الانتشار	مركب نيبر/متر	m^{-1}
α	ثابت توهين	نيبر/متر	N_p/m
B	ثابت طور	زاوية نصف قطرية/متر	rad/m
f	تردد	هرتز	Hz
$\mathcal{P}$	متجه بوينتنج	وات/متر٢	W/m^2
P	قدرة	وات	W
δ	عمق سطحى	متر	m
Γ	معامل انعكاس		
s	نسبة الموجة الواقفة		
G	مواصلة	مهو	℧
Z	معاوقة	أوم	Ω
Y	مسامحة	مهو	℧
Q	عامل الجودة		

جدول ب ـ ٢ : أسماء ووحدات الكميات الكهربية والمغناطيسية فى النظام الدولى (بالترتيب التى تظهر به فى المرجع)

الكمية	وحدة mks	وحدات جاوسية	وحدات أخرى
d	1 m	10^2 Cm	39.37 In
F	1 N	10^5 Dyne	0.2248 Lb_f
W	1 J	10^7 Erg	0.7376 Ft-lb_f
Q	1 C	$10c$ StatC	0.1 AbC
ρ	1 C/m^3	$10^{-5}c$ StatC/cm^3	10^{-7} AbC/cm^3
D	1 C/m^2	$4\pi 10^{-3}c$ (esu)	$4\pi 10^{-5}$ (emu)
E	1 V/m	$10^4/c$ StatV/cm	10^6 AbV/cm
V	1 V	$10^6/c$ StatV	10^8 AbV
I	1 A	0.1 AbA	$10c$ StatA
H	1 A/m	$4\pi 10^{-3}$ Oersted	$0.4\pi c$ (esu)
V_m	1 A · t	0.4π Gilbert	$40\pi c$ (esu)
B	1 Wb/m^2	10^4 Gauss	$100/c$ (esu)
Φ	1 Wb	10^8 Maxwell	$10^6/c$ (esu)
A	1 Wb/m	10^6 Maxwell/cm	
R	1 Ω	10^9 AbΩ	$10^5/c^2$ StatΩ
L	1 H	10^9 AbH	$10^5/c^2$ StatH
C	1 F	$10^{-5}c^2$ StatF	10^{-9} AbF
σ	1 ℧/m	10^{-11} Ab℧/cm	$10^{-7}c^2$ Stat℧/cm
μ	1 H/m	$10^7/4\pi$ (emu)	$10^3/4\pi c^2$ (esu)
ϵ	1 F/m	$4\pi 10^{-7}c^2$ (esu)	$4\pi 10^{-11}$ (emu)

جدول ب ـ ٢ : تحويل وحدات دولية إلى جاوسية وأخرى (استخدم $(c=2.997924574\Sigma 10^8$

١ ـ الكمية ٢ ـ وحدة *mks* ٣ ـ وحدات جاوسية
٤ ـ وحدات أخرى

جدول ب ـ ٢ يعطى عوامل التحويل بين وحدات النظام الدولى الأكثر أهمية (أو نظام mks المرشد) والنظام الجاوسى ، وعدة وحدات أخرى منوعة .

جدول ب ـ ٣ يبوب البادئاب المستخدمة مع أى من الوحدات SI ، اختصاراتها ، وقوة العشرة التى تمثلها كل . وتلك البادئات المعلمة مستخدمة بكثرة .
كلا البادئات واختصاراتها مكتوب بدون واصلات ، لذلك
10^{-6} F=*1*microfarad=*1*μF=*1,000*nanofarads=*1,000*nF ، الخ .

جدول ب ـ ٣ : بادئات قياسية مستخدمة مع وحدت SI .

البادئة	الاختصار	المعنى	البادئة	الاختصار	المعنى
atto—	a—	10^{-8}	deka—	da—	10^{1}
femto	f—	10^{-15}	hecto—	h—	10^{2}
pico—	p—	10^{-12}	kilo—	k—	10^{3}
nano—	n—	10^{-9}	mega—	M—	10^{6}
micro—	μ—	10^{-6}	giga—	G—	10^{9}
milli—	m—	10^{-3}	tera—	T—	10^{12}
centi—	c—	10^{-2}	peta—	P—	10^{15}
ceenti—	d—	10^{-1}	exa—	E—	10^{18}
deci—					

الملحق (جـ)

ثوابت المواد

جدول جـ - ١ يبوب قيما نموذجية للسماحية النسبية ϵ_R أوثابت العازل لمواد عازلة شائعة ، إلى جانب قيم ممثلة لظل الفقد . القيم يجب أن تعتبر فقط ممثلة لكل مادة ، وهى تنطبق على ظروف معدل درجة الحرارة والرطوبة ، ولترددات سمعية منخفضة جدا . معظمها قد أخذ من "Reference Data for Radi Engineers" (١) "The Standard Handbook for Electrical Engineers (٢) Von Hippel, (٣) وهذه الكتب يمكن الرجوع اليها لمزيد من المعلومات عن هذه المواد وغيرها .

جدول جـ ٢ يعطى الموصلية لعدد من الموصلات المعدنية ، لقليل من المواد العازلة ، ولعديد من مواد أخرى ذات أهمية عامة . قد أخذت القيم من المراجع المدرجة سابقا ، وتنطبق عند التردد صفر ، وعند درجة حرارة الغرفة . التبويب بترتيب تناقص الموصلية .

بعض قيم ممثلة للانفاذية النسبية لمواد مختلفة دايامغناطيسية ، بارامغناطيسية ، فرى مغناطيسية ، وفرومغناطيسية المدرجة فى جدول جـ - ٣ .

(١) أنظر المراجع المقترحة للفصل الحادى عشر .
(٢) أنظر المراجع المقترحة للفصل الخامس .
(٣) أنظر المراجع المقترحة للفصل الحادى عشر .

جدول جـ-١ : ϵ_R و $\sigma/w\epsilon$

المادة	ϵ_R	$\sigma/w\epsilon$
هواء	1.0006	
كحول ، ايثيل	25	0.1
أكسيد الومنيوم	8.8	0.0006
كهرمان	2.7	0.002
باكيليت	4.74	0.022
تيتانات الباريوم	1,200	0.013
ثانى أكسيد كربون	1,001	
جرمانيوم	16	
زجاج	4.7	0.001
جليد	4.2	0.1
ميكا	5.4	0.0006
نيوبرين	6.6	0.011
نايلون	3.5	0.02
ورق	3	0.008
بلكسيجلاس	3.45	0.04
بوليثيلين	2.26	0.0002
بوليبروبلين	2.25	0.0003
بوليستيرين	2.55	0.00005
بورسيلين (صناعة جافة)	6	0.014
بيرانول	4.4	0.0005
زجاج بيركس	4	0.0006
كوارتز (منصهر)	3.8	0.00075
مطاط	2.5-3	0.002
سيليكا أو SiO_2 (منصهر)	3.8	0.00075
سيليكون	11.8	
ثلج	3.3	0.5

تابع جدول جـ ـ ١ :

المادة	ϵ_R	$\sigma/w\epsilon$
كلوريد صوديوم	5.9	0.0001
تربة (جافة)	2.8	0.07
ستيتيت	5.8	0.003
ستيروفوم	1.03	0.0001
تفلون	2.1	0.0003
ثانى أكسيد تيتانيوم	100	0.0015
ماء (مقطر)	80	0.04
ماء (بحر)		4
ماء مهدرج	1	0
خشب (جاف)	1.5—4	0.01

جدول جـ ـ ٢ : σ

المادة	σ, ℧/m	المادة	σT ℧/m
فضة	6.17×10^7	جرافيت	7×10^4
نحاس	5.80×10^7	سيليكون	1,200
ذهب	4.10×107	فيريت (نموذجى)	100
الومنيوم	3.82×10^7	ماء (بحر)	5
تنجستن	1.82×10^7	حجر جيرى	10^{-2}
زنك	1.67×10^7	طفل	5×10^{-3}
نحاس أصفر	1.5×10^7	ماء (عذب)	10^{-3}
نيكل	1.45×10^7	ماء (مقطر)	10^{-4}
حديد	1.03×10^7	تربة (رملية)	10^{-5}
برونز فوسفورى	1×10^7	جرانيت	10^{-6}
سبيكة لحام	0.7×10^7	رخام	10^{-8}
صلب كربونى	0.6×10^7	باكيليت	10^{-9}
فضة المانية	0.3×10^7	بورسيلين (صناعة	
منجنين	0.227×10^7	جافة)	10^{-10}
كونستانتان	0.226×10^7	ماس	2×10^{-13}
جرمانيوم	0.22×10^7	بوليستيرين	10^{-16}
صلب غير قابل للصدأ	0.11×10^7	كوارتز	10^{-17}
نيكروم	0.1×10^7		

جدول جـ ـ ٣ : μ_R

المادة	μ_R
بزموت	0.999 9986
بارافين	0.999 99942
خشب	0.999 9995
فضة	0.999 99981
الومنيوم	1.000 00065
بريليوم	1.000 00079
كلوريد نيكل	1.0004
سلفات المنجنيز	1.0001
نيكل	50
حديد زهر	60
كوبلت	60
حديد مسحوق	100
صلب آلة	300
فريت (نموذجى)	1,000
برمالوى ٤٥	2,500
حديد محول	3,000
حديد سيليكونى	3,500
حديد (نقى)	4,000
ميومتال	20,000
سيندست	30,000
سوبر برمالوى	100,000

وقد استخرجت من المراجع المدرجة آنفا ، والبيانات للمواد الفرومغناطيسية صحيحة فقط لكثافات ت دفق مغناطيسية منخفضة جدا . الانفاذيات العظمى يمكن أن تكون أعلى برتبة أعظم .

معطى فى جدول جـ ـ ٤ قيم للشحنة والكتلة الساكنة لالكترون ، سماحية وانفاذية الفضاء الحر ، وسرعة الضوء (١)

جدول جـ ٤ : ثوابت فيزيائية

الكمية	القيمة
شحنة الالكترون	$e= (1.6021892 \pm 0.0000046) \times 10^{-19}\mathrm{C}$
كتلة الالكترون	$m = (9.109534 \pm 0.000047) \times 10^{-31}\mathrm{kg}$
سماحية الفضاء الحر	$\epsilon_0 = (8.854187818 \pm 0.000000071) \times 10^{-12}\mathrm{F/m}$
انفاذية الفضاء الحر	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$
سرعة الضوء	$C = (2.997924574 \pm 0.000000011) \times 10^{8}\mathrm{m/s}$

(١) Cohen, E. R., and B. N. Taylor: The 1973 Least-Squares Adjustment of the Physical Constants, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, vol. 2, no. 3, p. 663, 1973.

الملحق (د)[1]

إجابات المسائل الفردية الرقم

الفصل الأول

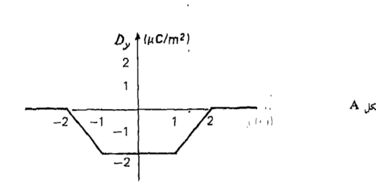
1(*a*) $0.1741\mathbf{a}_x + 0.696\mathbf{a}_y - 0.696\mathbf{a}_z$; (*b*) 11.49; (*c*) $2\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$.
3(*a*) 6.16; (*b*) $0.596\mathbf{a}_x + 0.745\mathbf{a}_y - 0.298\mathbf{a}_z$; (*c*) $5.23\mathbf{a}_x + 6.54\mathbf{a}_y - 2.62\mathbf{a}_z$.
5(*a*) 1.169; (*b*) $-0.535\mathbf{a}_x + 0.802\mathbf{a}_y + 0.267\mathbf{a}_z$; (*c*) كراتeres:
$x^2 + y^2 + z^2 = 0.1922$ and 20.8. **7**(*a*) $0.1826\mathbf{a}_x + 0.913\mathbf{a}_y + 0.365\mathbf{a}_z$;
(*b*) على الخط $y = 2x/11,\ z = 12x/11$. **9**(*a*) 37.4;
(*b*) $0.0601\mathbf{a}_x - 0.961\mathbf{a}_y + 0.270\mathbf{a}_z$; (*c*) 19.67; (*d*) 41.6°.
11(*a*) 83.7°; (*b*) 8; (*c*) 26.0. **13**(*a*) $2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$; (*b*) 0;
(*c*) $-28\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z$; (*d*) 169.3°. **15**(*a*) 6.36; (*b*) $\pm(0.864\mathbf{a}_x + 0.314\mathbf{a}_y + 0.393\mathbf{a}_z)$. **17**(*a*) 37.4; (*b*) 5.39; (*c*) 57.7°.
19(*a*) $25\mathbf{a}_\rho$; (*b*) $12\mathbf{a}_\phi - 20\mathbf{a}_z$; (*c*) $25\mathbf{a}_\rho - 20\mathbf{a}_z$; (*d*) $\pm(0.857\mathbf{a}_\phi + 0.514\mathbf{a}_z)$.
21(*a*) $0.734\mathbf{a}_x + 0.267\mathbf{a}_y - 0.625\mathbf{a}_z$; (*b*) اسطوانة $\rho = 5.46$.
23(*a*) $P(8.25, 14.04°, 1)$, $Q(7.28, 105.9°, 4)$; (*b*) $-8.49\mathbf{a}_\rho + 7.28\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$;
(*c*) $-7.55\mathbf{a}_\rho - 8.24\mathbf{a}_\phi - 3\mathbf{a}_z$. **25**(*a*) 20; (*b*) 1.728; (*c*) $1.493\mathbf{a}_r - 0.448\mathbf{a}_\theta + 0.746\mathbf{a}_\phi$; (*d*) $34\mathbf{a}_r + 20\mathbf{a}_\theta - 56\mathbf{a}_\phi$; (*e*) $\pm(0.496\mathbf{a}_r + 0.292\mathbf{a}_\theta - 0.818\mathbf{a}_\phi)$.
27(*a*) 11.21; (*b*) 18.05, 104.0, 19.18, 55.2, 62.3, 62.3; (*c*) 386.
29(*a*) $P(8.06, 60.3°, 3)$; (*b*) $P(8.60, 69.6°, 60.3°)$;
(*c*) $-4.34\mathbf{a}_\rho + 5.58\mathbf{a}_\phi - 8\mathbf{a}_z$. **31**(*a*) $-15.59\mathbf{a}_\rho - 9\mathbf{a}_\phi - 12\mathbf{a}_z$;
(*b*) $-3.87\mathbf{a}_r + 0.232\mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\phi$.

---

(١) i,h,g,f,e,d,c,b,a هى اجابات المسائل ا ،ب ،جـ ، د ، هـ،و،ز،ك،ل، على الترتيب .

الفصل الثاني 1(*a*) $0.487\mathbf{a}_x + 4.97\mathbf{a}_y + 0.993\mathbf{a}_z$ mN; (*b*) $0.501\mathbf{a}_x + 5.01\mathbf{a}_y + 1.002\mathbf{a}_z$ mN;
(*c*) نفس الشحنة الكلية ونفس مركز الشحنة **3** 61.9 N.
5(*a*) 10.79 nN; (*b*) $-4.99\mathbf{a}_x + 5.95\mathbf{a}_y + 4.62\mathbf{a}_z$ V/m.
7 $80.8x^2 = (x^2 + y^2)^3$ or $\rho = 2.998\sqrt{\cos\phi}$. **9** Q_2, 0.629 N.
11(*a*) 4.15; (*b*) 4.01; (*c*) 4. **13**(*a*) 4.32 C; (*b*) 0.270 C.
15(*a*) 12 μC/m³; (*b*) 16.88 pC. **17**(*a*) $\rho_0 \pi a^3$; (*b*) $0.0245\rho_0 \pi a^3$;
(*c*) $0.1\rho_0 \pi a^3$. **19**(*a*) $2.01\mathbf{a}_x + 7.33\mathbf{a}_y - 9.38\mathbf{a}_z$ V/m; (*b*) -3.75 nC/m.
21(*a*) $-134.8\mathbf{a}_z$ V/m; (*b*) $48.6\mathbf{a}_x + 97.2\mathbf{a}_y - 36.0\mathbf{a}_z$ V/m.
23 $21.3\mathbf{a}_x - 5.31\mathbf{a}_z$ V/m, 21.9 V/m. **25** $8.01\mathbf{a}_z$ V/m.
27(*a*) $y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$; (*b*) $0.949\mathbf{a}_x + 0.316\mathbf{a}_y$. **29** $z^2 = x^2 + 2\ln x$.
31 $\rho^2 \sin 2\phi = 2\sqrt{3}$.

الفصل الثالث 1(*a*) قطعة العملة الأولى، 4nC؛ قطعة العملة الثانية، 0؛ الجدران والغطاء، —4nC
(*b*) القطعة الأولى، 4nC، القطعة الثانية، —2nC، الجدران والغطاء، —2nC **3** 6.33 C.
5 87.7 μC. **7**(*a*) ± 235 C; (*b*) $\pm 1{,}333$ C; (*c*) ± 402 C.
9(*a*) 4.8 nC/m²; (*b*) $\rho<3,\ D_\rho = 0;\ 3<\rho<4,\ D_\rho=24/\rho;\ 4<\rho<5,\ D_\rho = -24/\rho$
$\rho > 5,\ D_\rho = -14/\rho$ (جميعها بـ nC/m²)، الرسم التخطيطي غير مبين
11(*a*) 4.8 nC/m²; (*b*) $r<3, D_r=0; 3<r<4, D_r=72/r^2; 4<r<5\ D_r=-120/r^2;$
$r>5, D_r=-70/r^2$ (جميعها بـ nC/m²) الرسم التخطيطي غير مبين .
13 (جميعها بـ nC/m²) $D_\rho(0)=0\ D_\rho(1\text{mm})=0.333, D_\rho(3\text{mm})=2.56,\ D_\rho(5\text{mm})=2.93$
15 (جميعها بـ nC/m²) $D_r(0)=0, D_r(1\text{mm})=8.75, D_r(3\text{mm})=19.78, D_r(5\text{mm})=10.08$
17(*a*) $y<-2, D=0; -2<y<-1\quad D_y=-2y-4; -1<y<1, D_y=-2; 1<y<2$
$D_y=2y-4; y>2,\ D=0$ جميعها بـ μC/m²
(*b*) انظر الرسم التخطيطي **19**(*a*) 1.328 μC;



شكل A

(*b*) 8.64 μC; (*c*) $P(3, 3, 3)$, 43.7 μC. **21**(*a*) 1.759; (*b*) 0.816;
(*c*) 0; (*d*) 12. **23**(*a*) 0; (*b*) 1; (*c*) 0.1; (*d*) 3.60.
25(*a*) 0, ماعدا عند $\rho = 0$; (*b*) $\rho_0 = \rho_L/\pi a^2$; $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0,\ \rho < a$,
and $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,\ \rho > a$. **27**(*a*) 24 C/m³; (*b*) $16\mathbf{a}_\rho$ C/m²;
(*c*) 2;011 C; (*d*) 2,011 C. **29**(*a*) 0.2,'0 C/m³; (*b*) -25.1 mC/m.
31 2.5, 2.5. **33** 0.942 C, 0.942 C.

الفصل الرابع 1(*a*) -12 pJ; (*b*) 10 pJ; (*c*) 20 pJ; (*d*) 6.48 pJ.
3(*a*) 158.7; (*b*) 140.3. **5**(*a*) (*b*) -360 J. **7** 575 J.
9(*a*) (*b*) -150 V. **11**(*a*) 6.60 V; (*b*) 41.8 V; (*c*) 11.18 V;
(*d*) 11.18 V. **13**(*a*) 4.38 V; (*b*) -1.164 V; (*c*) 14.46 V.

15(a) 24.47 V; (b) 24.62 V; (c) 24.69 V. **17**(a) لكل ، 6.28 nC
(b) 9.67 V الخط 10.49 V القوس 10.77 V السطح (c) 30.9 V.
19(a) -135.0 V; (b) $61.1\mathbf{a}_x - 72.5\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z$ V/m;
(c) $541\mathbf{a}_x - 642\mathbf{a}_y - 177.1\mathbf{a}_z$ pC/m^2; (d) 88.5 pC/m^3.
21(a) 884 V; (b) $-80\mathbf{a}_x + 152.3\mathbf{a}_y - 183.5\mathbf{a}_z$ V/m; (c) 0; (d) 0.
23 $47.3\mathbf{a}_x + 16.10\mathbf{a}_y + 0.322\mathbf{a}_z$ V/m. **25** 25.2 V, $-4.31\mathbf{a}_r$ V/m.
27 $\theta = 54.7$ and $125.3°$ مخروطان. **29**(a) $3Q^2/(4\pi\epsilon_0 d)$;
(b) $(4+\sqrt{2})Q^2/(4\pi\epsilon_0 d)$. **31**$(a)$ $\rho = 0$ (ماعدا عند $r = 0$);
(b) $5{,}000\pi\epsilon_0(a^{-1} - b^{-1})$. **33**$(a)$ $(5/9)\rho^{2.6}$; (b) $8.80 \times 10^{-12}/\rho$;
(c) $V(0) = 0.276$ V, $V(1\text{ m}) = -6.87$ V.

الفصل الخامس

1(a) 314 A; (b) 42.5 A; (c) 0. **3**(a) $3.52 \times 10^{17}t$ m/s;
(b) $1.759 \times 10^{17}t^2$ m; (c) $8.39 \times 10^{8}\sqrt{z}$; (d) $-1{,}000$ A/m^2,
$-1.192 \times 10^{-6}/\sqrt{z}$ C/m^3. **5**(a) $2.47J_0$; (b) $9.87J_0$.
7(a) 1,756 A; (b) $-1{,}750$ C/m$^3\cdot$s. **9**(a) 550 A; (b) 2.29 $\mu\Omega$.
11(a) 0.407 Ω; (b) 10.22 mW/in^2. **13**(a) 1.255 MA/m^2;
(b) 0.385 MA/m^2; (c) 1.6 MA/m^2. **15**(a) -1.771 nC/m^2; داخل
5.31 nC/m^2 خارجى ؛(b) -8.90 nC; (c) 0. **17** 0; بالداخل
$-2{,}530\mathbf{a}_x + 6{,}310\mathbf{a}_y - 5{,}050\mathbf{a}_z$ V/m. بالخارج
19 $\mathbf{a}_N = \pm(0.447\mathbf{a}_x + 0.894\mathbf{a}_y)$, $\rho_S = \pm 792$ pC/m^2. **21**(a) 17.89 μC/m^2;
(b) $10^{-4}\{[4+(h-1)^2]^{-1.5} + [4+(h+1)^2]^{-1.5}\}$ C/m^2.
23 2.36 ℧/m. **25** 155 kΩ. **27**(a) $\epsilon_R = 4$, $\chi_e = 3$;
(b) $\mathbf{P} = -1.328\mathbf{a}_x + 5.84\mathbf{a}_y - 2.26\mathbf{a}_z$ nC/m^2, $\mathbf{D} = -1.771\mathbf{a}_x + 7.79\mathbf{a}_y - 3.01\mathbf{a}_z$ nC/m^2. **29** 1.000 263. **31**(a) 54.0°;
(b) 54.0°; (c) 70.0°; (d) 70.0°. **33** 4.51 V.
35(a) 70.8 pF; (b) 5 kV/m, 0.221 μC/m^2, 1.417 nC, 14.17 nJ;
(c) 1.417 nC; (d) 0.221 μC/m^2, 25 kV/m, 70.8 nJ; (e) 100 V.
37 تيتانات الباريوم **39**(a) 93.2 pF/m; (b) $2 < \rho < 4$ mm,
$E_\rho = 33.5/\rho$; $4 < \rho < 10$ mm, $E_\rho = 83.8/\rho$; $E = 0$, فى اى مكان آخر
الرسم غير مبين **41**(a) and (b) $d_1 = 1/6$ cm, $d_2 = 1/3$ cm, $d_3 = 1/2$ cm;
(c) 1,562 pF/m^2. **43**(a) 100 V, 80 kV/m, 0.708 μC/m^2, 0.708 μC/m^2,
1.417 μC, 70.8 μJ, 14.17 nF; (b) 36 V, 0.708 μC/m^2, 1.417 μC,
25.5 μJ, 39.4 nF, 16 kV/m, 0.708 μC/m^2. **45**(a) 28.6 pF/m;
(b) 57.2 nC/m; (c) $-195.8\mathbf{a}_x$ kV/m. **47** 1.525 m.

الفصل السادس

1 50.6 pF/m. **3** 69.5 pF/m. **5** 34 pF/m. **7** 7.4 pF/ft.
9(a) 42, 56, 60, 10, 20, 32, -20, -18, -2 V;
(b) 41.4, 55.2, 59.3, 10.5, 20.0, 32.0, -19.3, -17.7, -1.4 V.
11 90 V. **13**(a) 85 V; (b) 85.4 V; (c) 80 V; (d) $V_{\text{exact}} = 79.707$ V.
15(a) 32 kV/m; (b) 18.89 pF/m; (c) 18.89 pF/m.
17 1,129 Ω. **19** 1.02 Ω.

الفصل السابع

1(a) $(x^2+y^2)^{-1.5}$; (b) 0; (c) ρ^{-3}; (d) 0.
3(a) $-5/3$; (b) $0.645\mathbf{a}_x + 0.484\mathbf{a}_y - 0.591\mathbf{a}_z$.
5(a) 0, no; (b) 0, yes. **7**(a) 0.5; (b) -443 pC/m^3.
9(a) جميعها موافق للحالة
(b) شروط الحد ليست معطاة لسطح مغلق ، ولاتطبق نظرية الوحدانية
11 45.4 V, 132.8 pF. **13**(a) $A = 466$, $B = 3469$; (b) -12, -66.3;
(c) -40, -211. **15**(a) 574 V; (b) $-2500\mathbf{a}_\phi$ V/m;
(c) 27.7 μJ/m^3; (d) $4.43(\phi_2 - \phi_1)(z_2 - z_1)\ln(\rho_2/\rho_1)$ μJ.

17(*a*) لا ; (*b*) $200 + 3585 \ln [(r + 1)/1.2r]$; (*c*) 499 pF.
19(*a*) 3.38 V; (*b*) 22.8 V. **21**(*a*) $V = \pi a^2 \rho_0[1 - (2/\pi) \tan^{-1} (r/a)]/4c$;
(*b*) نفس الاجابة **23**(*a*) برهان ; (*b*) $\Theta'' + \cot \theta \, \Theta' + \alpha^2 \Theta = 0$.
25 $a_2 = 1/2, a_3 = 1/3, a_4 = -1/8, a_5 = -1/12, a_6 = 7/240$.

1 $-0.318\mathbf{a}_y + 0.637\mathbf{a}_z$ mA/m, 0.712 mA/m. **3**(*a*) $0.435\mathbf{a}_y$ A/m;
(*b*) $0.0159\mathbf{a}_y$ A/m. **5** $-4.90\mathbf{a}_x - 0.979\mathbf{a}_y + 3.18\mathbf{a}_z$ mA/m.
7(*a*) 42 A; (*b*) $[(4h^2 + 50)/\sqrt{h^2 + 25} - (4h^2 + 8)/\sqrt{h^2 + 4}]\mathbf{a}_z$;
(*c*) 1.158 A/m. **9** $44.1\mathbf{a}_x + 32.0\mathbf{a}_z$ A/m. **11** برهان
13(*a*) برهان ; (*b*) $15\mathbf{a}_y$ A/m; (*c*) $-5\mathbf{a}_y$ A/m.
15(*a*) $0.035\mathbf{a}_z/(c^2 + 0.01)^{1.5}$ A/m; (*b*) $66.0\mathbf{a}_z$ A/m; (*c*) $175\mathbf{a}_z$ A/m;
(*d*) $70\mathbf{a}_z$ A/m. **17**(*a*) $50\mathbf{a}_x$ A/m; (*b*) $30\mathbf{a}_x$ A/m; (*c*) $31\mathbf{a}_x$ A/m;
(*d*) $31.1\mathbf{a}_x$ A/m. **19** $0, 0 < \theta < 45°$; $0.398\mathbf{a}_\phi/\rho$ A/m, $\theta > 45°$.
21 4.043. **23**(*a*) 0, 0; (*b*) −20, 0; (*c*) $5{,}000\rho^{-1} \sin (10^8 t - \frac{1}{2}z)\mathbf{a}_\phi$.
25(*a*) (*b*) 5.4. **27** 6.27 A. **29**(*a*) (*b*) $\pi/2$ A.
31(*a*) 0; (*b*) $469\mathbf{a}_\phi$ A/m; (*c*) $6\pi\mathbf{a}_\phi/\rho$ μWb/m^2 في الداخل, 0 في الخارج;
(*d*) 54.2 nWb. **33** 5 cm. **35**(*a*) 32 A; (*b*) $-5.03\mathbf{a}_\phi$ μWb/m.
37(*a*) −244 A; (*b*) 69.0 A. **39** $-(0.006/\pi) \tan^{-1} (y/2)$ A.
41 برهان **43** برهان

الفصل التاسع

1(*a*) (24, 0, 10) m; (*b*) $24\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z$ m/s; (*c*) 300.5 J.
3(*a*) $500\mathbf{a}_y + 300\mathbf{a}_z$ kV/m; (*b*) 957 kV.
5 $\mathbf{F}_L = -24\mathbf{a}_y$ μN, $\mathbf{F}_R = 12\mathbf{a}_y$ μN, $\mathbf{F}_T = 24\mathbf{a}_z \ln 2$ μN,
$\mathbf{F}_B = -24\mathbf{a}_z \ln 2$ μN, $\mathbf{F}_{tot} = -12\mathbf{a}_y$ μN. **7** $-0.16\pi\mathbf{a}_z$ μN.
9(*a*) برهان ; (*b*) انظر نهاية قسم ٩-٣ **11**(*a*) $2.66\mathbf{a}_y$ mN/m;
(*b*) $-2.66\mathbf{a}_y$ mN/m. **13**(*a*) (*b*) $-24\mathbf{a}_z$ N · m; (*c*) $6\mathbf{a}_x$ μN · m.
15 0.905 N · m. **17**(*a*) $\frac{1}{2}\omega e a^2$; (*b*) $\frac{1}{2}\omega e a^2 B$. **19**(*a*) 3;
(*b*) 3.77 μH/m; (*c*) $-10.61\mathbf{a}_z$ kA/m^2; (*d*) $-5.31\mathbf{a}_z$ kA/m^2;
(*e*) $10.61y\mathbf{a}_x$ kA/m; (*f*) $5.31y\mathbf{a}_x$ kA/m. **21** $y < -0.1$:
$\mathbf{H} = 1{,}800\mathbf{a}_x$, $\mathbf{B} = 2{,}250\mu_0 \mathbf{a}_x$, $\mathbf{M} = 450\mathbf{a}_x$; $-0.1 < y < 0.2$:
$\mathbf{H} = 12{,}000(0.05 - y)\mathbf{a}_x$, $\mathbf{B} = 30{,}000\mu_0(0.05 - y)\mathbf{a}_x$,
$\mathbf{M} = 18{,}000(0.05 - y)\mathbf{a}_x$; $y > 0.2$: $\mathbf{H} = -1{,}800\mathbf{a}_x$, $\mathbf{B} = -2{,}250\mu_0 \mathbf{a}_x$,
$\mathbf{M} = -450\mathbf{a}_x$ (A/m, Wb/m^2, A/m).
23 $B = 3.92$ μWb/m^2, $H = 3.09$ A/m, $M = 0.0309$ A/m.
25(*a*) 54.0°; (*b*) 70.0°. **27**(*a*) 1.678 cm; (*b*) 1.225 cm.
29(*a*) 1.056 Wb/m^2; (*b*) 0.990 Wb/m^2; (*c*) 0.990 Wb/m^2.
31 147.1 μm. **33** 221 μm. **35**(*a*) 31.6 μJ; (*b*) 7.90 μJ;
(*c*) 39.5 μJ. **37**(*a*) 503 μWb/m^2, 400 A/m, 13.64 μJ; (*b*) 17.06 mH.
39(*a*) 0.916 mH; (*b*) 8.01 mH; (*c*) 9.16 μH. **41**(*a*) 0.392 μH;
(*b*) 0.216 μH. **43**(*a*) 0.439 μH; (*b*) 0.443 μH.

الفصل العاشر

1(*a*) $18.95 \cos 120\pi t$ V; (*b*) $-189.5 \cos 120\pi t$ mA.
3(*a*) $-1200 \cos 3 \times 10^8 \pi t$ V; (*b*) 0. **5** انظر الرسم التخطيطي
7(*a*) $-0.128 - 18.64t$ V; (*b*) $-9.6t - 52{,}412t^3$ V.
9(*a*) 0; (*b*) 0.24 V; (*c*) 0.24 V; (*d*) 0.24 V.
11(*a*) 6.55×10^{15}; (*b*) 282; (*c*) 4.46×10^{-9}.
13(*a*) $(2 \times 10^{-6}/\omega) \sin (\omega t - 5z)\mathbf{a}_x$ C/m^2, $(2 \times 10^{-6}/4\epsilon_0 \omega) \sin (\omega t - 5z)\mathbf{a}_x$
V/m; (*b*) $(10^{-5}/4\epsilon_0 \omega^2) \sin (\omega t - 5z)\mathbf{a}_y$
Wb/m^2, $(10^{-6}/2\mu_0\epsilon_0 \omega^2) \sin (\omega t - 5z)\mathbf{a}_y$ A/m;
(*c*) $(2.5 \times 10^{-6}/\mu_0 \epsilon_0 \omega^2) \cos (\omega t - 5z)\mathbf{a}_x$ A/m^2, 335 Mrad/s.
15 12×10^8 s^{-1}, $(5/3\pi) \exp(4x - 12 \times 10^8 t)\mathbf{a}_z$ A/m.

شكل B

17(*a*) (20) ص, $E = f(t)$; (21) ص, $D \neq f(t)$;
(*b*) 1.257×10^{-6} rad/m. **19**(*a*) 941 pC/m^2; (*b*) 11.72 V/m.
21(*a*) 80 V/m; (*b*) $[0.1592 \cos (15 \times 10^8 t - 5z)$
$- 0.0531 \cos (15 \times 10^8 t + 5z)]\mathbf{a}_y$ A/m;
(*c*) $0.1061 \cos (15 \times 10^8 t - 50z)\mathbf{a}_y$ A/m; (*d*) $H_{t1} = H_{t2}$.
23(*a*) $380 \cos 4\pi 10^8 t\ \mathbf{a}_z$ A/m; (*b*) $(502/\rho) \sin 2\pi z \sin 4\pi 10^8 t\ \mathbf{a}_\rho$ V/m;
(*c*) $-5 \times 10^{-7} \sin 4\pi 10^8 t$ C/m^2; (*d*) $1{,}257 \cos 4\pi 10^8 t\ \mathbf{a}_\rho$ A/m^2.
25(*a*) $400y \cos (10^9 t - 4z)\mathbf{a}_z \mu$Wb/m; (*b*) $10^5 y \cos (10^9 t - 4z)$ V.

الفصل الحادي عشر

1 برهان. **3**(*a*) 122.1 V/m; (*b*) 98.8 V/m; (*c*) 119.4 V/m.
5(*a*) 100 μs; (*b*) $z = 30$ km. **7**(*a*) 50.0 rad/m;
(*b*) 0.1256 m; (*c*) $(0.478\mathbf{a}_x + 0.1991\mathbf{a}_y) \cos (10^{10} t - 50.0z)$ A/m.
9 2.5 GHz, $\mu_R = 1.99$, $\epsilon_R = 1.130$. **11** $\alpha \simeq 3 \times 10^{-4}$ Np/m,
$\beta \simeq 3.3$ rad/m. **13** $\mu_R = 1.670$, $\epsilon_R = 4.84$; $\sigma = 0.019\ 06$ ℧/m.
15(*a*) 0.0286 Np/m; (*b*) 0.0439 rad/m; (*c*) 143.0 m;
(*d*) 4.55×10^7 m/s; (*e*) $479\underline{/33.1°}$ Ω; (*f*) $12.69\mathbf{a}_x$ mV/m.
17 P.F. $= [1 + (\sigma/\omega\epsilon)^{-2}]^{-1/2}$, $Q = (\sigma/\omega\epsilon)^{-1}$. **19**(*a*) $(0.1648/\rho)$
$\cos (10^9 t - 10z/3)\mathbf{a}_\phi$ A/m; (*b*) $(10.24/\rho^2) \cos^2 (10^9 t - 10z/3)\ \mathbf{a}_z$ W/m^2;
(*c*) 51.8 W. **21**(*a*) 150 W; (*b*) 124.8 W. **23**(*a*) $-0.375\mathbf{a}_x + 0.273\mathbf{a}_y$
$+ 0.886\mathbf{a}_z$; (*b*) 44.0 kW/m^2; (*c*) 2.49. **25** 999 MHz, 1.112×10^5 ℧/m.
27(*a*) $100 \cos 4 \times 10^8 t\ \mathbf{a}_x$ A/m; (*b*) $37{,}700 \cos 4 \times 10^8 t\ \mathbf{a}_z$ V/m;
(*c*) $70.9 \cos (4 \times 10^8 t + 45°)\ \mathbf{a}_y$ V/m. **29**(*a*) 0.707 Ω/m;
(*b*) 0.1768 Ω/m; (*c*) 0.884 Ω/m. **31**(*a*) $\beta_A = 10/3$ rad/m,
$\beta_B = 10.54$ rad/m; (*b*) 0.1170; (*c*) $2.4 \cos (5 \times 10^8 t$
$- 10z/3) + 0.281 \cos (5 \times 10^8 t + 10z/3)$ V/m;
(*d*) $2.68 \cos (5 \times 10^8 t - 10.54z)$ V/m; (*e*) 10.47 mA/m.
33(*a*) $z = 0.82 - 0.589n$ cm; (*b*) 237 Ω. **35**(*a*) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0.334$ rad/m;
(*b*) $0.290\underline{/102.8°}$; (*c*) $29.0 \cos (10^8 t + 0.334z + 102.8°)$ V/m;
(*d*) $97.8e^{-0.786z} \cos (10^8 t - 1.272z + 16.8°)$ V/m.
37(*a*) 0.678 cm; (*b*) 93.1%. **39**(*a*) 4; (*b*) 13.93; (*c*) 9.
41(*a*) 3; (*b*) 1.333; (*c*) 2.02.

الفصل الثاني عشر

1(*a*) $0.1300 + j5.00$ m^{-1}, 0.1300 Np/m, 5.00 rad/m,
1.256 m, $100.0 - j2.40$ Ω, 199.9 m/μs; (*b*) 17.72 m.
3(*a*) 0.3 μH/m; (*b*) 83.3 pF/m; (*c*) $0.481\underline{/-87.0°}$.

5(*a*) 0.1628; (*b*) 1.389; (*c*) $55.3 - j12.50\ \Omega$.

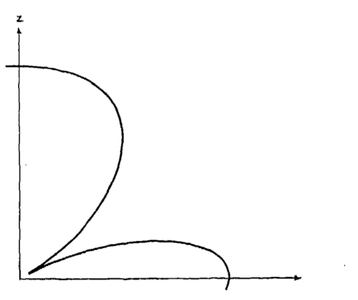
7 $\left[\dfrac{10^{-7}I^2}{4(c^2 - b^2)}\right]\left(b^2 - 3c^2 + \dfrac{4c^4}{c^2 - b^2}\ln\dfrac{c}{b}\right)$.

9(*a*) 0.358 μH/m, 44.7 pF/m; (*b*) 0.358 μH/m, 44.7 pF/m;
(*c*) E أقل في الخط الأكبر لنفس V ، لهذا قابلية الانهيار الفولتي أقل ، R أقل في الخط الأكبر .

11 83.3 Ω. **13**(*a*) $0.644\angle 65.4^\circ$; (*b*) 4.62; (*c*) $107.8\angle -60.9^\circ\ \Omega$.
15(*a*) 1.022 A; (*b*) 2.09 A; (*c*) 43.5 W.
17(*a*) 3; (*b*) $17.72 + j11.81\ \Omega$; (*c*) $36.1\angle 22.1^\circ$ V; (*d*) 57.6 W;
(*e*) 25.5 W; (*f*) (*g*) 0. **19**(*a*) $0.620\angle -82.9^\circ$; (*b*) 4.27;
(*c*) $23.5 - j5.88\ \Omega$; (*d*) $164.4\angle -9.5^\circ$ V; (*e*) $6.78\angle 4.6^\circ$ A;
(*f*) 541 W; (*g*) $520\angle -72.9^\circ$ V; (*h*) $4.65\angle -9.5^\circ$ A; (*i*) 541 W.
21(*a*) $42 - j36\ \Omega$; (*b*) 2.3; (*c*) 0.444λ. **23**(*a*) 1.93;
(*b*) 16.4 cm; (*c*) 34 Ω. **25**(*a*) $0.63\angle -86^\circ$; (*b*) 4.4;
(*c*) 95 cm; (*d*) $4.5 - j0.1$ m℧. **27**(*a*) 25.5 cm; (*b*) 11.84 cm;
(*c*) 0.98 cm. **29** $36.5 + j21.6\ \Omega$. **31** 1.271 GHz, $57.1 - j24.3\ \Omega$.
33(*a*) $d_1 = 9.5$ cm, $d = 11$ cm; (*b*) $s = 1$, ∞, and 3.91.
35 0.152λ من الحمل ، بطول 0.152λ

الفصل الثالث عشر

1(*a*) 115.55, 115.56, 667 nH; (*b*) $L_{eq} = (50/\omega)\tan(0.4\omega/\sqrt{3}\ 10^8)$, الرسم غير مبين
3 123.8 MHz. **5**(*a*) 1.44, 3.60×10^{-11} ℧/m;
(*b*) 175.0 pF. **7**(*a*) لكل $3\cos 3t$ A
(*b*) a: $-6\cos 3t$ V ، كلها عبر R ؛ b: $-6\cos 3t$ V ، منتظم التوزيع ؛ c: 0 ؛ $6\cos 3t$ V عبر المنبع و $-6\cos 3t$ V عبر R .
9 0.625 mW. **11**(*a*) 16.20 pF, 39.1 nH; (*b*) 695, 34.2 kΩ;
(*c*) 3,730, 183.3 kΩ; (*d*) 586, 28.8 kΩ. **13**(*a*) 116.2 nH, 6.21 pF,
348 kΩ, 2544; (*b*) 12.91 nH, 6.21 pF. **15** 350 MHz.
17(*a*) $1{,}595\angle -0.0047^\circ$ A/m; (*b*) $18.80\angle -3.86^\circ$ A/m;
(*c*) $1.013\angle -279.0^\circ$ A/m. **19**(*a*) برهان (*b*) 20.3°.
21(*a*) 2.68 A; (*b*) 131.5 W. **23**(*a*) $R^+ = 4.5\lambda$, $R^- = 5.5\lambda$;
(*b*) $R^+ = 4.573\,825\lambda$, $R^- = 5.438\,762\lambda$; (*c*) $R^+ = 4.769\,696\lambda$,
$R^- = 5.267\,827\lambda$; (*d*) $R^+ = R^- = 5.024\,938\lambda$; (*e*) انظر الرسم التخطيطي



شكل C

قائمة المصطلحات العلمية

(أ)

ابتدائى	Initial
أبعاد	Dimensions
اتجاه	Direction
اتساع	Amplitude
اثارة	Excitation
اثبات	Proof
اثيل	Ethyl
أجوف	Hollow
احادى القطب	Monopole
احداثى	Coordinate
احداثيات اسطوانية دائرية	Circular cylindrical coordinates
احداثيات قطبية	Polar coordinates
احداثيات متعامدة	Rectangular coordinates
اختراق	Penetration
اختلاف	Discrepancy
اختيارى - تطوعى	Voluntary
اداة - جهاز	Device
أدوات	Tools
إذاعة	Broadcasting
اربيوم	Erbium
ارتفاع - مسقط راسى	Elevation
ارجون	Argon
ازاحة	Displacement
ازاحة الطور	Phase shift
أس	Exponent
استبدال - تعويض	Substitution
استجابة	Response

Stereo	استريو
Polarization	استقطاب
Interpolation	استكمال من الداخل
Cylinder	اسطوانة
Wedge	اسفين
Technique	اسلوب تقنى
Exponential	اسى
Sign	اشارة
Radar signal	اشارة رادار
Radiation	اشعاع
Addition	اضافة ـ جمع
Peturbation	اضطراب
Frame of reference	اطار اسناد
Launching	اطلاق
Horizontal	افقى
Oxygen	اكسجين
Neodymium oxide	اكسيد نيوديميوم
Curl	التواء
Electron	الكترون
Mechanism	آلية
Extension	امتداد
Propagation	انتشار
Wave propagation	انتشار الموجات
Selective	انتقائى
Translation	انتقال
Accomplishment	انجاز
Deflection	انحراف
Curvature	انحناء
Structure	انشاء ـ تكوين
Reflection	انعكاس
Permeability	انفاذية
Divergence	انفراج
Refraction	انكسار

Odometer	أودومتر
Elementary	أولى ـ ابتدائى
Hydrogen	ايدروجين
Iridium	ايريدوم

(ب)

Parameter	پارامتر
Paramagnetic	پارامغناطيسى
Sink	بالوعة
Dissipate	بدد
Tower	برج
Permalloy	برمالوى
Proton	پروتون
Beryllium	بريليوم
Bismuth	بزموث
Battery	بطارية
Platinum	بلاتين
Plasma	بلازما
Crystalline	بللورى
Marble	بلية
Potasium	پوتاسيوم
Porcelain	پورسيلين (صينى)
Polypropylene	پوليبروبيلين
Polyethylene	پوليثيلين
Indication	بيان ـ دلالة
Pyranol	پيرانول
Pyrex	پيركس

(ت)

Hall effect	تأثير هول
Retardation	تأخر ـ تأخير
Permutation	تبديل

Attraction	تجاذب
Experiment	تجربة
Empirical	تجريبى
Assembly	تجميع
Analysis	تحليل
Vector analysis	تحليل المتجهات
Analytical	تحليلى
Conversion	تحويل
Transformation	تحويل
Energy conversion	تحويل طاقة
Magnetostriction	تحضير بالمغناطيسية
Graphical	تخطيطى ـ بيانى
Hysteresis	تخلفية ـ تخلف
Gradient	تدرج
Scale	تدريج ـ مقياس رسم
Flux	تدفق
Spin	تدويم ـ دوران مغزلى
Notation	تدوين
Superposition	تراكب
Version	ترجمة ـ صورة
Frequency	تردد
Radian frequency	تردد زاوى
Super high frequency (SHF)	تردد فوق العالى
Low frequency	تردد منخفض
Focusing	تركيز بؤرى
Leakage	تسرب
Saturation	تشبع
Configuration	تشكيل ـ هيئة ـ شكل هندسى
Classification	تصنيف
Xerography	تصوير جاف
Voluntary	تطوعى ـ اختيارى
Perpendicularity	تعامد
Expression	تعبير

Definition	تعريف
Substitution	تعويض - استبدال
Variation	تغير
Periodic Variation	تغير دورى
Differentiation	تفاضل
Interpretation	تفسير - شرح
Teflon	تفلون
Progress	تقدم
Estimate	تقدير - يقدر
Radians	تقدير دائرى
Aproximation	تقريب
Rounding off	تقريب
Shorting	تقصير (الدائرة)
Limitation	تقييد
Integration	تكامل
Symmetry	تمثل
Tangency	تماس
Tungsten	تنجستن
Arrangement	تنظيم
Refinement	تنقية
Fringing	تهدب
Parallelism	توازى
Harmonic	توافقى
Illustration	توضيح
Attenuation	توهين
Current	تيار
Eddy currents	تيارات دوامية
Displacement current	تيار ازاحة
Convection current	تيار حمل
Transient current	تيار عابر
Dc (direct current)	تيار مستمر
Barium titanate	تيتانات باريوم

(ث)

Steady	ثابت
Phase constant	ثابت الطور
Dielectric constant	ثابت العازل
Carbon dioxide	ثانى أكسيد الكربون
Constancy	ثابت
Thermistor	ثرمستو
Gap	ثغرة ـ فجوة
Three - dimensional	ثلاثى الأبعاد
Snow	ثلج
Octant	ثُمن
Dipole	ثنائى قطب

(ج)

Gadolinium	جادولينيوم
Galvanometer	جالفانومتر
Algebra	جبر
Twist	جدل ـ لى
Square root	جذر تربيعى
Root mean square	جذر متوسط المربع
Radical	جذرى
Graphite	جرافيت
Granite	جرانيت
Germanium	جرمانيوم
Segment	جزء
Molecule	جزىء
Ice	جليد
Omnidirectional	لجيمع الاتجاهات
Device	جهاز ـ أداة
Instrument	جهز قياس
Potential	جهد
Retarded potential	جهد مؤخر
Atmosphere	جو

Joule	جول
Hyperbolic cosine	جيب تمام زائدى
hyperbolic sine	جيب زائدى

(ح)

Barrier	حاجز
Armature	حافظة المغناطيس
Steady state	حالة ثابتة
Ground state	جالة خمود (همود)
Charge carrier	حامل شحنة
Limestone	حجر جيرى
Volume	حجم
Differential volume	حجم تفاضلى
Iron	حديد
Cast iron	حديد زهر
Omission	حذف
Mobility	حركية
Beam	حزمة
Arithmetic	حساب
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Trigonometry	حساب المثلثات
Sensitivity	حساسية
Ring	حلقة
Clamping ring	حلقة تثبيت
Load	حمل
Electrolytic trough	حوض الكتروليتى

(خ)

Quotient	خارج قسمة
External	خارجى
Property	خاصية ـ مسلك
Conservative property	خاصية المحافظة
Characteristic	خاصية ـ خاصة ـ مميز

خام	Ore
خبرة - يلاقى (يعانى)	Experience
خرج - حصيلة	Output
خريطة - تخطيط	Map
خطأ	Error
خط تعويق (تأخير)	Delay line
خط شحنة (خط من الشحنة)	Line charge
خط طول	Longitude
خط عرض (أو زاوية خط العرض)	Latitude
خط مشقوق	Slotted line
خط نقل	Transmission line
خطوطو انسياب	Streamlines
خطوط مناسيب (خطوط كنتورية)	Contour lines
خطوة	Pitch
خطى	Linear
خلية	Cell

(د)

دائرى الاستقطاب	Circularly polarized
دائرة	Circle
دائرة قصر	Short circuit
دائرة كهربية	Circuit
دائرة مفتوحة	Open circuit
دائرة مكاملة	Integrated - circuit
داخلى	Internal
دالة	Function
دالة دورية	Periodic function
دايامغناطيسى	Diamagnetic
دخل - مدخل	Input
درجة حرارة	Temperature
درع - حائل	Shield
دفع أيونى	Ion propulsion
دقة	Accuracy

Waveguide	دليل موجى
Circulation	دوران
Spin	دوران مغزلى ـ تدويم
Cyclic	دورى
Infrared	دون الحمراء
Dysprosium	ديسبروزيوم
Thermodynamics	ديناميكا حرارية

(ذ)

Intrinsic	ذاتى
Automotive	ذاتى الحركة
Memory	ذاكرة
Vibration	ذبذبة
Crank handle	ذراع تدوير
Lsever arm	ذراع رافعة
Gold	ذهب
Two - dimensional	ذو بعدين ـ ثنائى الأبعاد
Lossy	ذو فقد

(ر)

Radome	رادوم.
Vertex	رأس ـ قمة
Vertical	راسى
Order of magnitude	رتبة (عظم) مقدار
Marble	رخام
Plot	رسم
Diagram	رسم بيانى
Sketch	رسم تخطيطى
Humidity	رطوبة
Significant figure	رقم معنوى
Thunderhead	ركام رعدى
Corner	ركن
Symbol	رمز

Superscript	رمز علوى
Resonant	رنان
Resonance	رنين
Blade	ريشة (مروحة أو رفاص)

(ز)

Angle	زاوية
Acute angle	زاوية حادة
Glass	زجاج
Fiberglass	زجاج ليفى
Relaxation time	زمن تراخى

(س)

Liquid	سائل
Stationary	ساكن
Negative	سالب
Alloy	سبيكة
Steatite	ستيتيت
Velocity	سرعة
Drift velocity	سرعة انسياق
Surface	سطح
Interface	سطح بينى
Gaussian surface	سطح جاوسى
Two sheeted hyperboloid	سطح زائدى أو طينين
Capacitive	سعوى
Capacitance	سعة
Partial capacitance	سعة جزئية
Stray capacitance	سعة شاردة
Normal incidence	سقوط عمودى
Wire	سلك
Silicon	سيليكون
Permittivity	سماحية
Azimuthal	سمتى

Sonar	سونار
Cesium	سيزيوم
Cyclotron	سيكلوترون
Sendust	سيندست

(ش)

Lattice	شبكية
Network	شبكة
Oblate spheroid	شبه كرة مفلطح
Semiconductor	شبه موصل
Space charge	شحنة حيزية
Surface charge	شحنة سطحية
Bound charge	شحنة مقيدة
Point charge	شحنة نقطية
Electric field intensity	شدة المجال الكهربى
Boundary conditions	شروط حدية
Strip	شريط
Microstrip	شريط دقيق
Audio tape	شريط صوتى
Cathode - ray	شعاع الكاثود
Work	شغل
Virtual work	شغل افتراضى
Transparent	شفاف
Shape	شكل
Peturb	شوش
Deform	شوه

(ص)

Explicit	صريح
Row	صف
Align	صف (يضع فى صف)
Steel	صلب ـ فولاذ
Clay	صلصال

Diode	صمام ثنائى
Vacuum tube	صمام مفرغ - انبوبة مفرغة
Image	صورة
Point form	صورة نقطية
Formula	صيغة

(ض)

Antiferromagnetic	ضديد الفرومغناطيسية
Mulitiplication	ضرب
Multiply	ضرب
Dot product	ضرب بعلامة النقطة
Cross product X	ضرب بعلامة X
Vector product	ضرب متجه
Scalar product	ضرب مقياسى
Pressure	ضغط
Combination	ضم - تجمع
Noise	ضوضاء

(ط)

Energy	طاقة
Kinetic energy	طاقة حركة
Energy stored	طاقة مختزنة
Energy expended	طاقة مستنفذة
Layer	طبقة
Subtract	طرح
Terminal	طرف
Relaxation method	طريقة الاسترخاء
Iteration method	طريقة التكرار
Phase	طور
Wavelength	طول موجة
Fold	طوى - طية

(ظ)

ظاهرة	Phenomenon
ظاهرة سطحية	Skin effect
ظل الفقد	Loss tangent

(ع)

عازل	Dielectric - Insulator
عامل	Factor - Operator
عامل الجودة	Quality factor
عامل القدرة	Power factor
عامل لف	Winding factor
عامل متجه	Vector operator
يعاير - يدرج	Calibrate
عجلة	Acceleration
عجلة تجديف	Paddle wheel
عدد	Number
عدد صحيح	Integral number
عددى	Numerical
عدل	Modulate
عديم الابعاد	Dimensionless
عرض النطاق الترددى	Bandwidth
عروة	Loop
عزم	Moment
عزوم تدوير	Torque
عشوائى	Random
عضو حث	Inductor
عقب	Stub
غقد - عقدة	Knot
عكس - قلب	Reversal
عكس التوازى (متوازى ومتضاد فى الاتجاه)	Antiparallel
علاقة	Relationship
علاقة تكرارية	Recurrence relation

Skin depth	عمق سطحى
Operation	عملية
Limiting process	عملية حدية
Column	عمود
Perpendicular, normal	عمودى
Rare earth elements	عناصر الأرض النادرية
Element	عنصر
Increment	عنصر تزايدى
Compensate	يعوض
Standard	عيارى - قياسى
Sample	عينة

(غ)

Dominant	غالب
Gas	غاز
Inert gas	غاز خامل
Thin film	غشاء رقيق
Elastic membrane	غشاء مرن
Nonlinear	غير خطى
Unbounded	غير محدود
Anisotropic	غير موحد الخواص

(ف)

Superferromagenetic	فائقة البارامغناطيسية
Aperture	فتحة
Postulate	فرض - يسلم بـ
Filamentary	فتيلى
Filament	فتيلة
Hole	فجوة - ثقب
Cavity	فجوة
Resonant cavity	فجوة رنانة
Inspection	فحص
Vacuum	فراغ

فراغ	Space
فرجار	Divider
فرض	Hypothesis
فرط موصلية	Superconductivity
فرن بموجات دقيقة	Microwave oven
فروكهربية (مادة عازلة عفـوية الاستقطاب)	Ferroelectric
فرومغناطيسية	Ferromagnetic
فريت	Ferrite
فريد	Unique
فرى مغناطيسية	Ferrimagnetic
فسيولوجى (وظائفى)	Physiology
فصل ـ انفصال	Separation
فضاء حر	Free space
فقد	Loss
فقرة	Paragraph
فلك الالتواء	Uncurling
فهرس	Index
فوق البنفسجية	Ultraviolet
ڤولت	Volt
ڤولتمتر	Voltmeter
ڤولطية	Voltage
ڤولطية مسلطة	Applied Voltage
فيرلونج (٢٢٠ ياردة)	Furlong
فيزيائى	Physical
فى نفس اللحظة ـ آنيا	Simultaneously

(ق)

قابلية التأثر	Susceptibility
قاعدة	Rule
قاعدة	Substrate
قارنة ـ تقارن	Coupling

Commutative law	قانون التبادل
Associative law	قانون التجميع
Circuital law	قانون دائرى
Power	قدرة
Linearize	قرب خطيا
Tin	قصدير
Rail, Bar	قضيب
Bus bar	قضيب توصيل
Sector	قطاع
Electrode	قطب كهربى
Polar	قطبى
Branch cot	قطع تفرع
Core	قلب
Crest	قمة ـ ذروة
Bridge	قنطرة
Arc	قوس
Rectify	قوم
Force	قوة
Electromotive force (emf)	قوة دافعة كهربية (ق د ك)
Magnetomotive force (mmf)	قوة دافعة مغناطيسية (ق د م)
Coercive force	قوة قهرية
Mutual force	قوة متبادلة
Measure	قياس
Standard	قياس عيارى
Typical values	قيم نموذجية

(ك)

Candela	كانديلا (وحدة شدة اضاءة)
Sulfur	كبريت
Ferrous sulfide	كبريتيد حديدوز
Coaxial cable	كابل محورى (كابل ذو موصلين متحدى المحور)
Handbook	كتاب مختصر ـ كتيب

Mass	كتلة
Effective mass	كتلة فعالة
Density	كثافة
Flux density	كثافة تدفق
Current density	كثافة تيار
Alcohol	كحول
Krypton	كربتون
Bearing	كرسى تحميل
Sphere	كرة
Fraction	كسر ـ جزء
Detection	كشف
Chloride	كلوريد
Sodium chloride	كلوريد صوديوم
Cobalt chloride	كلوريد كوبلت
Quantitative	كمى
Quantity	كمية
Tensor	كمية ممتدة
Electricity	كهربية
Amber	كهرمان
Electrostatic	كهروستاتيكية
Electromagnetic	كهرومغناطيسى
Quartz	كوارتز
Qualitative	كيفى
Manner	كيفية ـ طريقة ـ اسلوب
Kilogram	كيلو جرام

(ل)

Summarize	لخص
Homonym	لفظة متجانسة
Winding	لفيفة ـ ملف
Turn	لفة
Sheet	لوح ـ فرخ

Dashboard	لوحة أجهزة قياس
Logarithms	لوغاريتمات
Helix	لولب ـ حلزون

(م)

Turntable	مائدة دوارة
Fluid	مائع
Substance	مادة
Solid	مادة صلبة
Macroscopic	ماكروسكوبى
Infinity	مالانهاية
Relay	متابع
Inherent	متأصل
Remnant	متبق
Residual	متبق ـ متخلف
Homogeneous	متجانس
Vector	متجه
Position Vector	متجه موضع
Concentric	متحد المركز
Alternating	متردد
Equipotential	متساوى الجهد
Series	متسلسلة ـ على التوالى
Taylor's series	متسلسلة تايلور
Combined	متضام
Vector identity	متطابقة متجهة (اتجاهية)
Neutral	متعادل
Successive	متعاقب ـ متتالى
Orthogonal	متعامد
Polycrystalline	متعدد البللورات
Multipole	متعدد القطب
Pertinent	متعلق
Variable	متغير
Argument	متغير مطلق

Time - varying	متغير مع الزمن
Acceptor	متقبل ـ قابل
Proportional	متناسب
Inversely proportional	متناسب عكسيا
Paradoxical	متناقض ظاهريا
Infinitesimal	متناهى الصغر
Parallelogram	متوازى أضلاع
Rectangular parallelepiped	متوازى مستطيلات قائم
Consistent	متوافق
Intermediate	متوسط
Incandescent	متوهج
Triangle	مثلث
Field	مجال
Domain	مجال ـ مقاطعة
Static field	مجال استاتيكى
Magnetic field	مجال مغناطيسى
Adjacent	مجاور
Probe	مجس
Lumped	مجمع
Sum	مجموع
Set	مجموعة
Array	مجموعة مرتبة
Speaker	مجهار
Inductance	محاثة
Mutual inductance	محاثة متبادلة
Conservative	محافظ
Axes	محاور
Shielded	محجب
Determinant	محددة
Forbidden	محرم
Enclosed	محصور
Substation	محطة فرعية
Locus	محل هندسى

Electrolytic solution	محلول الكتروليتى
Axis	محور
Transformer	محول
Perimeter	محيط
Circumferential	محيطي
Cone	مخروط
Chart	مخطط
Orbit	مدار
Graduated	مدرج
Electron gun	مدفعة الكترونات
Range	مدى
Period	مدة دورة ـ فترة
Oscillator	مذبذب
Zero reference	مرجع صفرى
Oscilloscope	مرسمة تذبذبات
Rationalized	مرشد
Guide	مرشد ـ موجه ـ دليل
Transmitter	مرسل ـ جهاز ارسال
Complex	مركب
Component	مركبة
Resonator	مرنان
Path	مسار
Trajectory	مسار (قذف)
Distance	مسافة
Admittance	مسامحة
Contribution	مساهمة
Equality	مساواة ـ تساوى
Rectangle	مستطيل
Transverse	مستعرض
Continuous	مستمر ـ متصل
Plane	مستوى
Level	مستوى

Reference plane	مستوى اسناد
Projection	مسقط
Type recorder	مسجل شريطى
Track	مسلك
Normalized	مسوى - معاير
Coplanar	مشتركة المستوى
Partial derivative	مشتقة جزئية
Radiator	مشع
Nomenclature	مصطلحات - مسميات
Matrix	مصفوفة
Plant	مصنع
Opposite	مضاد - مقابل
Integral multiple	مضاعف صحيح
Preamplifier	مضخم متقدم
Luminous	مضيء
Identical	مطابق
Phasor	مطاور
Equation	معادلة
Continuity equation	معادلة الاستمرارية
Diffusion equation	معادلة الانتشار
Differential equation	معادلة تفاضلية
Manipulation	معالجة
Transmission coefficient	معامل النفاذ
Impedance	معاوقة
Input impedance	معاوقة دخل
Characteristic impedance	معاوقة مميزة
Normalized	معاير - مسوى
Equipment	معدة
Donor	معطى
Information	معلومات
Criterion	معيار
Embedded	مغمور
Permanent magnet	مغناطيس دائم

Electromagnet	مغناطيس كهربى
Magnetics	مغناطيسيات
Magnetism	مغناطيسية
Magnetron	مغنطرون
Magnetite	مغنيتيتى
Reactive	مفاعل
Reactance	مفاعلة
Switch	مفتاح كهربى
Expansion	مفكوك
Comparable	مقارن
Domain	مقاطعة ـ مجال
Resistor	مقاوم
Resistivity	مقاومية
Magnitude	مقدار
Coupled	مقرنة
Distilled	مقطر
Longitudinal section	مقطع طولى
Truncated	مقطوع ـ مبتور
Reciprocal	مقلوب
Wattmeter	مقياس قدرة
Scalar	مقياس ـ كمية مقياسية
Integrand	مكامل
Amplified	مكبر
Capacitor	مكثف
Coaxial capacitor	مكثف محورى (مكثف ذو موصلين متحدى المحور)
Detector	مكشاف
Quantized	مكمى
Rochelle salt	ملح روشيل
Summary	ملخص
Coil - Winding	ملف
Toroid	ملف حلقى
Solenoid	ملف لولبى

Tangent	مماس
Tangential	مماسى
Reluctance	ممانعة
Analogous	مناظر
Source	منبع
Manganese	منجنيز
Induced	منتجة بالحث ـ مستحثة
Uniform	منتظم
Spiral ramp	منحدر حلزونى
Curve	منحنى
Curvilinear	منحنى الخطوط
Dehydrated	منزوع منه الماء
Fused	منصهر
Logical	منطقى
Region	منطقة
Discrete	منفصل
Assorted	منوع
Matching	مواءمة
Materials	مواد
Insulating materials	مواد عازلة
Parallel	موازى
Conductance	مواصلة
Tuned	موالف
Temporarily	مؤقتا
Positive	موجب
Wave	موجة
Microwave	موجة دقيقة
Incident wave	موجة ساقطة
Traveling wave	موجة متنقلة
Standing wave	موجة واقفة
Isotropic	موحد الخواص
Conductor	موصل
Perfect conductor	موصل تام

Shunt	موصل على التوازى
Conductivity	موصلية
Location	موضع
Generator	مولد
Signal generator	مولد اشارات
Ripples	مويجات
Balance	ميزان
Torsion balance	ميزان التواء
Maser	ميزر
Mechanics	ميكانيكا
Applied mechanics	ميكانيكا تطبيقية
Microscopic	ميكروسكوبى
Slope	ميل
Mumetal	ميوميتال

(ن)

Pulse	نبضة
Brass	نحاس أصفر
Depletion	نزح
Publication	نشر
Semi - infinite	نصف لانهائى .
Band	نطاق
Valence band	نطاق تكافؤ
Energy band	نطاق طاقة
Cartesian coordinate system	ظام احداثيات كرتيزية
Spherical coordinate system	نظام احداثيات كروية
Binomial theorem	نظرية ذات الحدين
Quantum theory	نظرية الكم
Uniqueness theorem	نظرية الوحدانية
Point	نقطة
Origin	نقطة الأصل
Freezing point	نقطة تجمد
Transmission	نقل ـ نفاذ

Pattern	نمط
Final	نهائى
Minimum	نهاية صغرى
Maximum	نهاية عظمى
Nucleus	نواة
Nickel	نيكل
Nickel ferrite	نيكل حديدى
Neoprene	نيوبرين

(هـ)

Helium	هليوم
Geometry	هندسة
Antenna	هوائى
Transmitting antenna	هوائى ارسال
Receiving antenna	هوائى استقبال
Magnetohydrodynamics	هيدروديناميكا مغناطيسية
Hydroelectric	هيدروكهربى
Hydraulics	هيدروليكا

(و)

Orient	وجه
Unit vector	وحدة متجه
Distribute	وزع
Linkage	وصلية
Junction	وصلة ـ ملتقى
Contradict	يتعارض مع
Yttrium	يوتريوم

GLOSSARY

(A)

Acceleration	عجلة
Acceptor	متقبل ـ قابل
Accomplishment	انجاز
Accuracy	دقة
Acute angle	زاوية حادة
Additon	جمع (اضافة)
Adjacent	مجاور
Admittance	مسامحة
Alcohol	كحول
Algebra	جبر
Align	يصف (يضع فى صف)
Alloy	سبيكة
Alternating	متردد
Amber	كهرمان
Amplifier	مكبر
Amplitude	اتساع
Analogous	مناظر
Analysis	تحليل
Analytical	تحليلى
Angle	زاوية
Anisotropic	غير موحد الخواص
Antenna	هوائى
Antiferromagnetic	ضديد الفرومغناطيسية
Antiparallel	عكسى التوازى (متوازى ومتضاد فى الاتجاه)
Aperture	فتحة
Applied mechanics	ميكانيكا تطبيقية

Applied foltage	ڤولطية مسلطة
Approximation	تقريب
Arc	قوس
Argon	ارجون
Argument	متغير مطلق
Arithmetic	حساب
Arrangement	تنظيم
Armature	حافظة المغناطيس
Array	مجموعة مرتبة
Assembly	تجميع - مجمعة
Associative law	قانون التجميع
Atmosphere	جو
Attenuation	توهين
Attraction	تجاذب
Audion tape	شريط صوتى
Automotive	ذاتى الحركة
Axes	محاور
Axis	محور
Azimuthal	سمتى

(B)

Balance	ميزان
Band	نطاق
Bandwidth	عرض النطاق الترددى
Bar	قضيب
Barium titanate	تيتانات باريوم
Barrier	حاجز
Battery	بطارية
Beam	حزمة
Bearing	كرسى تحميل
Beryllium	بريليوم
Binomial Theorem	نظرية ذات الحدين
Bismuth	بزموث
Blade	ريشة (مروحة أو رفاص)

Boundary conditions	شروط حدود
Bound charge	شحنة مقيدة
Branch cut	قطع تفرع
Brass	نحاس أصفر
Bridge	قنطرة
Broadcasting	اذاعة
Bus bar	قضيب توصيل

(C)

Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Clibrate	يعاير ـ يدرج
Candela	كانديلا (وحدة شدة اضاءة)
Capacitance	سعة
Capacitive	سعوى
Capacitor	مكثف
Carbon dioxide	ثانى أكسيد الكربون
Cartesian coordinate system	نظام احداثيات كرتيزية
Cast iron	حديد زهر
Cathode - ray	شعاع الكاثود
Cell	فجوه
Cavity	خلية
Cesium	سيزيوم
Characteristic	خاصة ـ خاصية ـ مميز
Characteristic impedance	معاوقة مميزة
Charge carrier	حامل شحنة
Chart	مخطط
Chloride	كلوريد
Circle	دائرة
Circuit	دائرة كهربية
Circuital law	قانون دائرى
Circular cylindrical coordinates	احداثيات اسطوانية دائرية
Circularly polarized	دائرى استقطاب
Circulation	دوران

Circumferential	محيطى
Clamping ring	حلقة تثبيت
Classification	تصنيف
Clay	صلصال
Coaxial cable	كابل محورى (كابل ذو موصلين متحدى المحور)
Coaxial capacitor	مكثف محورى (مكثف ذو موصلين متحدى المحور)
Cobalt chloride	كلوريد كوبلت
Coercive force	قوة قهرية
Coil	ملف
Column	عمود
Combination	ضم - تجميع
Combined	متضام
Commutative law	قانون التبادل
Compass	بوصلة - فرجار
Compensate	يعوض
Complex	مركب
Component	مركبة
Concentric	مُتحد المركز
Conductance	مواصلة
Conductivity	موصلية
Conductor	موصل
Cone	مخروط
Configuration	تشكيل - هيئة - شكل هندسى
Conservative	محافظ
Consistent	متوافق
Continuity equation	معادلة الاستمرارية
Continuous	مستمر - متصل
Contour lines	خطوط مناسيب (خطوط كنتورية)
Contribution	مساهمة
Convection current	تيار حمل
Conversion	تحويل

Corrdinate	احداثى
Coplanar	مشتركة المستوى
Core	قلب
Corner	ركن
Coupled	مقرنة
Coupling	تقارن ـ قارنة
Crank handle	ذراع تدوير
Crest	قمة ـ ذروة
Criterion	معيار
Cross product	الضرب بعلامة X
Crystalline	بللورى
Curl	التواء
Current	تيار
Current density	كثافة تيار
Curvature	انحناء
Curve	منحنى
Curvilinear	منحنى الخطوط
Cyclic	دورى
Cyclotron	سيكلوترون
Cylinder	اسطوانة

(D)

Dashboard	لوحة أجهزة قياس
D.C. (direct current)	تيار مستمر
Definition	تعريف
Deflection	انحراف
Deform	يشوه
Dehydrated	منزوع من الماء
Delay line	خط تعويق (تأخير)
Demagnetize	يزيل التمغنط
Density	كثافة
Depletion	نزح
Derivative	مشتقة

Detection	كشف
Detector	مكشاف
Determinant	محددة
Device	جهاز - أداة
Diagram	رسم بيانى
Diamagnetic	دايامغناطيسى
Dielectric	عازل
Dielectric constant	ثابت العازل
Differential equation	معادلة تفاضلية
Differential volume	حجم تفاضلى
Differentiation	تفاضل
Diffusion equation	معادلة الانتشار
Dimension	بعد
Dimensionless	عديم الأبعاد
Diode	صمام ثنائى
Dipole	ثنائى قطب
Direction	اتجاه
Discrepancy	اختلاف
Discrete	منفصل
Displacement	ازاحة
Displacement current	تيار ازاحة
Dissipate	يبدد
Distance	مسافة
Distilled	مقطر
Distribute	يوزع
Divergence	انفراج
Divider	فرجار
Domain	مقاطعة - مجال
Dominant	غالب - سائد
Donor	معطى
Dot product	ضرب بعلامة النقطة
Drift velocity	سرعة انسياق
Dysprosium	ديسبروزيوم

(E)

Eddy currents	تيارات دوامية
Effective mass	كتلة فعالة
Elastic membrane	غشاء مرن
Electric field intensity	شدة المجال الكهربى
Electricity	كهربية
Electrode	قطب كهربى
Electrolytic solution	محلول الكتروليتى
Electrolytic trough	حوض الكتروليتى
Electromagnet	مغناطيس كهربى
Electromagnetic	كهرومغناطيسى
Electromotive force (emf)	قوة دافعة كهربية (ق د ك)
Electron	الكترون
Electron gun	مدفعة الكترونات
Electrostatic	كهروستاتيكى
Element	عنصر
Elementary	أولى - ابتدائى
Elevation	ارتفاع- مسقط رأسى
Embedded	مغمور
Empirical	تجريبى
Enclosed	محصور
Energy	طاقة
Egergy band	نطاق طاقة
Energy conversion	تحويل طاقة
Energy expended	طاقة مستنفذة
Energy stored	طاقة مختزنة
Equality	مساواة - تساوى
Equation	معادلة
Equipment	تجهيز - معده
Equipotential	متساوى الجهد
Erbium	أربيوم
Error	خطأ
Estimate	تقدير - يقدر

Ethyl	اثيل
Excitation	اثارة
Expansion	مفكوك
Experience	خبرة - يلاقى (يعانى)
Experiment	تجربة
Explicit	صريح
Exponent	أس
Exponential	اسى
Expression	تعبير
Extension	امتداد
External	خارجى

(F)

Factor	عامل
Ferrimagnetic	فرى مغناطيسى
Ferrite	فريت
Ferroelectric	فروكهربية (مادة عازلة عفوية الاستقطاب)
Ferromagnetic	فرومغناطيسى
Ferrous	كبريتيد حديدوز
Fiberglass	زجاج ليفى
Field	مجال
Filament	فتيلة
Final	نهائى
Fluid	مائع
Flux	تدفق
Flux density	كثافة تدفق
Focusing	تركيز بؤرى
Fold	يطوى طيه
Forbidden	محرم
Force	قوة
Formula	صيغة
Fraction	كسر - جزء
Frame of reference	اطار اسناد
Free space	فضاء حر

Freezing point	نقطة تجمد
Frequency	تردد
Fringing	تهدب
Function	دالة
Furlong	فيرلونج (٢٢٠ ياردة)
Fused	منصهر

(G)

Gadolinium	جادولينيوم
Galvanometer	جالفانومتر
Gap	ثغرة - فجوة
Gas	غاز
Gaussian surface	سطح جاوسى
Generator	مولد
Geometry	هندسة
Germanium	جرمانيوم
Glass	زجاج
Gold	ذهب
Gradient	تدرج
Graduated	مدرج
Granite	جرانيت
Graphical	تخطيطى - بيانى
Graphite	جرافيت
Ground state	حالة خمود (همود)
Guide	يرشد - يوجه - دليل

(H)

Hall effect	تأثير هول
Handbook	كتاب مختصر
Harmonic	توافقى
Helium	هليوم
Helix	لولب - حلزون
Hole	فجوة - ثقب

Hollow	اجوف
Homogeneous	متجانس
Homonym	لفظة مجانسة
Horizontal	أفقى
Humidity	رطوبة
Hydraulics	هيدروليكا
Hydroelectric	هيدروكهربى
Hydrogen	ايدروچين
Hyperbolic cosine	جيب تمام زائدى
Hyperbolic sine	جيب زائدى
Hypothesis	فرض
Hysteresis	تخلفية ـ تخلف

(I)

Ice	جليد
Identical	مطابق
Illustration	توضيح
Image	صورة
Impedance	معاوقة
Incandescent	متوهج
Incident wave	موجة ساقطة
Increment	عنصر تزايدى
Index	فهرس
Indication	بيان ـ دلالة
Induced	منتجة بالحث ـ مستحثة
Inductance	محاثة
Inductor	عضو حث
Inert gas	غاز خامل
Infinitesimal	متناهى الصغر
Infinity	مالانهاية
Information	معلومات
Infrared	دون الحمراء
Inherent	متأصل

Initial	ابتدائى
Input	دخل - مدخل
Input impedance	معاوقة دخل
Inspection	فحص
Instrument	جهاز قياس
Insulating materials	مواد عازلة
Insulator	عازل
Integral multiple	مضاعف صحيح
Integral number	عدد صحيح
Integrand	مكامل
Integrated circuit	دائرة مكاملة
Integration	تكامل
Interface	سطح بينى
Intermediate	متوسط
Internal	داخلى
Interpolation	استكمال من الداخل
Interpretation	تفسير - شرح
Intrinsic	ذاتى
Inversely proportional	متناسب عكسيا
Ion propulsion	دفع ايونى
Iridium	ايريديوم
Iron	حديد
Isotropic	موحد الخواص
Iteration method	طريقة التكرار

(J)

Joule	جول
Junction	وصلة - ملتقى

(K)

Kilogram	كيلوجرام
Kinetic energy	طاقة حركة
Knot	يعقد - عقدة
Krypton	كربتون

(L)

Latitude	خط عرض (زاوية خط عرض)

Lattice	شبكية
Launching	اطلاق
Layer	طبقة
Leakage	تسرب
Level	مستوى
Lever arm	ذراع رافعة
Limestone	حجر جيرى
Limitation	تقييد
Limiting process	عملية حدية
Linear	خطى
Linearize	يقرب خطيا
Line charge	خط شحنة (خط من الشحنة)
Link	يصل ـ يربط
Linkage	وصلية
Liquid	سائل
Load	حمل
Location	موضع
Locus	محل هندسى
Logarithm	لوغاريتم
Logical	منطقى
Longitude	خط طول
Longitudinal section	مقطع طولى
Loop	عروة
Loss	فقد
Loss tangent	ظل الفقد
Lossy	ذو فقد
Low frequency	تردد منخفض
Luminous	مضىء
Lumped	مجمع

(M)

Macroscopic	ماكروسكوبى
Magnetic field	مجال مغناطيسى

Magnetics	مغناطيسيات
Magnetism	مغناطيسية
Magnetite	مغنيتيتى
Magnetohydrodrynamics	هيدروديناميكا مغناطيسية
Magnetomotive force (mmf)	قوة دافعة مغناطيسية (ق د م)
Magnetostriction	تخصر بالمغناطيسية
Magnetron	مغنطرون
Magnitude	مقدار
Manganese	منجنيز
Manipulation	معالجة
Manner	كيفية ـ طريقة ـ أسلوب
Map	خريطة ـ تخطيط
Marble	رخام ـ بلية
Maser	ميزر
Mass	كتلة
Matching	مواءمة
Materials	مواد
Matrix	مصفوفة
Maximum	نهاية عظمى
Measure	يقيس
Mechanics	ميكانيكا
Mechanism	آلية
Memory	ذاكرة
Microscopic	ميكروسكوبى
Microstrip	شريط دقيق
Microwave	موجة دقيقة
Microwave oven	فرن بموجات دقيقة
Minimum	نهاية صغرى
Mobility	حركية
Modulate	عدل
Molecule	جزىء
Moment	عزم
Monopole	أحادى قطب

Multiplication	ضرب
Multiply	يضرب
Multipole	متعدد أقطاب
Mumetal	ميوميتال
Mutual force	قوة متبادلة
Mutual inductance	محاثة متبادلة

(N)

Negative	سالب
Neodymium	أكسيد نيوديميوم
Neoprene	نيوبرين
Network	شبكة
Neutral	متعادل
Nickel	نيكل
Nickel ferrite	نيكل حديدى
Noise	ضوضاء
Nomenclature	مصطلحات ـ مسميات
Nonlinear	غير خطى
Normal	عمودى
Normal incidence	سقوط عمودى
Normalized	مسوى ـ معاير
Notation	تدوين
Nucleus	نواة
Number	عدد
Numerical	عددى

(O)

Oblate spheriod	شبه كرة مفلطح
Octant	ثمن
Odometer	أودمتر
Omission	حذف
Omnidirectional	لجميع الاتجاهات
Open circuit	دائرة مفتوحة

Operation	عملية
Operator	عامل
Opposite	مضاد - مقابل
Orbit	مدار
Order of magnitude	رتبة (عظم) مقدار
Ore	خام
Orient	يوجه
Origin	نقطة أصل
Orthogonal	متعامد
Oscillator	مذبذب
Oscilloscope	مرسمة ذبذبات
Output	خرج - حصيلة
Oxygen	اكسچين

(P)

Paddle wheel	عجلة تجديف
Paradoxical	متناقصة ظاهريا
Paragraph	فقرة
Parallel	موازى
Parallelcpiped	متوازى سطوح
Parallelism	توازى
Parallelogram	متوازى أضلاع
Paramagnetic	بارامغناطيسى
Parameter	بارامتر
Partial capacitapce	سعة جزئية
Partial derivative	مشتقة جزئية
Path	مسار
Pattern	نمط
Penetration	اختراق
Perfect conductor	موصل تام
Perimeter	محيط
Peroid	مدة دورة - فترة
Periodic function	دالة دورية

Periodic variation	تغير دورى
Permalloy	برمالوى
Permanent magnet	مغناطيس دائم
Permeability	انفاذية
Permittivity	سماحية
Permutaton	تبديل
Perpendicular	عمودى
Pertinent	متعلق
Perturbation	اضطراب
Phase	طور
Phase constant	ثابت طور
Phase shift	ازاحة طور
Phasor	مطاور
Phenomenon	ظاهرة
Physical	فيزيائى
Phsiology	فسيولوجى (وظائفى)
Pitch	خطوة
Plane	مستوى
Plant	مصنع
Plasma	بلازما
Platinum	بلاتين
Point	نقطة
Point charge	شحنة نقطية
Point form	صورة نقطية
Polar	قطبى
Polar corrdinates	احداثيات قطبية
Polarization	استقطاب
Polycrystalline	متعدد البللورات
Polyetylene	بوليثيلين
Polypropylene	بوليبروبيلين
Position vector	متجه موضع
Positive	موجب
Postulate	يقترض ـ يسلم بـ

Potasium	بوتاسيوم
Potential	جهد
Power	قدرة
Power factor	عامل قدرة
Preamplifier	مضخم متقدم
Pressure	ضغط
Probe	مجس
Prcelain	بورسيلين (صينى)
Progress	تقدم
Projection	مسقط
Proof	اثبات
Propagation	انتشار
Property	خاصية
Proportional	متناسب
Proton	بروتون
Publication	نشر
Pulse	نبضة
Pyranol	بيرانول
Pyrex	بيركس

(Q)

Qualitative	كيفى
Quality factor	عامل الجودة
Quantitative	كمى
Quantity	كمية
Quantized	مكمى
Quantum theory	نظرية الكم
Quartz	كوارتز
Quotient	خارج القسمة

(R)

Radar signal	اشارة رادار
Radian frequency	ترددى زاوى

Radians	تقدير دائرى
Radiation	اشعاع
Radiator	مشع
Radical	جذرى
Radome	رادوم
Rail	قضيب
Random	عشوائى
Range	مدى
Rare earth elements	عناصر الأرض النادرة
Rationalized	مرشد
Reactance	مفاعلة
Reactive	مفاعل
Receiving antenna	هوائى استقبال
Reciprocal	مقلوب
Recatngle	مستطيل
Rectangular coordinates	احداثيات متعامدة
Rectangular parallelepiped	متوازى مستطيلات قائم
Rectify	يقوم
Recurrence relationship	علاقة تكرارية
Reference plane	مستوى اسناد
Refinement	تنقية
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار
Region	منطقة
Relaxation method	طريقة الاسترخاء
Relaxation time	زمن تراخى
Relay	متابع
Reluctance	ممانعة
Remnant	متبق
Residual	متبق ـ متخلف
Resistivity	مقاومية
Resistor	مقاوم
Resonance	رنين

Resonant	رنان
Resonant cavity	فجوة رنانة
Resonator	مرنان
Response	استجابة
Retardation	تأخير
Retarded potential	جهد مؤخر
Reversal	عكس ـ قلب
Ring	حلقة
Rochelle salt	ملح روشيل
Root mean square	جذر متوسط المربع
Rounding off	تقريب
Row	صف
Rule	قاعدة

(S)

Sample	عينة
Saturation	تشبع
Scalar	مقياسى ـ كمية مقياسية
Scalar product	ضرب مقياسى
Scale	تدريج ـ مقايس رسم
Sector	قطاع
Segment	جزء
Selective	انتقائى
Semiconductor	شبه موصل
Semi - infinite	نصف لانهائى
Sendust	سيندست
Sensitivity	حساسية
Separation	فصل ـ انفصال
Series	على التوالى ـ متسلسلة
Set	مجموعة
Shape	شكل
Sheet	لوح ـ فرخ
Shield	درع ـ حائل

Shielded	محجب ـ مدرع
Short	دائرة قصر
Shorting	تقصير (الدائرة)
Shunt circuit	موصل على التوازى
Sign	اشارة
Signal generator	مولد اشارات
Singificant figure	رقم معنوى
Silicon	سيليكون
Simultaneously	فى نفس اللحظة ـ انيا
Sink	بالوعة
Sketch	رسم تخطيطى
Skin depth	عمق سطحى
Skin effect	ظاهرة سطحية
Slope	ميل
Slotted line	خط مشقوق
Snow	ثلج
Sodium chloride	كلوريد صوديوم
Solenoid	ملف لولبى
Sonar	سونار
Source	منبع
Space	فراغ
Space	شحنة حيزية
Speaker	مجهار
Sphere	كرة
Spherical coordinate system	نظام احداثيات كروية
Spin	دوران مغزلى ـ تدويم
Spiral ramp	منحدر حلزونى
Square root	جذر تربيعى
Standard	عيارى ـ قياسى
Standing wave	موجة واقفة
Static field	مجال استاتيكى
Stationary	ساكن
Steady	ثابت

Steady - state	حالة ثابتة
Steatite	ستيتيت
Steel	صلب ـ فولاذ
Stereo	استريو
Stray capacitance	سعة شاردة
Streamlines	خطوط انسياب
Strip	شريط
Structure	انشاء ـ تكوين
Stub	عقب
Substance	مادة
Substation	محطة فرعية
Substitution	تعويض ـ استبدال
Subtract	يطرح
Substrate	قاعدة
Successive	متعاقب ـ متتالى
Sulfur	كبريت
Sum	مجموع
Summarize	يلخص
Summary	ملخص
Superconductivity	فرط موصلية
Super high frequency (SHF)	تردد فوق العالى
Superparamagnetic	فائقة البارامغناطيسية
Superposition	تراكب
Superscript	رمز علوى
Surface	سطح
Surface charge	شحنة سطحية
Susceptibility	قابلية التأثر
Switch	مفتاح كهربى
Symbol	رمز
Symbolize	يرمز
Symmetry	تماثل

Tangency	تماس
Tangent	مماس
Tangential	مماسى
Tape recorder	مسجل شريطى
Taylor's series	متسلسلة تايلور
Technique	اسلوب تقتنى ـ تقنية
Teflon	تفلون
Temperature	درجة حرارة
Temporarily	مؤقتا
Tensor	كمية ممتدة
Terminal	طرف
Thermistor	ثرمستور
Thermodynamics	ديناميكا حرارية
Thin film	غشاء رقيق
Three - dimensional	ثلاثى الأبعاد
Thunderhead	ركام رعدى
Time - varying	متغير مع الزمن
Tin	قصدير
Tools	أدوات
Toroid	ملف حلقى
Torque	عزم تدوير
Torsion balance	ميزان التواء
Tower	برج
Track	مسلك
Trajectory	مسار قذف
Transformation	تحويل
Transformer	محول
Transient current	تيار عابر
Translation	انتقال
Transmission	نقل ـ نفاذ
Transmission coefficient	معامل النفاذ
Transmission line	خط نقل
Transmitter	مرسل ـ جهاز ارسال

Transmitting antenna	هوائى ارسال
Transparent	شفاف
Transverse	مستعرض
Traveling wave	موجة متنقلة
Triangle	مثلث
Trigonometry	حساب المثلثات
Truncated	مقطوع- مبتور
Tuned	موالف
Tungsten	تنجستن
Turn	لفه
Turnatable	مائدة دوارة
Twist	يجدل - لى
Two - dimensional	ذو بعدين- ثنائى الأبعاد
Two -sheeted hyperboloid	سطحا زائديا ذو طيتين
Typical calues	قيم نموذجية

(U)

Ultraviolet	فوق البنفسجية
Unbounded	غير محدد
Uncurling	فك الالتواء
Uniform	منتظم
Unique	فريد
Uniqueness theorem	نظرية الوحدانية
Unit vector	وحدة متجه

(V)

Vacuum	فراغ
Vacuum tube	صمام مفرغ- انبوبة مفرغة
Valence band	نطاق تكافؤ
Variable	متغير
Variation	تغير
Vector	متجه

Vector analysis	تحليل المتجهات
Vector identity	متطابقة متجهة (اتجاهية)
Vector operator	عامل متجة
Vector product	ضرب متجه
Velocity	سرعة
Version	ترجمة ـ صورة
Vertical	رأسى
Vertix	رأس ـ قمة
Vibration	ذبذبة
Virtual work	شغل افتراضى
Volt	ڤولت
Voltage	ڤولتية
Voltmeter	فولتمتر
Volume	حجم
Voluntary	تطوعى ـ اختيارى

(W)

Wattmeter	مقياس قدرة
Wave	موجة
Waveguide	دليل موجى
Wavelength	طول موجة
Wave propagation	انتشار الموجات
Wedge	اسفين
Winding	ملف لفيفة
Winding factor	عامل لف
Wire	سلك
Work	شغل

(X)

Xerography	تصوير جاف

(Y)

Yttrium	يوتريوم

(Z)

Zero reference	مرجع صفرى

الفهرس الأبجدى

الانفراج

الاحداثيات الكرتيزية $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

الاحداثيات الاسطوانية $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

الاحداثيات الكروية

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

التدرج

الاحداثيات الكرتيزية $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$

الاحداثيات الاسطوانية $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$

الاحداثيات الكروية $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$

الالتواء

الاحداثيات الكرتيزية

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

الاحداثيات الاسطوانية

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$

الاحداثيات الكروية

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin \theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

اللابلاسي

الاحداثيات الكرتيزية

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

الاحداثيات الاسطوانية

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

الاحداثيات الكروية

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

رقم الايداع بدار الكتب

١٩٨٢ / ٥٦٩٥


مطابع الأهرام التجارية
القاهرة



ISBN 084270 1